УДК 533

ПЛОСКИЙ ВИХРЬ ОВСЯННИКОВА: СВОЙСТВА ОПИСЫВАЕМОГО ДВИЖЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

С. В. Головин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: sergey@hydro.nsc.ru

Исследованы физические свойства движения идеальной плазмы, описываемого плоским вихрем Овсянникова. Показано, что траектории частиц и магнитные силовые линии являются плоскими кривыми, предложен алгоритм описания движения в трехмерном пространстве. Получены и изучены некоторые точные решения подмодели.

Ключевые слова: идеальная магнитная гидродинамика, точные решения, траектории, магнитные силовые линии, однородная деформация.

В работе [1] построена частично инвариантная подмодель уравнений идеальной магнитной гидродинамики, задающая трехмерное движение сплошной среды с плоскими волнами, аналогичное сферическому вихрю Овсянникова [2, 3]. Получены и проанализированы уравнения подмодели, дан геометрический алгоритм отыскания входящей в решение неинвариантной функции. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1].

1. Уравнения подмодели. Исследуем модель идеальной магнитной гидродинамики [4]

$$
\begin{gathered}
D\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \qquad D\boldsymbol{u} + \rho^{-1}\nabla p + \rho^{-1}\boldsymbol{H} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \\
Dp + A(p,\rho) \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \qquad D\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = 0, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \qquad D = \partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости; $\boldsymbol{H} = (H, K, L)$ — вектор напряженности магнитного поля; p, ρ — давление и плотность соответственно. Справедливо уравнение состояния $p = F(S,\rho)$ с энтропией S. Функция $A(p,\rho)$ определяется уравнением состояния $A = \rho\,(\partial F/\partial\rho)$. Все функции зависят от времени t и декартовых координат $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$.

Представление частично инвариантного решения [5] системы (1.1) имеет вид [1]

$$
\begin{aligned}
& u = U(t,x), && H = H(t,x), \\
& v = V(t,x)\cos\omega(t,x,y,z), && K = N(t,x)\cos\omega(t,x,y,z), \\
& w = V(t,x)\sin\omega(t,x,y,z), && L = N(t,x)\sin\omega(t,x,y,z), \\
& p = p(t,x), \qquad \rho = \rho(t,x), && S = S(t,x).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00080) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 2.15, программ Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-5245.2006.1) и молодых кандидатов наук (грант № МК-1521.2007.1).

Функции, зависящие только от t и x, далее будем называть инвариантными, единственной неинвариантной функцией является функция ω. В работе [1] была введена вспомогательная инвариантная функция h, определяемая равенством

$$\tilde{D}\rho + \rho(U_x + hV) = 0, \qquad \tilde{D} = \partial_t + U\partial_x.$$

Различаются два случая: $h = 0$ и $h \neq 0$. В случае $h \neq 0$ для удобства введем функцию $\tau = 1/h$, тогда подсистема для инвариантных функций принимает вид

$$\begin{gathered}\tilde{D}\rho + \rho(U_x + \tau^{-1}V) = 0, \qquad \tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x = 0,\\ \tilde{D}V - \rho^{-1}H_0\tau^{-1}N_x = 0, \qquad \tilde{D}p + A(p,\rho)(U_x + \tau^{-1}V) = 0,\\ \tilde{D}N + NU_x - H_0\tau^{-1}V_x + \tau^{-1}NV = 0, \qquad \tilde{D}\tau = V, \qquad H_0\tau_x = \tau N.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Неинвариантная функция ω определяется из неявного конечного соотношения

$$F(y - \tau\cos\omega, z - \tau\sin\omega) = 0 \tag{1.4}$$

с произвольной гладкой функцией F.

В случае $h = 0$ подсистема для инвариантных функций принимает вид

$$\begin{gathered}\tilde{D}\rho + \rho U_x = 0, \qquad \tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x = 0,\\ \tilde{D}V - \rho^{-1}H_0N_x = 0, \qquad \tilde{D}p + A(p,\rho)U_x = 0,\\ \tilde{D}N + NU_x - H_0V_x = 0, \qquad \tilde{D}\varphi = V, \qquad H_0\varphi_x = N.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Неявное соотношение для функции ω имеет вид

$$y\cos\omega + z\sin\omega = f(\omega) + \varphi(t,x), \tag{1.6}$$

где f — произвольная гладкая функция. В работе [1] предложены геометрические алгоритмы решения неявных уравнений (1.4), (1.6), найдены области определения решения, рассмотрены возможные случаи возникновения сингулярностей. Ниже исследуется общая картина движения в трехмерном пространстве.

2. Траектории частиц и магнитные силовые линии. Дифференцируя уравнения (1.4), (1.6), несложно получить равенство

$$D\omega = 0,$$

где D — оператор полного дифференцирования вдоль траектории. Угол ω сохраняется вдоль траектории, следовательно, эта траектория полностью лежит в некоторой плоскости, параллельной оси Ox и повернутой вокруг нее на угол ω. Дифференцирование вдоль магнитных силовых линий показывает, что ω сохраняется и вдоль этих кривых. Таким образом, для каждой частицы ее траектория и магнитная силовая линия являются плоскими кривыми, лежащими в одной плоскости, определяемой углом ω.

Еще одно важное свойство решения следует из представления (1.2). Для определения траектории некоторой частицы поставим задачу Коши. Плоское движение частицы полностью определяется компонентами скорости U, V, зависящими только от инвариантных переменных t, x, поэтому для любых двух частиц, принадлежащих некоторой плоскости $x = x_0$, в некоторый начальный момент $t = t_0$ задачи Коши для траекторий совпадают. Несмотря на то что различные частицы движутся в разных плоскостях, их траектории, представляющие собой плоские кривые, одинаковы. Аналогичное заключение может быть сделано для магнитных силовых линий, проходящих через две различные точки одной плоскости $x = x_0$. Таким образом, можно построить шаблоны траектории и магнитной силовой линии для частиц, лежащих в плоскости $x = x_0$. Присоединяя эти шаблоны к каждой точке плоскости $x = x_0$ внутри области определения функции ω в соответствии с

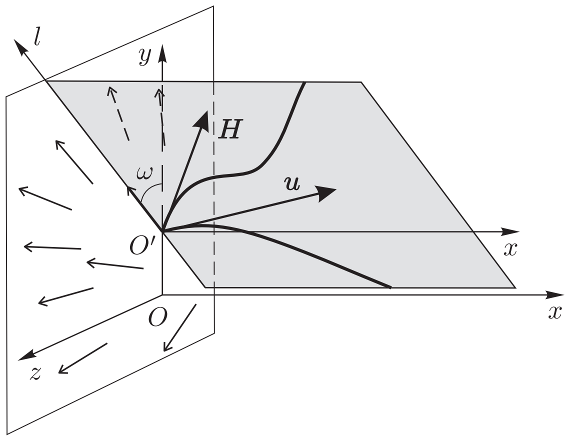

Рис. 1. Пространственная картина движения

полем направлений, определяемым функцией ω, получаем трехмерную картину траекторий и магнитных силовых линий во всем пространстве (рис. 1).

Для построения шаблона рассмотрим плоскость движения некоторой частицы, в начальный момент времени $t = t_0$ расположенной в точке $M = (x_0,\, y_0,\, z_0)$. Рассматриваемая плоскость параллельна оси Ox и повернута вокруг нее на угол ω относительно оси Oy. Декартова система координат в этой плоскости определяется следующим образом. Начало системы координат O' помещается в точку ортогональной проекции M в плоскость Oyz. Одна из координатных осей выбирается параллельно оси Ox и также обозначается x. Ось $O'l$ располагается ортогонально оси $O'x$ таким образом, чтобы система координат $O'xl$ имела правую ориентацию (см. рис. 1). В этой системе координат траектория частицы определяется решением следующей задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = U(t, x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

Из решения задачи (2.1) получаем зависимость $x = x(t, x_0)$, интегрируя которую находим зависимость $l = l(t)$:

$$l(t) = \int\limits_{t_0}^{t} V(t, x(t, x_0))\, dt. \tag{2.2}$$

Наконец, в исходной системе координат $Oxyz$ уравнения траектории частицы восстанавливаются в виде

$$x = x(t, x_0), \qquad y = y_0 + l(t)\cos\omega_0, \qquad z = z_0 + l(t)\sin\omega_0, \tag{2.3}$$

где $\omega_0 = \omega(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ — значение угла ω, вычисленное в соответствии с неявным соотношением (1.4) в начальный момент времени в точке M.

Магнитная силовая линия в момент времени $t = t_0$ определяется как интегральная кривая магнитного поля. Выражения, определяющие магнитную силовую линию, в момент времени $t = t_0$ проходящую через точку пространства $M = (x_0, y_0, z_0)$, имеют вид

$$y = y_0 + \cos\omega_0 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{N(t_0, s)}{H(t_0, s)}\, ds, \qquad z = z_0 + \sin\omega_0 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{N(t_0, s)}{H(t_0, s)}\, ds. \tag{2.4}$$

Вывод уравнений (2.4) аналогичен выводу соотношений (2.3). Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства движения плазмы, задаваемого решением вида* (1.2) (*см. рис. 1*):

1. Траектории и магнитные силовые линии являются плоскими кривыми и лежат в плоскостях, параллельных оси Ox и повернутых вокруг нее на угол ω относительно положительного направления оси Oy.

2. Все частицы, в некоторый момент времени $t = t_0$ принадлежащие плоскости $x = x_0$, описывают одинаковые траектории в плоскостях своего движения. Магнитные силовые линии, проходящие через точки плоскости $x = x_0$, также являются плоскими кривыми, принадлежащими тем же плоскостям, что и траектории соответствующих частиц плоскости $x = x_0$.

Следует отметить интересное свойство решений, описываемых данной подмоделью. Варьируя поле направлений в плоскости $x = x_0$, по одному и тому же шаблону траекторий и магнитных силовых линий можно построить бесконечное множество картин движения. Геометрические алгоритмы построения поля направлений, полученные в [1], позволяют модифицировать картину движения в соответствии с требуемыми характеристиками описываемого движения. Аналогичное свойство имеет место и в случае сферического вихря Овсянникова.

3. Область определения решения в трехмерном пространстве. Из рассмотренных построений следует алгоритм отыскания полной области определения полученного решения в трехмерном пространстве. В фиксированной плоскости $x = x_0$ функция ω имеет некоторую (во многих случаях конечную) область определения, ограниченную τ-эквидистантами к γ в случае $h \neq 0$, и кривой, описанной в [1], в случае $h = 0$. В обоих случаях поле направлений, определенное функцией ω в плоскости $x = x_0$, ортогонально границе области определения функции ω. Для отыскания границ области определения решения в трехмерном пространстве шаблон магнитной силовой линии необходимо присоединить к каждой точке границы области определения функции ω в плоскости $x = x_0$. В результате получаем канал, стенки которого "сотканы" из магнитных линий. В силу свойства "вмороженности" силовых линий стенки канала могут быть интерпретированы как непроницаемые бесконечно проводящие поршни. В случае стационарного решения стенки фиксированы, в нестационарном случае стенки расширяются или сжимаются в соответствии с поведением функции τ ($h \neq 0$) и функции φ ($h = 0$). В случае конечной области определения функции ω (эта область всегда может быть ограничена до конечной) каждое сечение полной области определения решения плоскостью, ортогональной оси Ox, конечно, следовательно в этой области кинетическая и магнитная энергии также конечны.

4. Пример стационарного решения. В качестве примера рассмотрим простейшее стационарное решение системы (1.3), задаваемое формулами

$$\begin{gathered} U = H_0^2 \operatorname{sh} x, \qquad V = H_0^2 \operatorname{th} x, \qquad \tau = \operatorname{ch} x, \\ H = H_0 \operatorname{sh} x, \qquad N = H_0 \operatorname{th} x, \qquad \rho = H_0^{-2}, \qquad S = S_0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

В этом решении (как и во всех стационарных решениях описываемого типа) скорость и вектор напряженности магнитного поля коллинеарны в каждой частице. Решение (4.1) представляет собой частный случай решения С. Чандрасекхара [6]. Линии тока и магнитные силовые линии совпадают и при $x_0 = 0$ и

$$l(x) = \operatorname{ch} x - 1 \tag{4.2}$$

задаются уравнениями (2.3). Линии тока являются участками цепной линии. Заметим, что решение (4.1) может быть непрерывно сопряжено с равномерным потоком вдоль оси Ox. Действительно, в сечении $x = 0$ все функции в (4.1) и их производные принимают значения, соответствующие равномерному потоку. Построим решение, сопрягающее равномерный поток и плоский вихрь Овсянникова (4.1) в сечении $x = 0$.

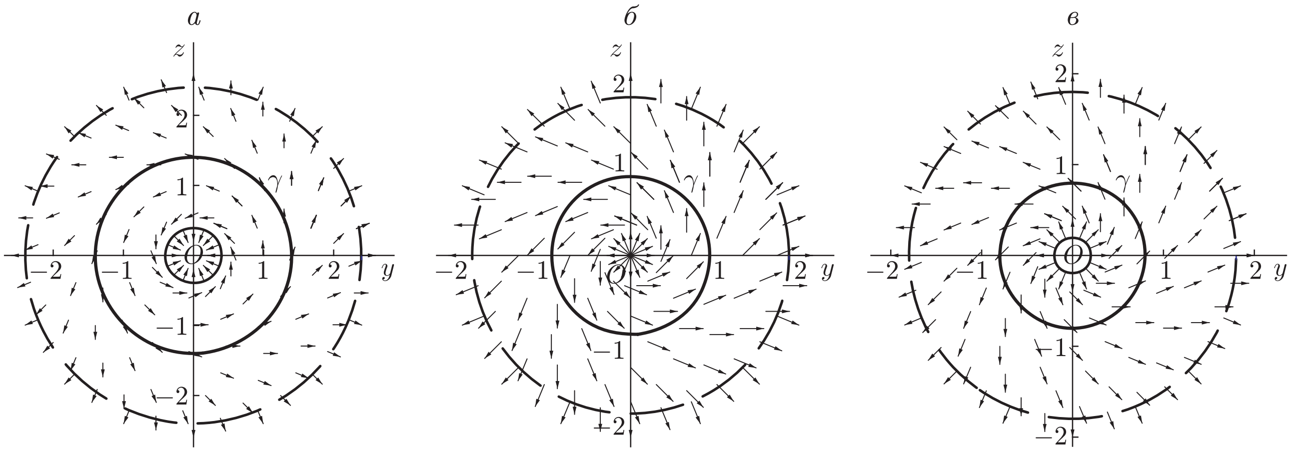

Рис. 2. Поле направлений, задаваемое функцией ω в соответствии с уравнением (1.4):
а — $R > \tau$; *б* — $R = \tau$; *в* — $R < \tau$

Шаблон линий тока и магнитных силовых линий представляет собой прямую, параллельную оси Ox при $x < 0$ и гладко переходящую в кривую (4.2) при $x \geqslant 0$. В уравнении (1.4) выберем функцию $F(y,z) = y^2 + z^2 - R^2$. При этом кривая γ: $F(y,z) = 0$ является окружностью. На рис. 2 показаны поля направлений, полученные для различных соотношений τ и R в соответствии с алгоритмом работы [1]. При $R > \tau$ поле направлений задается в круговой полосе определения в плоскости Oyz между двумя окружностями с радиусами $R \pm \tau$. На внутренней окружности $|\boldsymbol{x}| = R - \tau$ поле направлено к точке O. В случае $R = \tau$ внутренняя окружность превращается в точку O. При этом поле направлений в этой точке является неоднозначным. Наконец, при $R < \tau$ внутренняя окружность "выворачивается" и становится окружностью с радиусом $\tau - R$ и полем направлений, ориентированным внутрь полосы определения. Эти поля направлений порождают различные картины движения в трехмерном пространстве.

Шаблон линий тока, описанный выше, присоединяется к каждой точке плоскости Oyz внутри полосы определения в соответствии с полем направлений, показанным на рис. 2. В силу очевидной центральной симметрии поля направлений получаемая картина движения является осесимметричной. На рис. 3 показано осевое сечение области трехмерного пространства, занятого движением. В зависимости от соотношения между $\tau(0)$ и R возможны три различные картины движения. Каждая частица движется вдоль плоской кривой, однако ориентация кривых в пространстве зависит от выбранной частицы. Однородный поток в цилиндрическом канале с центральным телом при $x < 0$ меняется в сечении $x = 0$ на течение в криволинейном канале при $x > 0$, описываемом решением (4.1). Случаи, представленные на рис. 3,*а*–*в*, соответствуют полям направлений, показанным на рис. 2,*а*–*в*. Трехмерная визуализация движения при $R > \tau(0)$ представлена на рис. 4, где показаны фрагменты стенок канала и линии тока частиц. Видно, что каждая линия тока имеет одну и ту же форму плоской кривой. Ориентация линий тока определяется полем направлений на рис. 2,*а*, осевое сечение канала приведено на рис. 3,*а*.

5. Решения с однородной деформацией. Рассмотрим решения инвариантных подсистем (1.3), (1.5), в которых компонента скорости U линейно зависит от пространственной координаты x. Для уравнений магнитной гидродинамики (1.1) в предположении линейной зависимости всех компонент скорости от всех пространственных координат такие движения изучались в [7].

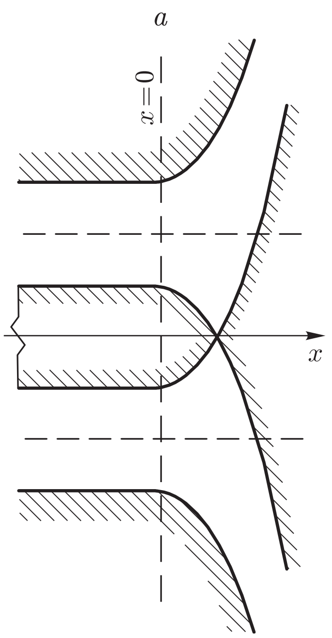

Рис. 3. Осевые сечения каналов, занятых течением газа:
а — $R > \tau(0)$; *б* — $R = \tau(0)$; *в* — $R < \tau(0)$

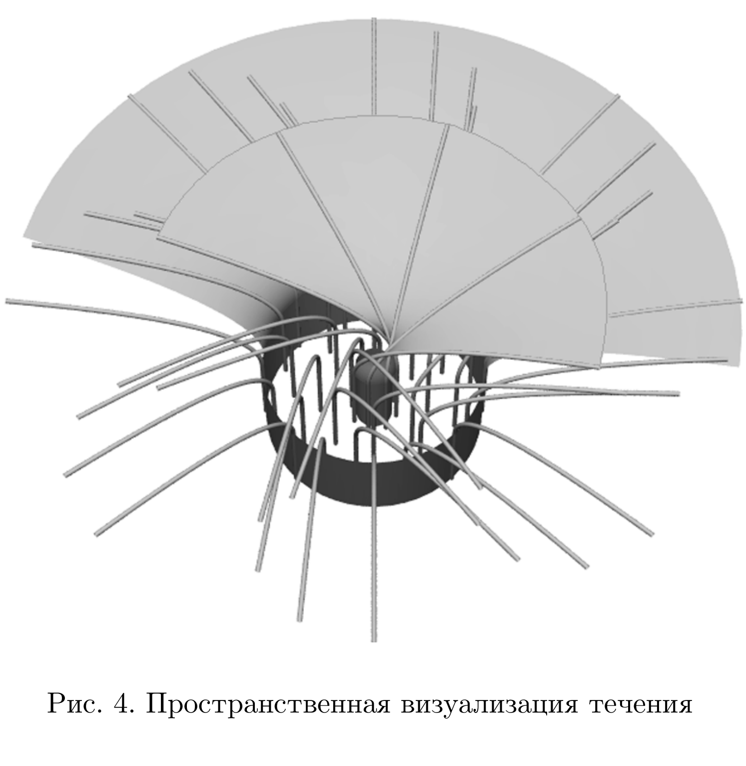

Рис. 4. Пространственная визуализация течения

Для удобства вместо (t, x) будем использовать лагранжевы координаты (t, ξ), где ξ удовлетворяет уравнениям

$$\xi_t + U\xi_x = 0, \qquad \xi(0, x) = x. \tag{5.1}$$

Введем функцию $M = \partial x/\partial \xi$. При переходе к лагранжевым координатам производные произвольной функции $f(t, x)$ пересчитываются следующим образом:

$$f_t + Uf_x \to f_t, \qquad f_x \to M^{-1} f_\xi.$$

Кроме того, по определению лагранжевой координаты имеем

$$U = x_t, \qquad U_x = M^{-1} M_t.$$

Сначала исследуем систему (1.5).

Произведя замену переменных в системе (1.5), получаем

$$\begin{gathered}
\rho_t + M^{-1}\rho M_t = 0, \qquad x_{tt} + \rho^{-1}M^{-1}(p_\xi + NN_\xi) = 0,\\
V_t - \rho^{-1}M^{-1}H_0N_\xi = 0, \qquad p_t + M^{-1}A(p,\rho)M_t = 0,\\
N_t + M^{-1}NM_t - H_0M^{-1}V_\xi = 0, \qquad \varphi_t = V, \qquad H_0\varphi_\xi = MN.
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Система (5.2) имеет два очевидных интеграла

$$\rho M = f(\xi), \qquad S = S(\xi) \tag{5.3}$$

(S — энтропия). С учетом (5.3) из системы (5.2) получаем

$$(MN)_t = H_0V_\xi, \qquad f(\xi)V_t = H_0N_\xi, \qquad x_{tt} + f(\xi)^{-1}(p_\xi + NN_\xi) = 0. \tag{5.4}$$

Из двух последних уравнений системы (5.2) V и N можно выразить как функции от φ:

$$V = \varphi_t, \qquad N = H_0M^{-1}\varphi_\xi. \tag{5.5}$$

Подставляя выражения (5.5) в первое уравнение (5.4), получаем тождество, т. е. первое уравнение (5.4) является условием совместности уравнений (5.5) относительно функции φ. Из второго соотношения (5.4) получаем линейное уравнение для φ:

$$f(\xi)\varphi_{tt} = H_0^2(M^{-1}\varphi_\xi)_\xi. \tag{5.6}$$

Сделаем следующие предположения: 1) газ является политропным, т. е. $p = S(\xi)\rho^\gamma$; 2) зависимость $x(\xi)$ является линейной, т. е.

$$x = M(t)\xi, \qquad M(0) = 1, \qquad U = \dot M(t)\xi. \tag{5.7}$$

Здесь и далее точка над символом обозначает производную по времени t, штрих — производную по ξ. При непрерывном движении сплошной среды функция M не может обращаться в нуль. Для определенности будем считать $M > 0$. В сделанных предположениях уравнения системы редуцируются к следующему ключевому соотношению:

$$\ddot M\xi + f(\xi)^{-1}\Big(\frac{(S(\xi)f(\xi)^\gamma)'}{M(t)^\gamma} + H_0^2\frac{\varphi_\xi\varphi_{\xi\xi}}{M(t)^2}\Big) = 0. \tag{5.8}$$

Для того чтобы разделить переменные в уравнении (5.8), предположим, что функция φ имеет вид

$$\varphi(t, \xi) = \alpha(t)\beta(\xi).$$

Из уравнения (5.6) получаем

$$f(\xi)M(t)\ddot\alpha(t)\beta(\xi) = H_0^2\alpha(t)\beta''(\xi). \tag{5.9}$$

Разделяя переменные в уравнении (5.9), имеем

$$\frac{M(t)\ddot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} = \frac{H_0^2\beta''(\xi)}{f(\xi)\beta(\xi)} = C_1, \tag{5.10}$$

где C_1 — произвольная константа. Далее, из уравнения (5.8) получаем

$$\ddot{M}\xi + f(\xi)^{-1}\Big(\frac{\big(S(\xi)f(\xi)^\gamma\big)'}{M(t)^\gamma} + H_0^2\frac{\alpha(t)^2\beta'(\xi)\beta''(\xi)}{M(t)^2}\Big) = 0. \tag{5.11}$$

Уравнение (5.11) имеет вид скалярного произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$, где

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{M}, M^{-\gamma}, H_0^2\alpha^2M^{-2}), \qquad \boldsymbol{b} = (\xi, (Sf^\gamma)'f^{-1}, \beta'\beta''f^{-1}).$$

В таком уравнении разделение переменных производится в соответствии с леммой Л. В. Овсянникова [8]. При этом единственным нетривиальным случаем ($M \ne \mathrm{const}$) является следующий случай:

$$\frac{(S(\xi)f(\xi)^\gamma)'}{f(\xi)} = C_2\xi, \qquad \frac{\beta'(\xi)\beta''(\xi)}{f(\xi)} = C_3\xi; \tag{5.12}$$

$$\ddot{M} + \frac{C_2}{M^\gamma} + H_0^2\,\frac{C_3\alpha^2}{M^2} = 0 \tag{5.13}$$

(C_2, C_3 — произвольные константы). Из второго уравнения (5.12) и второго уравнения (5.10) получаем

$$\beta'\beta'' = C_3\xi f, \qquad H_0^2\beta'' = C_1f\beta. \tag{5.14}$$

Деля первое уравнение (5.14) на второе, находим

$$\frac{\beta'}{H_0^2} = \frac{C_3\xi}{C_1\beta} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta^2 = \frac{C_3}{C_1}H_0^2\,\xi^2 + C_4 \tag{5.15}$$

(C_4 — произвольная константа). Из оставшегося соотношения (5.14) получаем

$$f(\xi) = \frac{H_0^2\beta''}{C_1\beta} = \frac{C_3C_4H_0^4}{(C_3H_0^2\,\xi^2 + C_1C_4)^2}. \tag{5.16}$$

В силу (5.3) и сделанного предположения о неотрицательности функции M из выражения (5.16) получаем ограничение $C_3C_4 > 0$. Первое уравнение (5.12) служит для определения неизвестной функции $S(\xi)$:

$$S(\xi) = f(\xi)^{-\gamma}\Big(S_0 + C_2\int \xi f(\xi)\,d\xi\Big).$$

Подставляя выражения для $S(\xi)$ и $\rho = fM^{-1}$ в уравнение состояния $p = S\rho^\gamma$, находим давление

$$p = \frac{1}{M^\gamma}\Big(p_0 - \frac{C_2C_4H_0^2}{2(C_3H_0^2\xi^2 + C_1C_4)}\Big).$$

Из (5.10), (5.13) определяем функции M и α, зависящие от t:

$$\ddot{M} = -\frac{C_2}{M^\gamma} - H_0^2\frac{C_3\alpha^2}{M^2}, \qquad \ddot{\alpha} = \frac{C_1\alpha}{M}. \tag{5.17}$$

Система (5.17) является замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений для функций M и α, которая будет исследована ниже.

Определим уравнения для траекторий частиц и магнитных силовых линий.

Из определения лагранжевой координаты ξ следует зависимость $x(t)$ вдоль траектории частицы:

$$x = x_0 M(t). \tag{5.18}$$

С учетом (2.2) и (5.5) выражение для координаты $l(t)$ принимает вид

$$l(t) = \int\limits_0^t V(s, x(s, x_0))\, ds = \int\limits_0^t \dot{\alpha}(s)\beta(x_0)\, ds = (\alpha(t) - \alpha(0))\beta(x_0). \tag{5.19}$$

В конечном виде траектория частицы в трехмерном пространстве восстанавливается по формулам (2.3). Для построения магнитных силовых линий в момент времени $t = t_0$ на данном решении необходимо вычислить интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{N(t_0, s)}{H(t_0, s)}\, ds = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{H_0\alpha(t)\beta'(sM^{-1})}{H_0 M(t)}\, ds = \alpha(t)(\beta(xM^{-1}) - \beta(x_0)). \tag{5.20}$$

Магнитные силовые линии определяются формулами (2.4). Таким образом, функции $M(t)$, $\alpha(t)$ задают в параметрическом виде траекторию частицы, а $\beta(\xi)$ — форму магнитных силовых линий.

Из уравнения (5.15) для функции β следует, что существенно различаются два случая: $C_1C_3 > 0$ и $C_1C_3 < 0$. В случае $C_1C_3 > 0$ уравнение (5.15) задает семейство гипербол на плоскости (ξ, β). Это означает, что область существования решения не имеет ограничений по оси Ox. В случае $C_1C_3 < 0$ уравнение (5.15) определяет семейство эллипсов, следовательно, решение определено только при $|\xi| < \sqrt{C_1C_4/(C_3H_0^2)}$. Второй случай будем считать нефизическим, поскольку на границах области определения решения плотность и давление обращаются в бесконечность. Далее будем полагать, что $C_1C_3 > 0$. Кроме того, чтобы функция β была определена и отлична от нуля при всех ξ, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $C_4 > 0$. Таким образом, должны выполняться следующие условия:

$$C_1 > 0, \qquad C_3 > 0, \qquad C_4 > 0, \qquad p_0 > C_2H_0^2/(2C_1). \tag{5.21}$$

Знак константы C_2 определяет зависимость давления p от лагранжевой координаты ξ. На бесконечности $\xi \to \infty$ давление зависит только от времени и равно $p_0M^{-\gamma}$. При $C_2 < 0$ давление в начале координат больше, чем на бесконечности, т. е. решение описывает разлет газа под действием внутреннего давления. При $C_2 > 0$ давление в начале координат меньше, чем на бесконечности, т. е. движение газа происходит под действием повышенного внешнего давления.

Вернемся к изучению системы (5.17). Поскольку растяжение позволяет определить функцию α с точностью до произвольного постоянного множителя, можно выбрать $C_3 = C_1(2H_0^2)^{-1}$. Тогда $\beta^2 = \xi^2/2 + C_4$. Магнитные силовые линии являются гиперболами. Динамическая система (5.17) принимает вид

$$\ddot{M} = -\frac{C_2}{M^\gamma} - \frac{C_1\alpha^2}{2M^2}, \qquad \ddot{\alpha} = \frac{C_1\alpha}{M}. \tag{5.22}$$

Систему (5.22) можно записать в виде уравнения Лагранжа с лагранжианом

$$L = \frac{\dot{M}^2 + \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{C_2}{(\gamma - 1)M^{\gamma-1}} + \frac{C_1\alpha^2}{2M}.$$

Для этой системы справедлив интеграл энергии

$$\frac{\dot{M}^2+\dot{\alpha}^2}{2}-\frac{C_2}{(\gamma-1)M^{\gamma-1}}-\frac{C_1\alpha^2}{2M}=b.$$

Введя обозначения производных

$$\dot{M}=r\cos\theta,\qquad \dot{\alpha}=r\sin\theta,$$

из интеграла энергии получаем выражение

$$r=\sqrt{2b+\frac{C_1\alpha^2}{M}+\frac{2C_2}{(\gamma-1)M^{\gamma-1}}}.$$

Тогда система (5.22) записывается в виде

$$r\dot{\theta}=\frac{C_1\alpha}{M}\cos\theta+\Big(\frac{C_2}{M^\gamma}+\frac{C_1\alpha^2}{2M^2}\Big)\sin\theta,\qquad \dot{M}=r\cos\theta,\qquad \dot{\alpha}=r\sin\theta. \tag{5.23}$$

Дальнейшее исследование системы (5.23) можно провести численно. Результаты проведенного исследования суммируются в следующей теореме.

Теорема 2. *Решение уравнений* (1.5) *с линейной зависимостью* $U(x)$ *задается формулами*

$$U=\frac{\dot{M}(t)}{M(t)}\,x,\qquad V=\dot{\alpha}(t)\beta(\xi),\qquad N=\frac{H_0\xi\alpha(t)}{2M(t)\beta(\xi)},\qquad \beta=\sqrt{\frac{\xi^2}{2}+C_4},\qquad \xi=\frac{x}{M(t)},$$

$$p=\frac{1}{M(t)^\gamma}\Big(p_0-\frac{C_2C_4H_0^2}{C_1(\xi^2+2C_4)}\Big),\qquad \rho=\frac{2C_4H_0^2}{C_1M(t)(\xi^2+2C_4)^2},\qquad \varphi=\alpha(t)\beta(\xi)$$

с произвольными константами C_i, p_0, *удовлетворяющими неравенствам* (5.21). *Функции* M, α *находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (5.23). *На таком решении магнитные силовые линии являются гиперболами и определяются по формулам* (2.4), (5.20). *Траектории частиц задаются уравнениями* (2.3), *зависимость* $l(t)$ *определена в* (5.19).

Для основного случая $h\neq 0$ исследование подмодели с линейной зависимостью $U(x)$ проводится аналогично. Используя вместо h функцию $\tau=1/h$, уравнения (1.3) запишем в лагранжевых координатах (5.1):

$$\tau(M\rho)_t+M\rho V=0; \tag{5.24}$$

$$x_{tt}+\rho^{-1}M^{-1}(p_\xi+NN_\xi)=0; \tag{5.25}$$

$$\rho M\tau V_t-H_0N_\xi=0; \tag{5.26}$$

$$M\tau p_t+\gamma p(\tau M_t+MV)=0; \tag{5.27}$$

$$\tau(MN)_t-H_0V_\xi+MNV=0; \tag{5.28}$$

$$\tau_t=V,\qquad H_0\tau_\xi=MN\tau. \tag{5.29}$$

Из (5.24), (5.27), а также из уравнения состояния $p=S\rho^\gamma$ следуют первые интегралы системы

$$\tau M\rho=f(\xi),\qquad S=S(\xi). \tag{5.30}$$

Уравнение (5.28) является условием совместности уравнений (5.29) для функции τ. Соотношения (5.29) позволяют выразить V, N через τ:

$$V=\tau_t,\qquad N=H_0M^{-1}(\ln|\tau|)_\xi. \tag{5.31}$$

Подставляя (5.30), (5.31) в (5.26), для τ получаем уравнение

$$f(\xi)\tau_{tt} = H_0^2(M^{-1}(\ln|\tau|)_\xi)_\xi. \tag{5.32}$$

Используем предположение о линейной зависимости $U(x)$, которое в лагранжевых координатах эквивалентно соотношениям (5.7), а функцию τ будем искать в виде

$$\tau = \alpha(t)\beta(\xi).$$

Из (5.32) следует

$$M(t)f(\xi)\ddot{\alpha}(t)\beta(\xi) = H_0^2(\ln|\beta(\xi)|)'' \tag{5.33}$$

(как и ранее, точка над символом обозначает дифференцирование соответствующей функции по t, штрих — дифференцирование по ξ). Проводя разделение переменных в (5.33), получаем

$$M(t)\ddot{\alpha}(t) = C_1, \qquad H_0^2(\ln|\beta(\xi)|)'' = C_1 f(\xi)\beta(\xi). \tag{5.34}$$

В силу сделанных предположений уравнение (5.25) имеет вид

$$\ddot{M}(t)\xi + \frac{\alpha(t)\beta(\xi)}{f(\xi)}\Big(\frac{1}{M^\gamma(t)\alpha^\gamma(t)}\Big(S(\xi)\,\frac{f^\gamma(\xi)}{\beta^\gamma(\xi)}\Big)' + \frac{H_0^2(\ln|\beta(\xi)|)'(\ln|\beta(\xi)|)''}{M^2(t)}\Big) = 0. \tag{5.35}$$

В уравнении (5.35) разделение переменных производится в соответствии с леммой Л. В. Овсянникова. Нетривиален ($M \neq \text{const}$) следующий случай:

$$\frac{\beta}{f}\Big(S\,\frac{f^\gamma}{\beta^\gamma}\Big)' = C_3\xi, \qquad \frac{\beta(\ln|\beta|)'(\ln|\beta|)''}{f} = C_3\xi; \tag{5.36}$$

$$\ddot{M} + \frac{C_2}{M^\gamma\alpha^{\gamma-1}} + \frac{H_0^2C_3\alpha}{M^2} = 0. \tag{5.37}$$

Из вторых уравнений (5.34), (5.36) следует

$$\frac{C_1f(\xi)\beta(\xi)}{H_0^2} = \frac{C_3\xi f(\xi)}{\beta'(\xi)} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta^2 = C_1^{-1}C_3H_0^2\xi^2 + C_4. \tag{5.38}$$

Как и в предыдущей модели, для того чтобы решение было физичным, необходимо выполнение неравенства $C_1C_3 > 0$. Функция f определяется в виде

$$f(\xi) = \frac{H_0^2(\ln|\beta(\xi)|)''}{C_1\beta(\xi)}.$$

Интегрируя первое уравнение (5.36) с учетом (5.38), получаем

$$S(\xi)\,\frac{f^\gamma(\xi)}{\beta^\gamma(\xi)} = \frac{C_2C_3H_0^4\xi^2}{2(C_1C_4 + C_3H_0^2\xi^2)^2} + C_5.$$

Тогда

$$p = M^{-\gamma}\alpha^{-\gamma}\Big(p_0 + \frac{C_2C_3H_0^4\xi^2}{2(C_1C_4 + C_3H_0^2\xi^2)^2}\Big),$$

для плотности имеем выражение

$$\rho = \frac{f(\xi)}{M(t)\alpha(t)\beta(\xi)} = M^{-1}\alpha^{-1}\,\frac{C_3H_0^4(C_1C_4 - C_3H_0^2\xi^2)}{(C_3H_0^2\xi^2 + C_1C_4)^3}, \tag{5.39}$$

наконец, для определения функций M, α из уравнений (5.34), (5.37) получаем

$$\ddot{M} = -\frac{C_2}{M^\gamma\alpha^{\gamma-1}} - \frac{H_0^2C_3\alpha}{M^2}, \qquad \ddot{\alpha} = \frac{C_1}{M}. \tag{5.40}$$

При $\xi^2 = C_1C_4C_3^{-1}H_0^{-2}$ выражение (5.39) для плотности обращается в нуль. Для того чтобы при данном значении ξ выражение для давления также обращалось в нуль, необходимо выполнение условия

$$p_0 = -\frac{C_2H_0^2}{8C_1C_4}.$$

При этом выражение для давления принимает вид

$$p = -\frac{C_2H_0^2(C_3H_0^2\xi^2 - C_1C_4)^2}{8M^\gamma\alpha^\gamma C_1C_4(C_3H_0^2\xi^2 + C_1C_4)^2}.$$

Знаки входящих в решение констант выберем таким образом, чтобы при $\xi = 0$ функции β, ρ, p были определены и положительны:

$$C_4 > 0, \qquad C_3 > 0, \qquad C_1C_2 < 0.$$

С учетом полученного ранее неравенства $C_1C_3 > 0$ имеем

$$C_1 > 0, \qquad C_2 < 0, \qquad C_3 > 0, \qquad C_4 > 0. \tag{5.41}$$

При выполнении неравенств (5.41) полученное решение описывает эволюцию плоского слоя идеальной плазмы, граничащего с вакуумом. Заметим, что и в этом решении траектории частиц и магнитные силовые линии определяются по формулам (5.18)–(5.20). Результатом данного исследования является

Теорема 3. *Для общей системы уравнения* (1.3) *решение с линейной зависимостью $U(t)$ определяется формулами*

$$U = \frac{\dot M(t)}{M(t)}\,x, \qquad V = \dot\alpha(t)\beta(\xi), \qquad N = \frac{C_3H_0^3\xi}{M(t)(C_3H_0^2\xi^2 + C_1C_4)},$$

$$p = -\frac{C_2H_0^2(C_3H_0^2\xi^2 - C_1C_4)^2}{8M(t)^\gamma\alpha(t)^\gamma C_1C_4(C_3H_0^2\xi^2 + C_1C_4)^2}, \qquad \rho = \frac{C_3H_0^4(C_1C_4 - C_3H_0^2\xi^2)}{M(t)\alpha(t)(C_3H_0^2\xi^2 + C_1C_4)^3},$$

$$\tau = \alpha(t)\beta(\xi), \qquad \beta = \sqrt{C_1^{-1}C_3H_0^2\xi^2 + C_4}, \qquad \xi = xM(t)^{-1}$$

с произвольными константами C_i, удовлетворяющими неравенствам (5.41). *Функции M, α находятся из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (5.40). *Магнитные силовые линии являются гиперболами и определяются по формулам* (2.4), (5.20). *Траектории частиц задаются уравнениями* (2.3), *в которых зависимость $l(t)$ определена в* (5.19).

6. Случай идеальной жидкости ($\boldsymbol{H} \equiv 0$, $\rho = 1$). Рассмотрим только случай $h \neq 0$, так как при $h = 0$ решение оказывается тривиальным. Инвариантная система (1.3) упрощается и принимает вид

$$\begin{gathered} \tau U_x + V = 0, \qquad U_t + UU_x + \rho^{-1}p_x = 0, \\ V_t + UV_x = 0, \qquad \tau_t + (\tau U)_x = 0. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Неинвариантная функция ω определяется неявным уравнением

$$F(\xi, y - \tau\cos\omega, z - \tau\sin\omega) = 0,$$

где ξ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению $\xi_t + U\xi_x = 0$. Ниже показано, что уравнения (6.1) могут быть полностью проинтегрированы в лагранжевых координатах (t, ξ). Для удобства перейдем к функции $\tau_1 = \tau - tV$, которая в силу (6.1) удовлетворяет уравнению $\tilde{D}\tau_1 = 0$. Таким образом, в лагранжевых координатах система (6.1) имеет два интеграла, которые целесообразно выбрать следующим образом:

$$V = V(\xi), \qquad \tau_1 = G(\xi)V(\xi)$$

(V, G — произвольные функции). Используя функцию $M = \partial x/\partial \xi$, первое уравнение (6.1) запишем в виде

$$V(\xi)(t + G(\xi))M^{-1}M_t + V(\xi) = 0.$$

В предположении $V(\xi) \neq 0$ это уравнение интегрируется с произвольной функцией F:

$$M = F(\xi)/(t + G(\xi)). \tag{6.2}$$

Для зависимостей $x = x(t, \xi)$ и $p = p(t, \xi)$ получаем систему

$$x_\xi = F(\xi)(t + G(\xi))^{-1}; \tag{6.3}$$

$$p_\xi = x_{tt}F(\xi)(t + G(\xi))^{-1}. \tag{6.4}$$

В силу произвольности выбора лагранжевой координаты можно считать $F(\xi) \equiv 1$. Интегрируя уравнение (6.3) по ξ с конкретной функцией G, находим зависимость $x(t, x_0)$ вдоль траектории частицы. Подставляя эту зависимость в уравнение (6.4) и интегрируя его, получаем выражение для давления p вдоль траекторий частиц. Заметим, что аддитивные функции времени, появляющиеся при интегрировании уравнений (6.4), (6.3), можно считать нулевыми в силу допускаемой уравнениями (6.1) бесконечномерной группы преобразований, обычной для уравнений идеальной жидкости.

Стационарное решение системы (6.1) дается явными формулами

$$U = U_0\,\mathrm{e}^{-mV_0x}, \qquad V = V_0, \qquad \tau = (mU_0)^{-1}\,\mathrm{e}^{mV_0x}, \qquad p = p_0 - (1/2)\rho U_0^2\,\mathrm{e}^{-2mV_0x},$$

где U_0, V_0, m, p_0, ρ — произвольные константы. Шаблон линии тока задается зависимостью $l(x)$ в виде

$$l(x) = (mU_0)^{-1}(\mathrm{e}^{mV_0x} - \mathrm{e}^{mV_0x_0}). \tag{6.5}$$

Экспоненциальные кривые (6.5), присоединенные к каждой точке на плоскости $x = x_0$ в соответствии с полем направлений, задаваемым неявным уравнением (1.4), формируют картину течения жидкости во всей области определения решения.

Заключение. Изучены свойства полученной в [1] подмодели уравнений идеальной магнитной гидродинамики, описывающей обобщение классического одномерного движения плазмы с плоскими волнами. Показано, что в движении плазмы, задаваемом подмоделью, траектории частиц и магнитные силовые линии являются плоскими кривыми. Траектория каждой частицы и магнитная силовая линия, проходящая через эту траекторию в каждый фиксированный момент времени, лежат в одной плоскости, параллельной оси Ox. В отличие от классического одномерного решения в данном решении плоскость движения каждой частицы имеет собственную ориентацию, которая задается некоторым дополнительным конечным соотношением. Функциональный произвол, имеющийся в соотношении, позволяет изменять геометрию получающегося движения в соответствии с решаемой задачей. Найдены точные решения подмодели, задающие движения с однородной деформацией вдоль оси Ox.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Головин С. В.** Плоский вихрь Овсянникова: уравнения подмодели // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 27–40.
2. **Овсянников Л. В.** Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.

3. **Golovin S. V.** Generalization of the one-dimensional ideal plasma flow with spherical waves // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 7579–7595.
4. **Куликовский А. Г.** Магнитная гидродинамика / А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. М.: Физматгиз, 1962.
5. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. **Chandrasekhar S.** On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1956. V. 42. P. 273–276.
7. **Куликовский А. Г.** О движениях с однородной деформацией в магнитной гидродинамике // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 5. С. 984–986.
8. **Головин С. В.** Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 3–14.

Поступила в редакцию 30/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 5/IX 2007 г.