УДК 539.376
DOI: 10.15372/PMTF202215206

РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗОГНУТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПРИ СЖАТИИ И РАСТЯЖЕНИИ

Г. М. Севастьянов, К. С. Бормотин

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия
E-mails: akela.86@mail.ru, cvmi@knastu.ru

Получено аналитическое решение задачи о релаксации напряжений в изогнутой вязкоупругой пластине. Исследовано влияние различия вязких свойств материала при растяжении и сжатии на релаксацию изгибающего момента. Деформация полагается конечной, использовано мультипликативное разложение тензора градиента деформации на упругую и неупругую составляющие. Проведено сравнение двух моделей, учитывающих различие свойств материала при растяжении и сжатии.

Ключевые слова: вязкоупругость, изгиб, разносопротивляемость материала растяжению и сжатию

Введение. Различие механических свойств при растяжении и сжатии ряда материалов может быть очень существенным. Исследования различия свойств материала при растяжении и сжатии в случае упругого деформирования были начаты в работах [1–5]. В последнее время разработаны модели, учитывающие этот эффект при больших деформациях (см., например, [6]). Различие сопротивления пластическому деформированию при растяжении и сжатии описывается, например, моделями [7, 8]. Подобные эффекты наблюдаются также в режиме ползучести и исследуются в работах [9–20], включающих как теоретические исследования, так и численные расчеты, результаты которых сравниваются с экспериментальными данными. Однако даже для относительно простых задач существует небольшое количество аналитических решений. Например, в работе [6] приведены решения, полученные в случаях радиально-сферической деформации, изгиба пластины и деформации кручения цилиндра.

В данной работе приводится простое аналитическое решение задачи о релаксации напряжений в изогнутой пластине, полученное с использованием двух моделей, основанных на эквивалентном напряжении [7, 8]. Ограничимся случаем, когда вязкие свойства материала при растяжении и сжатии различны, а упругие свойства описываются стандартной моделью Генки для несжимаемого гиперупругого материала.

1. Модель материала. Принимается мультипликативное разложение градиента деформации F на упругую F^e и необратимую F^c составляющие [21]:

$$F = F^e F^c. \qquad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-11-00165).

Линейное вязкоупругое поведение материала описывается двумя потенциалами: упругим потенциалом Ψ и потенциалом ползучести W:

$$\Psi = -2\mu I_2, \quad \sigma = -pI + \frac{\partial \Psi}{\partial h^e} = -pI + 2\mu h^e; \tag{2}$$

$$W = \frac{\sigma_{eq}^2}{2\eta}, \qquad D^c = \frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{dW}{d\sigma_{eq}}\,\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta}\,\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma}. \tag{3}$$

Здесь μ — модуль сдвига; σ — тензор напряжений Коши; I — единичный тензор; $I_2 = -\mathrm{tr}\,(h^e)^2/2$ — квадратичный инвариант логарифмического тензора деформации Генки $h^e = \ln[F^e(F^e)^{\mathrm{т}}]^{1/2}$ (для несжимаемого материала $\mathrm{tr}\,h^e = 0$); D^c — тензор скорости необратимой деформации; η — вязкость; σ_{eq} — эквивалентное напряжение.

Если в (3) принять $\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}$, где $J_2 = \mathrm{tr}\,s^2/2$; $s = \sigma - I\,\mathrm{tr}\,\sigma/3$ — девиатор напряжений, то получим обычную линейную вязкую модель материала с одинаковыми свойствами при растяжении и сжатии.

Для того чтобы учесть в модели различие свойств материала при растяжении и сжатии (tension-compression asymmetry (TCA)), используем для эквивалентного напряжения два анзаца.

Согласно первому анзацу, предложенному в [7] для описания TCA в случае пластических течений, выражение для эквивалентного напряжения имеет вид

$$\sigma_{eq} = [J_2^{3/2} - (3\sqrt{3}/2)\alpha J_3]^{1/3}, \qquad \alpha \in [-1, 1], \tag{4}$$

где $J_3 = \det s$; параметр α характеризует TCA (при $\alpha = 0$ $\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}$).

С учетом

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = s, \qquad \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = s^2 - \frac{2}{3}\,J_2 I,$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial J_2} = \frac{1}{2}\,\sigma_{eq}^{-2}\sqrt{J_2}\,, \quad \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial J_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\alpha\sigma_{eq}^{-2}\,, \quad \frac{dW}{d\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta}$$

имеем

$$D^c = \frac{\sigma_{eq}}{\eta}\Big(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial J_2}\,\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial J_3}\,\frac{\partial J_3}{\partial \sigma}\Big) = \frac{\sqrt{J_2}\,s - \sqrt{3}\,\alpha\,[s^2 - (2/3)J_2 I]}{2\eta\sigma_{eq}}. \tag{5}$$

В случае одноосного нагружения вдоль оси x (сжатия или растяжения) получаем

$$\sigma = \mathrm{diag}\,\{\sigma_x, 0, 0\}, \quad s = \sigma_x\,\mathrm{diag}\,\{2/3, -1/3, -1/3\},$$

$$J_2 = \frac{1}{3}\,\sigma_x^2, \quad J_3 = \frac{2}{27}\,\sigma_x^3, \quad \sigma_{eq} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}\,[\mathrm{sign}\,(\sigma_x) - \alpha]^{1/3};$$

$$D_x^c = \frac{\sigma_x}{3\eta}\,[\mathrm{sign}\,(\sigma_x) - \alpha]^{2/3}, \tag{6}$$

т. е. значения скорости необратимой деформации при сжатии и растяжении различаются.

Согласно второму анзацу эквивалентное напряжение определяется в виде [8]

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2)/2}\,, \tag{7}$$

где s_1, s_2, s_3 — упорядоченные в порядке убывания главные значения девиатора напряжений; коэффициенты

$$n_k = \begin{cases} n^+, & s_k \geqslant 0, \\ n^-, & s_k < 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3 \tag{8}$$

характеризуют TCA.

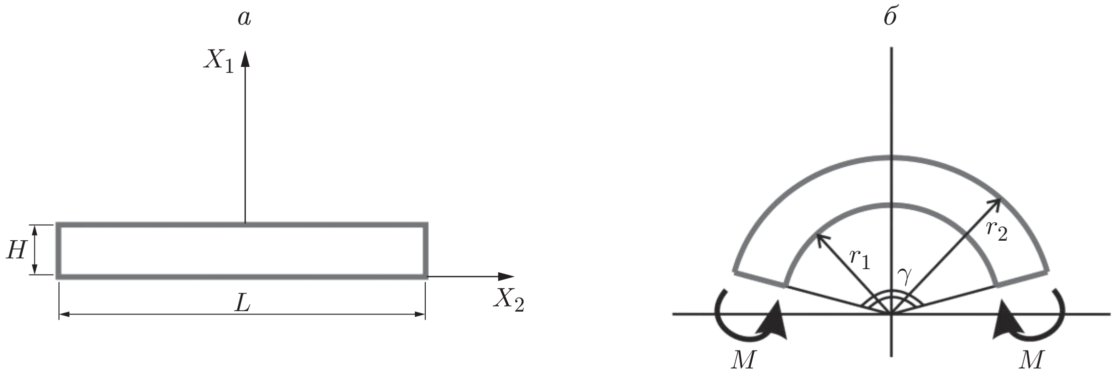

Рис. 1. Деформирование пластины при изгибе:
а — начальная конфигурация, *б* — конфигурация после деформации

В случае одноосного растяжения

$$\sigma_1 = \sigma_x > 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad s_1 = (2/3)\sigma_x > 0, \quad s_2 = s_3 = -(1/3)\sigma_x < 0,$$

$$D_x^c = \frac{\sigma_{eq}}{\eta}\,\frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial\sigma_x} = \frac{1}{2\eta}\Big(n^+ s_1\,\frac{\partial s_1}{\partial\sigma_x} + n^- s_2\,\frac{\partial s_2}{\partial\sigma_x} + n^- s_3\,\frac{\partial s_3}{\partial\sigma_x}\Big) = \frac{\sigma_x}{3\eta}\,\frac{2n^+ + n^-}{3}.$$

Аналогично в случае одноосного сжатия

$$\sigma_3 = \sigma_x < 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad s_3 = (2/3)\sigma_x < 0, \quad s_1 = s_2 = -(1/3)\sigma_x > 0,$$

$$D_x^c = \frac{\sigma_{eq}}{\eta}\,\frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial\sigma_3} = \frac{1}{2\eta}\,\Big(n^+ s_1\,\frac{\partial s_1}{\partial\sigma_3} + n^+ s_2\,\frac{\partial s_2}{\partial\sigma_3} + n^- s_3\,\frac{\partial s_3}{\partial\sigma_3}\Big) = \frac{\sigma_x}{3\eta}\,\frac{n^+ + 2n^-}{3}.$$

Полагая в формулах для D_x^c

$$n^+ = 2(1-\alpha)^{2/3} - (1+\alpha)^{2/3}, \qquad n^- = 2(1+\alpha)^{2/3} - (1-\alpha)^{2/3}, \tag{9}$$

получаем выражение (6) для скорости деформации. Обе модели могут быть представлены также с использованием параметров $\eta^+ = \eta(1-\alpha)^{-2/3}$, $\eta^- = \eta(1+\alpha)^{-2/3}$ (коэффициенты вязкости при одноосном растяжении и сжатии) вместо α и η.

2. Изгиб пластины. Предварительная деформация пластины описывается следующими уравнениями кинематики изгиба в условиях плоской деформации [22–24] (рис. 1):

$$r = \sqrt{B + 2X_1/A}, \quad \varphi = AX_2, \quad z = X_3.$$

Внутренний и внешний радиусы кривизны изогнутой пластины могут быть представлены в виде

$$r_1 = \sqrt{B}, \quad r_2 = \sqrt{B + \frac{2H}{A}}, \quad A = \frac{\gamma}{L}, \quad B = \frac{1}{A^2}\big(\sqrt{1 + (AH)^2} - AH\big).$$

Здесь γ — угол изгиба; L, H — длина и толщина пластины соответственно (см. рис. 1). Кроме того, справедливо равенство $r_1 r_2 = A^{-2}$ [22].

Предварительное деформирование является чисто упругим, в момент времени $t = 0$ начинается релаксация напряжений, что приводит к уменьшению изгибающего момента. Градиент деформации в момент $t = 0$ равен $F = F^e = \operatorname{diag}\{(Ar)^{-1}, Ar, 1\}$, тензор деформации Генки — $h^e = \operatorname{diag}\{-\ln(Ar), \ln(Ar), 0\}$.

Изгибающий момент на единицу длины в направлении $z = X_3$ равен

$$M = \int\limits_{r_1}^{r_2} \sigma_{\varphi\varphi} r\, dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} \sigma_{rr} r\, dr + 2\mu \int\limits_{r_1}^{r_2} (h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}) r\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}[r^2\sigma_{rr}]\Big|_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{2}\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{d\sigma_{rr}}{dr}\, r^2\, dr + 2\mu \int\limits_{r_1}^{r_2} (h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}) r\, dr =$$

$$= -\mu \int\limits_{r_1}^{r_2} (h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}) r\, dr + 2\mu \int\limits_{r_1}^{r_2} (h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}) r\, dr = \mu \int\limits_{r_1}^{r_2} (h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}) r\, dr. \quad (10)$$

Здесь в первой строке использована формула (2); во второй строке проводится интегрирование по частям и учитывается, что поверхности пластины свободны от напряжений: $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$; в третьей строке использовано уравнение равновесия $r\, d\sigma_{rr}/dr = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$.

Формула (10) справедлива также при релаксации напряжений, поэтому, определив изменение разности $h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}$ при релаксации напряжений, можно вычислить изгибающий момент.

3. Релаксация напряжений для модели (4). Дифференцируя равенство (1) по времени и учитывая, что все тензоры в рассматриваемой задаче диагональные, получаем

$$\dot{F}^e (F^e)^{-1} = \dot{h}^e = D - D^c.$$

Здесь точка означает материальную производную; $D = \operatorname{sym}(\dot{F}F^{-1})$ — тензор скорости деформации; $D^c = \operatorname{sym}(\dot{F}^c (F^c)^{-1})$; $2\operatorname{sym}(\cdot) = (\cdot) + (\cdot)^{\mathrm{T}}$. Учитывая, что при релаксации $D = 0$ и $\dot{h}^e = \partial h^e/\partial t$, окончательно получаем

$$\frac{\partial h^e}{\partial t} = -D^c. \quad (11)$$

Из (11) с учетом (5) и равенства $s = 2\mu h^e$ находим

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tr}(h^e)^2}} \frac{\partial h^e}{\partial t} = -\frac{\mu}{\eta} \frac{\bar{h}^e - \sqrt{6}\,\alpha[(\bar{h}^e)^2 - (1/3)I]}{(1 - 3\sqrt{6}\,\alpha\, \det \bar{h}^e)^{1/3}}, \qquad \bar{h}^e = \frac{h^e}{\sqrt{\operatorname{tr}(h^e)^2}}. \quad (12)$$

Здесь учтено также выражение для эквивалентного напряжения

$$\sigma_{eq} = [J_2^{3/2} - (3\sqrt{3}/2)\alpha J_3]^{1/3} = \sqrt{2}\,\mu[\operatorname{tr}(h^e)^2]^{1/2}(1 - 3\sqrt{6}\,\alpha \det \bar{h}^e)^{1/3}.$$

Для линейной вязкоупругой модели с $\alpha = 0$ (материал без ТСА) система (12) существенно упрощается: $\partial h^e/\partial t = -(\mu/\eta)h^e$. В этом случае

$$h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr} = 2\ln(Ar)\, \mathrm{e}^{-(\mu/\eta)t}, \qquad M = M_0\, \mathrm{e}^{-(\mu/\eta)t}, \qquad M_0 = 2\mu \int\limits_{r_1}^{r_2} \ln(Ar) r\, dr.$$

В системе трех эволюционных дифференциальных уравнений (12) независимыми являются только два, поскольку $\operatorname{tr} h^e = 0$. При этом уравнения системы (12) нелинейные и связанные. Преобразуем эту систему следующим образом.

Из (12) следует уравнение эволюции для тензора $\bar{h}^e$:

$$\frac{\partial \bar{h}^e}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tr}(h^e)^2}}\,\frac{\partial h^e}{\partial t} - \frac{\bar{h}^e}{2\operatorname{tr}(h^e)^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,[\operatorname{tr}(h^e)^2] =$$

$$= -\frac{\mu}{\eta}\,\frac{\bar{h}^e - \sqrt{6}\,\alpha[(\bar{h}^e)^2 - (1/3)I]}{(1 - 3\sqrt{6}\,\alpha\det\bar{h}^e)^{1/3}} - \frac{\bar{h}^e}{2\operatorname{tr}(h^e)^2}\operatorname{tr}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\,(h^e)^2\Big] =$$

$$= -\sqrt{6}\,\alpha\frac{\mu}{\eta}\,(1 - 3\sqrt{6}\,\alpha\det\bar{h}^e)^{-1/3}\Big[\bar{h}^e\operatorname{tr}(\bar{h}^e)^3 - (\bar{h}^e)^2 + \frac{I}{3}\Big]. \qquad (13)$$

Здесь учтено, что $\operatorname{tr}\bar{h}^e = 0$ (поскольку $\operatorname{tr}h^e = 0$) и $\operatorname{tr}(\bar{h}^e)^2 = 1$, а также учтено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(h^e)^2 = 2h^e\,\frac{\partial h^e}{\partial t} = -2\,\frac{\mu}{\eta}\,\bar{h}^e\,\frac{\bar{h}^e - \sqrt{6}\,\alpha[(\bar{h}^e)^2 - (1/3)I]}{(1 - 3\sqrt{6}\,\alpha\det\bar{h}^e)^{1/3}}.$$

В системе уравнений (13) независимых уравнений на одно меньше, чем в (12), поскольку $\operatorname{tr}\bar{h}^e = 0$ и $\operatorname{tr}(\bar{h}^e)^2 = 1$. Сформулируем эквивалентную (12) систему уравнений, которая является несвязанной. Для этого из системы (13) выпишем уравнение для $\bar{h}^e_{zz}$ (эту величину будем использовать в качестве параметра времени):

$$\frac{\partial \bar{h}^e_{zz}}{\partial \tau} = -\sqrt{6}\,\alpha\,\frac{3\bar{h}^{e4}_{zz} - (5/2)\bar{h}^{e2}_{zz} + 1/3}{[1 - 3\sqrt{6}\,\alpha\bar{h}^e_{zz}(\bar{h}^{e2}_{zz} - 1/2)]^{1/3}}. \qquad (14)$$

Из системы (12) находим производную разности $h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}$ по $\bar{h}^e_{zz}$:

$$\frac{\partial\,(h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr})}{\partial \bar{h}^e_{zz}} = \frac{\partial\,(h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr})/\partial t}{\partial \bar{h}^e_{zz}/\partial t} = \frac{(1 + \sqrt{6}\,\alpha\bar{h}^e_{zz})(h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr})}{\sqrt{6}\,\alpha[3\bar{h}^{e4}_{zz} - (5/2)\bar{h}^{e2}_{zz} + 1/3]}. \qquad (15)$$

Из уравнения (14) следует, что изменение $\bar{h}^e_{zz}$ обусловлено ТСА, при $\alpha = 0$ $\quad\bar{h}^e_{zz} = \text{const}$. В (14) введено безразмерное время $\tau = t\,\mu/\eta$, а также учтено, что так как тензор $\bar{h}^e$ диагональный, $\operatorname{tr}\bar{h}^e = 0$ и $\operatorname{tr}(\bar{h}^e)^2 = 1$, то

$$\operatorname{tr}(\bar{h}^e)^3 = 3\bar{h}^e_{rr}[(\bar{h}^e_{rr})^2 - 1/2] = 3\bar{h}^e_{\varphi\varphi}[(\bar{h}^e_{\varphi\varphi})^2 - 1/2] = 3\bar{h}^e_{zz}[(\bar{h}^e_{zz})^2 - 1/2] = 3\det\bar{h}^e.$$

Начальные условия системы (14), (15) имеют вид $\bar{h}^e_{zz} = 0$ и $h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr} = 2\ln(Ar)$ при $t = 0$. Эту систему уравнений можно проинтегрировать:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{6}\,\alpha}\int\limits_{\bar{h}^e_{zz}}^{0}\frac{\sqrt[3]{1 + 3\sqrt{6}\,\alpha\xi(1/2 - \xi^2)}}{1/3 - (5/2)\xi^2 + 3\xi^4}\,d\xi,$$

$$h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr} = 2\ln(Ar)\exp\Big(-\int\limits_{\bar{h}^e_{zz}}^{0}\frac{1/(\sqrt{6}\,\alpha) + \zeta}{1/3 - (5/2)\zeta^2 + 3\zeta^4}\,d\zeta\Big). \qquad (16)$$

Из (16) следует, что величина $\bar{h}^e_{zz}$ не зависит от координаты r, а зависит только от времени. Тогда согласно (10)

$$\frac{M}{M_0} = \exp\Big(-\int\limits_{\bar{h}^e_{zz}}^{0}\frac{1/(\sqrt{6}\,\alpha) + \zeta}{1/3 - (5/2)\zeta^2 + 3\zeta^4}\,d\zeta\Big), \qquad M_0 = 2\mu\int\limits_{r_1}^{r_2}\ln(Ar)r\,dr. \qquad (17)$$

Уравнения (16), (17) определяют релаксацию изгибающего момента для модели (4).

4. Релаксация напряжений для модели (7). В изогнутой пластине для точек материала, находящихся выше нейтральной поверхности $Ar = 1$, имеют место соотношения

$$s_1 = s_{\varphi\varphi} > 0, \quad n_1 = n^+, \quad s_3 = s_{rr} < 0, \quad n_3 = n^-, \quad Ar > 1,$$

а для точек, находящихся ниже нейтральной поверхности, — соотношения

$$s_1 = s_{rr} > 0, \quad n_1 = n^+, \quad s_3 = s_{\varphi\varphi} < 0, \quad n_3 = n^-, \quad Ar < 1.$$

Если $n^+ > n^-$, то $s_2 = s_{zz} > 0$; если $n^+ < n^-$, то $s_2 = s_{zz} < 0$. Таким образом, $n_2 = \max\{n^+, n^-\}$. Тогда, используя соотношения (11), (3) с учетом $s = 2\mu h^e$, $h^e_{zz} = -(h^e_{rr} + h^e_{\varphi\varphi})$, получаем следующие линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений и их решения.

В случае $n^+ > n^-$ при $Ar > 1$ решение системы

$$\frac{\partial h^e_{rr}}{\partial \tau} = -\frac{2n^- + n^+}{3}\, h^e_{rr}, \qquad \frac{\partial h^e_{\varphi\varphi}}{\partial \tau} + n^+ h^e_{\varphi\varphi} = -\frac{n^+ - n^-}{3}\, h^e_{rr}$$

имеет вид

$$h^e_{rr} = -\ln(Ar)\exp\Big(-\frac{2n^- + n^+}{3}\,\tau\Big), \quad h^e_{\varphi\varphi} = \mathrm{e}^{-n^+\tau}\,\frac{\ln(Ar)}{2}\Big[1 + \exp\Big(\frac{2(n^+ - n^-)}{3}\,\tau\Big)\Big],$$

при $Ar < 1$ решение системы

$$\frac{\partial h^e_{\varphi\varphi}}{\partial \tau} = -\frac{2n^- + n^+}{3}\, h^e_{\varphi\varphi}, \qquad \frac{\partial h^e_{rr}}{\partial \tau} + n^+ h^e_{rr} = -\frac{n^+ - n^-}{3}\, h^e_{\varphi\varphi}$$

имеет вид

$$h^e_{\varphi\varphi} = \ln(Ar)\exp\Big(-\frac{2n^- + n^+}{3}\,\tau\Big), \quad h^e_{rr} = -\,\mathrm{e}^{-n^+\tau}\,\frac{\ln(Ar)}{2}\Big[1 + \exp\Big(\frac{2(n^+ - n^-)}{3}\,\tau\Big)\Big].$$

В случае $n^+ < n^-$ при $Ar > 1$ решение системы

$$\frac{\partial h^e_{\varphi\varphi}}{\partial \tau} = -\frac{2n^+ + n^-}{3}\, h^e_{\varphi\varphi}, \quad \frac{\partial h^e_{rr}}{\partial \tau} + n^- h^e_{rr} = -\frac{n^- - n^+}{3}\, h^e_{\varphi\varphi}$$

имеет вид

$$h^e_{\varphi\varphi} = \ln(Ar)\exp\Big(-\frac{2n^+ + n^-}{3}\,\tau\Big), \quad h^e_{rr} = -\,\mathrm{e}^{-n^-\tau}\,\frac{\ln(Ar)}{2}\Big[1 + \exp\Big(\frac{2(n^- - n^+)}{3}\,\tau\Big)\Big],$$

при $Ar < 1$ решение системы

$$\frac{\partial h^e_{rr}}{\partial \tau} = -\frac{2n^+ + n^-}{3}\, h^e_{rr}, \quad \frac{\partial h^e_{\varphi\varphi}}{\partial \tau} + n^- h^e_{\varphi\varphi} = -\frac{n^- - n^+}{3}\, h^e_{rr}$$

имеет вид

$$h^e_{rr} = -\ln(Ar)\exp\Big(-\frac{2n^+ + n^-}{3}\,\tau\Big), \quad h^e_{\varphi\varphi} = \mathrm{e}^{-n^-\tau}\,\frac{\ln(Ar)}{2}\Big[1 + \exp\Big(\frac{2(n^- - n^+)}{3}\,\tau\Big)\Big].$$

Выражение для момента можно записать в следующем виде:

$$h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr} = \frac{\ln(Ar)}{2}\Big[\exp\big(-\max\{n^+, n^-\}\,\tau\big) + \\ + 3\exp\Big(-\frac{\max\{n^+, n^-\} + 2\min\{n^+, n^-\}}{3}\,\tau\Big)\Big];$$

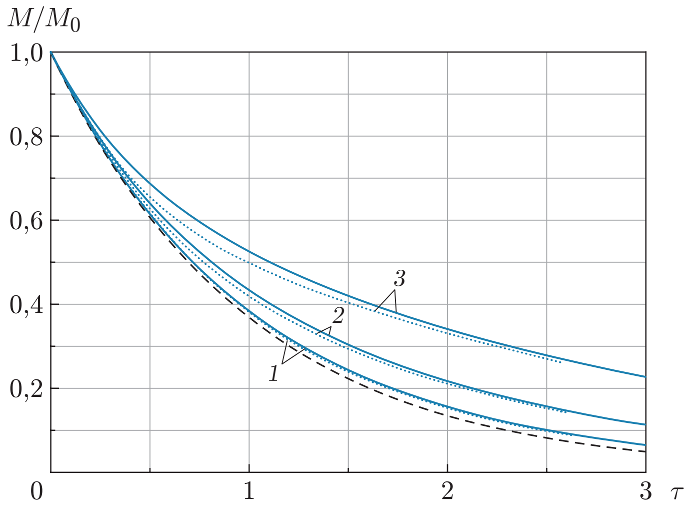

Рис. 2. Релаксация изгибающего момента:
сплошные линии — модель (4), пунктирные — модель (7), штриховая линия — материал без ТСА ($\alpha = 0$); *1* — $\alpha = \pm 0{,}25$, *2* — $\alpha = \pm 0{,}50$, *3* — $\alpha = \pm 0{,}75$

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\mu}{M_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} (h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}) r\, dr = \frac{1}{4} \exp\big(-\max\{n^+, n^-\}\tau\big) + \\ + \frac{3}{4} \exp\Big(-\frac{\max\{n^+, n^-\} + 2\min\{n^+, n^-\}}{3}\,\tau\Big). \qquad (18)$$

Коэффициенты n^+ и n^- могут быть выражены через параметр α по формуле (9).

На рис. 2 приведены графики релаксации изгибающего момента для обеих моделей.

Результаты исследования влияния ТСА на релаксацию изгибающего момента, полученные с использованием рассмотренных в данной работе моделей, количественно различаются. Различие более существенно в начале процесса релаксации. Тем не менее расчеты по обеим моделям показывают, что различие свойств материала при растяжении и сжатии приводит к замедлению релаксации изгибающего момента.

Поскольку линейно-вязкая модель является приближенной, на практике часто используется обобщенная вязкоупругая модель Максвелла (см., например, [25]), представляющая собой параллельно соединенные линейно-вязкие элементы с разными свойствами. В каждом таком элементе общая деформация одна и та же, а общее напряжение в системе есть сумма напряжений в каждой ветви. В этом случае полученные решения (16)–(18) могут быть использованы для обобщенной модели Максвелла (см. [26]), учитывающей различие свойств материала при растяжении и сжатии в случае вязкого деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.** Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 44–53.
2. **Шапиро Г. С.** О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 123–125.
3. **Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.** К разномодульной теории упругости // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 6. С. 64–67.

4. **Амбарцумян С. А.** Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
5. **Цвелодуб И. Ю.** О разномодульной теории упругости // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 157–164.
6. **Du Z., Zhang G., Guo T., et al.** Tension-compression asymmetry at finite strains: A theoretical model and exact solutions // J. Mech. Phys. Solids. 2020. V. 143. 104084. DOI: 10.1016/j.jmps.2020.104084.
7. **Cazacu O., Barlat F.** A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals // Intern. J. Plasticity. 2004. V. 20, N 11. P. 2027–2045. DOI: 10.1016/j.ijplas.2003.11.021.
8. **Cazacu O., Revil-Baudard B.** Tension-compression asymmetry effects on the plastic response in bending: new theoretical and numerical results // Mech. Res. Comm. 2021. V. 114. 103596. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2020.103596.
9. **Guo Yu., Liu G., Huang Yi.** A complemented multiaxial creep constitutive model for materials with different properties in tension and compression // Europ. J. Mech. A. Solids. 2022. V. 93. 104510. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2022.104510.
10. **Voyiadjis G. Z., Zolochevsky A.** Modeling of secondary creep behavior for anisotropic materials with different properties in tension and compression // Intern. J. Plasticity. 1998. V. 14. N 10/11. P. 1059–1083. DOI: 10.1016/S0749-6419(98)00045-X.
11. **Zolochevsky A., Voyiadjis G. Z.** Theory of creep deformation with kinematic hardening for materials with different properties in tension and compression // Intern. J. Plasticity. 2005. V. 21, N 3. P. 435–462. DOI: 10.1016/j.ijplas.2003.12.007.
12. **Zolochevsky A., Sklepus S., Hyde T. H., et al.** Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and compression under plane stress conditions // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2009. V. 80, N 11. P. 1406–1436. DOI: 10.1002/nme.2663.
13. **Zolochevsky A., Galishin A., Sklepus S., Voyiadjis G. Z.** Analysis of creep deformation and creep damage in thin-walled branched shells from materials with different behavior in tension and compression // Intern. J. Solids Structures. 2007. V. 44, N 16. P. 5075–5100. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.12.019.
14. **Банщикова И. А., Ларичкин А. Ю.** Кручение круглых стержней с учетом разносопротивляемости материала растяжению и сжатию в условиях ползучести // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 6. С. 123–134. DOI: 10.15372/PMTF20180612.
15. **Банщикова И. А.** Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 102–117. DOI: 10.15372/PMTF20200110.
16. **Альтенбах Х. И., Золочевский А. А.** Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности анизотропных и изотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению — сжатию // ПМТФ. 1992. № 1. С. 114–120.
17. **Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С.** Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
18. **Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В.** О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // ПМТФ. 1979. № 4. С. 121–128.
19. **Коробейников С. Н., Олейников А. И., Горев Б. В., Бормотин К. С.** Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и программирование. 2008. Т. 9. С. 346–365.

20. **Teixeira L., Gillibert J., Sayet T., Blond E.** A creep model with different properties under tension and compression: Applications to refractory materials // Intern. J. Mech. Sci. 2021. V. 212. 106810. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106810.
21. **Sidoroff F.** Un modele viscoelastique non lineaire avec configuration intermediate // J. Mech. 1974. V. 13, N 4. P. 679–713.
22. **Rivlin R.** Large elastic deformations of isotropic materials. 5. The problem of flexure // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1949. V. 195. P. 463–473.
23. **Destrade M., Murphy J. G., Rashid B.** Differences in tension and compression in the nonlinearly elastic bending of beams // Intern. J. Structur. Changes Solids. Mech. Appl. 2009. V. 1, N 1. P. 73–81.
24. **Destrade M., Gilchrist M. D., Motherway J. A., Murphy J. G.** Bimodular rubber buckles early in bending // Mech. Materials. 2010. V. 42, iss. 4. P. 469–476. DOI: 10.1016/j.mechmat.2009.11.018.
25. **Ghobady E., Shutov A., Steeb H.** Parameter identification and validation of shape-memory polymers within the framework of finite strain viscoelasticity // Materials. 2021. V. 14, N 8. 2049. DOI: 10.3390/ma14082049.
26. **Sevastyanov G. M.** Creep relaxation in nonlinear viscoelastic twisted rods // Z. angew. Math. Mech. 2022. Bd 102, N 10. e202100552. DOI: 10.1002/zamm.202100552.

Поступила в редакцию 12/IX 2022 г.,
после доработки — 28/XI 2022 г.
Принята к публикации 26/XII 2022 г.