УДК (539.3 + 532.5):629.12

ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ОКРУЖНЫЕ И РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

В. О. Шемелина

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: v.kulakova@outlook.com

В рамках теории длинных волн на мелкой воде проведены численно-аналитические исследования собственных и квазисобственных изгибно-гравитационных колебаний упругой плавающей на поверхности жидкости пластины. Для случаев ограниченного и неограниченного бассейнов исследованы зависимости собственных и квазисобственных частот от геометрических параметров области колебаний. Изучено влияние неровностей дна в форме кругового цилиндра или кругового усеченного конуса на собственные и квазисобственные частоты и функции.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные колебания, собственные колебания, гидроупругость, мелкая вода, круглая пластина.

DOI: 10.15372/PMTF20160319

Введение. Актуальность данной задачи обусловлена тем, что изгибно-гравитационные волновые процессы имеют место в ледовых покровах, а также учитываются при проектировании плавучих сооружений. Задачу о колебаниях упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости, можно рассматривать в качестве модели гигантской плавучей физической системы, например морской платформы различного назначения.

В настоящее время имеется большое количество исследований волновых процессов в упругих пластинах, однако квазисобственные колебания системы жидкость — пластина изучены недостаточно. Впервые деформации изгибно-гравитационных волн в упругих пластинах, плавающих на поверхности жидкости, рассмотрены в [1, 2]. Изучению колебаний жидкости в бассейне при наличии плавающей пластины посвящены работы [3–8]. В работе [9] задачи рассеяния решались с помощью частот рассеяния, которые в русскоязычной литературе называются квазисобственными частотами или полюсами резольвенты.

Формулировка задачи. Рассматривается упругая круглая пластина радиусом r_0, плавающая на поверхности жидкости в ограниченном бассейне радиусом r_2 и неограниченном бассейне глубиной H. Примем следующие предположения: граница пластины свободна от перерезывающих сил и изгибающего момента, жидкость является однородной, несжимаемой и невязкой, между пластиной и поверхностью контакта пространство отсутствует. В модели учитываются осадка и неровности дна бассейна.

Рассматриваются неоднородности дна бассейна следующих двух типов:

1) в форме кругового цилиндра под плавающей пластиной радиусом l, высотой d (рис. 1,a);

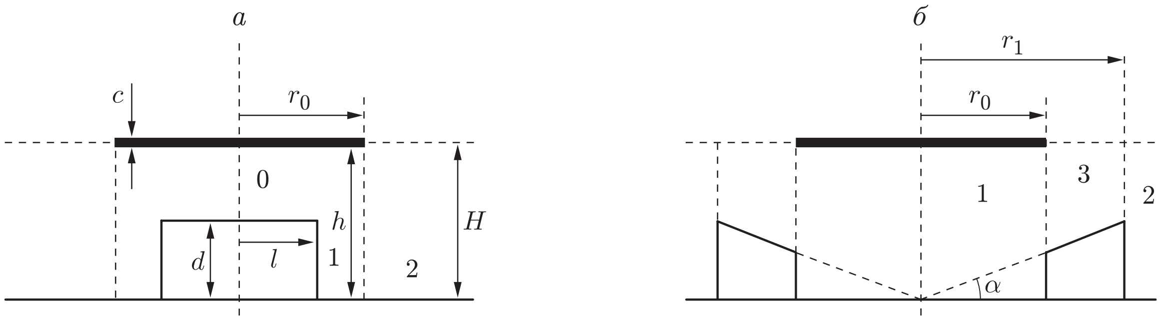

Рис. 1. Схема неоднородностей дна бассейна:
а — в форме кругового цилиндра, *б* — в форме кругового усеченного конуса; 0–3 — области жидкости ($0 — r < l$, $1 — l < r < r_0$, $2 — r_0 < r$ — в случае неоднородности первого типа, $1 — r < r_0$, $2 — r_1 < r$, $3 — r_0 < r < r_1$ — в случае неоднородности второго типа)

2) в форме кругового усеченного конуса вне пластины, при этом угол между образующей конуса и дном равен α (рис. 1,*б*).

В случае неоднородности в форме цилиндра область жидкости делится на следующие области: $0 — r < l$, $1 — l < r < r_0$, $2 — r_0 < r$; в случае неоднородности в форме усеченного конуса — на области: $1 — r < r_0$, $2 — r_1 < r$, $3 — r_0 < r < r_1$. Величины, относящиеся к указанным областям, имеют индексы, соответствующие номеру области: $h_0 = h - d$, $h_1 = h$, $h_2 = H$, $h_3 = H - r\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Система координат полагается полярной. Уравнение, связывающее вертикальное смещение волны W_j и потенциал скорости Φ_j, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} W_j + h_j \Delta\Phi_j = 0, \qquad j = 0, 1, 2; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_j + \frac{\partial}{\partial r} h_j \frac{\partial}{\partial r} \Phi_j + h_j \Delta\Phi_j = 0, \qquad j = 3. \tag{2}$$

Используя закон сохранения импульса, получаем уравнение для давления жидкости P_j в области пластины

$$P_j = -\rho g W_j - \rho \frac{\partial}{\partial t} \Phi_j, \qquad j = 0, 1, \tag{3}$$

где g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости.

Поскольку в области открытой воды на свободной поверхности ($z = 0$) давление жидкости равно нулю, имеем

$$W_j = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_j, \qquad j = 2, 3. \tag{4}$$

Статический прогиб пластины описывается уравнением $D\Delta^2 W = P$. Для перехода к динамическому уравнению пластины в дополнение к внешним нагрузкам введем силы инерции $\rho h_j\, \partial^2 W_j / \partial t^2$. Тогда динамическое условие под пластиной принимает вид [10]

$$D\Delta^2 W_j + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_j = P_j, \qquad j = 0, 1, \tag{5}$$

где $D = Ec^3/[12(1 - \nu^2)]$ — изгибающая жесткость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; c — толщина пластины; M — масса пластины на единицу поверхности.

В уравнении (5) учитывается только инерция поступательного движения и пренебрегается инерцией вращательного, поэтому уравнение (5) и его следствия справедливы в рамках модели теории длинных волн на мелкой воде.

Дифференцируя (5) по t и используя (1), (3), получаем линеаризованное основное уравнение в областях 0, 1:

$$D\Delta^3\Phi_j + M\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Delta\Phi_j + \rho g\Delta\Phi_j - \frac{\rho}{h_j}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Phi_j = 0, \qquad j = 0, 1. \tag{6}$$

Используя уравнения (1), (4), получаем основное уравнение для области чистой воды

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Phi_2 = gH\Delta\Phi_2,$$

используя уравнения (2), (4) — основное уравнение для области с неоднородным дном

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Phi_3 = g\,\frac{\partial}{\partial r}\,h_3\,\frac{\partial}{\partial r}\,\Phi_3 + gh_3\Delta\Phi_3.$$

С учетом равенства нулю перерезывающей силы V и изгибающего момента M_r запишем граничные условия для пластины на контуре ($r = r_0$). Выражение для изгибающего момента и перерезывающей силы в полярных координатах имеет вид [10]

$$M_r = -D\Big[\frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2} + \nu\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial W_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 W_1}{\partial\theta^2}\Big)\Big],$$

$$V = -D\,\frac{\partial}{\partial r}\,(\Delta W_1) - \frac{\partial}{\partial\theta}\Big[D(1-\nu)\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 W_1}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial W_1}{\partial\theta}\Big)\Big].$$

Используя выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы, граничные условия на контуре пластины представим в виде

$$\begin{aligned} L_1(W_1) &= \Big[\Delta - \frac{1-\nu}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big)\Big]W_1 = 0, \qquad r = r_0, \\ L_2(W_1) &= \Big[\frac{\partial}{\partial r}\,\Delta + \frac{1-\nu}{r^2}\Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big]W_1 = 0, \qquad r = r_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Продифференцировав по времени соотношения (7), с использованием (1) для потенциала скорости получаем условия

$$L_1(\Delta\Phi_1) = 0, \quad r = r_0, \qquad L_2(\Delta\Phi_1) = 0, \quad r = r_0.$$

В предположении, что колебания являются установившимися для всех областей $\Phi_j(r,\theta,t) = \varphi_j(r,\theta)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ (ω — собственная частота), получаем не зависящие от времени соотношения для φ_j, $j = 0, 1, 2, 3$.

В случае установившихся колебаний основное уравнение (6) в области пластины принимает вид

$$\Big[D\Delta^3 + \rho g\Big(1 - \frac{\omega^2 M}{\rho g}\Big)\Delta + \rho g K_j^2\Big]\varphi_j = 0, \qquad j = 0, 1, \tag{8}$$

где $K_j^2 = \omega^2/(gh_j)$, $j = 0, 1, 2, 3$.

В области с наклонным неоднородным дном для потенциала имеем

$$\Delta\varphi_3 + K_3^2\varphi_3 + \frac{\partial}{\partial r}\ln(h_3)\,\frac{\partial}{\partial r}\,\varphi_3 = 0. \tag{9}$$

В области открытой воды потенциал удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi_2 + K_2^2\varphi_2 = 0, \tag{10}$$

для которого в случае бассейна с бесконечным радиусом выполняется условие излучения

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\Big(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - iK_2\varphi_2\Big) = 0. \tag{11}$$

Области 0 и 1 имеют общую границу $r = l$, области 1 и 2, 1 и 3 — общую границу $r = r_0$, области 2 и 3 — общую границу $r = r_1$. Используя условия сохранения давления и массы на границах областей, условия сопряжения представим в следующем виде [11]:

— для неоднородностей первого типа

$$\begin{gathered}
\varphi_0\big|_{r=l-0} = \varphi_1\big|_{r=l+0}, \qquad (h-d)\,\frac{\partial}{\partial r}\,\varphi_0\big|_{r=l-0} = h\,\frac{\partial}{\partial r}\,\varphi_1\big|_{r=l+0},\\
\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2}\Big|_{r=l-0} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}\Big|_{r=l+0}, \qquad \frac{\partial^3\varphi_0}{\partial r^3}\Big|_{r=l-0} = \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial r^3}\Big|_{r=l+0},\\
\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial r^4}\Big|_{r=l-0} = \frac{\partial^4\varphi_1}{\partial r^4}\Big|_{r=l+0}, \qquad \frac{\partial^5\varphi_0}{\partial r^5}\Big|_{r=l-0} = \frac{\partial^5\varphi_1}{\partial r^5}\Big|_{r=l+0},\\
\varphi_1\big|_{r=r_0-0} = \varphi_2\big|_{r=r_0+0}, \qquad h\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=r_0-0} = H\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=r_0+0};
\end{gathered} \tag{12}$$

— для неоднородностей второго типа

$$\begin{gathered}
\varphi_1\big|_{r=r_0-0} = \varphi_3\big|_{r=r_0+0}, \qquad h\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=r_0-0} = (H - r\operatorname{tg}\alpha)\,\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\Big|_{r=r_0+0},\\
\varphi_3\big|_{r=r_1-0} = \varphi_2\big|_{r=r_1+0}, \qquad (H - r\operatorname{tg}\alpha)\,\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\Big|_{r=r_0-0} = H\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=r_0+0}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Граничные условия для потенциала скорости имеют вид

$$L_1(\Delta\varphi_1) = 0, \quad r = r_0, \qquad L_2(\Delta\varphi_1) = 0, \quad r = r_0. \tag{14}$$

Уравнения (8), (10) и условия (11), (14) выполняются для неоднородностей обоих типов, также в случае неоднородности первого типа выполняются условия (12), в случае неоднородности второго типа — уравнения (9), (13).

Аналитические исследования. Уравнение пластины (8) в областях 0, 1 представим следующим образом [12]:

$$\prod_{m=1}^{3}(\Delta - z_{jm})\varphi_j = 0, \qquad j = 0, 1.$$

Здесь z_{jm} — корни уравнения

$$Dz^3 + \rho g\Big(1 - \frac{\omega^2 M}{\rho g}\Big)z + \rho g K_j^2 = 0. \tag{15}$$

Учитывая неравенства $\rho g(1 - \omega^2 M/(\rho g)) > 0$, $\rho g K_j^2 > 0$, получаем, что один корень уравнения (15) является вещественным и отрицательным, другие два — комплексно-сопряженными с положительными вещественными частями.

Потенциал скорости $\varphi_j, j = 0, 1$ можно записать в виде

$$\varphi_j = \sum_{m=1}^{3}\varphi_{j,m}, \qquad j = 0, 1,$$

где $\varphi_{j,m}$ удовлетворяет уравнению $(\Delta - z_{jm})\varphi_{j,m} = 0$, $j = 0, 1$.

Представим решение в виде ряда Фурье

$$\varphi_{j,m}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{j,m}^{(n)}\, \mathrm{e}^{in\theta}, \qquad j = 0, 1, \tag{16}$$

где $\varphi_{j,m}^{(n)}(r)$ — неизвестные коэффициенты.

Подставляя представление (16) в уравнение $(\Delta - z_{jm})\varphi_{j,m} = 0$, $j = 0, 1$, получаем уравнение Бесселя

$$\xi^2 \frac{d^2\varphi_{j,m}^{(n)}}{d\xi^2} + \xi \frac{d\varphi_{j,m}^{(n)}}{d\xi} - (n^2 + \xi^2)\varphi_{j,m}^{(n)}, \qquad j = 0, 1 \tag{17}$$

($\xi = r\tau_{jm}$; $\tau_{jm} = \sqrt{z_{jm}}$).

Комплексный квадратный корень выбираем таким образом, чтобы он удовлетворял условию $\operatorname{Re} z_{jm} > 0$. Решение уравнения (17) представляет собой модифицированные функции Бесселя

$$\varphi_{j,m}^{(n)} = C_{jm}^{(n)} I_n(\tau_{jm}r) + B_{jm}^{(n)} K_n(\tau_{jm}r), \qquad j = 0, 1.$$

Поскольку функция $K_n(\tau_{jm}r)$ не ограничена в центре пластины ($r = 0$) и не имеет физического смысла, в случае неоднородности дна первого типа решение принимает вид $\varphi_{0,m}^{(n)} = C_{0m}^{(n)} I_n(\tau_{0m}r)$, в случае неоднородности дна второго типа — $\varphi_{1,m}^{(n)} = C_{1m}^{(n)} I_n(\tau_{1m}r)$.

В случае неоднородности первого типа потенциал записывается в виде

$$\begin{gathered} \varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{in\theta} \sum_{m=1}^{3} C_{0m}^{(n)} I_n(\tau_{0m}r), \\ \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{in\theta} \sum_{m=1}^{3} \big[C_{1m}^{(n)} I_n(\tau_{1m}r) + B_{1m}^{(n)} K_n(\tau_{1m}r)\big], \end{gathered} \tag{18}$$

в случае неоднородности второго типа — в виде

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{in\theta} \sum_{m=1}^{3} C_{1m}^{(n)} I_n(\tau_{1m}r). \tag{19}$$

(Вместо функций $\mathrm{e}^{in\theta}$ можно рассматривать функции $\cos(n\theta)$, так как в уравнение Бесселя входит параметр n^2. Следовательно, достаточно рассмотреть значения $n \geqslant 0$.) Решение уравнения (9) для потенциала φ_3 имеет вид

$$\varphi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_6^{(n)} J_{\sqrt{(2n)^2+1}}\Big(2\omega\sqrt{\frac{1}{g \operatorname{tg}\alpha}}\,\sqrt{r}\Big)\, \mathrm{e}^{in\theta} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} C_7^{(n)} Y_{\sqrt{(2n)^2+1}}\Big(2\omega\sqrt{\frac{1}{g \operatorname{tg}\alpha}}\,\sqrt{r}\Big)\, \mathrm{e}^{in\theta}. \tag{20}$$

Решение уравнения Гельмгольца (10) для потенциала φ_2 имеет вид

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \big[C_4^{(n)} J_n(K_2r) + C_5^{(n)} Y_n(K_2r)\big]\, \mathrm{e}^{in\theta}.$$

В случае бассейна неограниченного радиуса, т. е. при выполнении условия излучения, решение для области открытой воды принимает вид

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_4^{(n)} H_n^{(1)}(K_2r)\, \mathrm{e}^{in\theta}, \tag{21}$$

где $H_n^{(1)}(K_2r)$ — функция Ганкеля первого рода.

Таким образом, в случае неоднородности первого типа имеют место представления (18), (21), в случае неоднородности второго типа — уравнения (19)–(21). Константы, входящие в выражение для потенциала, находим из системы линейных алгебраических уравнений с учетом граничных условий. В матричном виде данная система является клеточно-диагональной:

$$\begin{pmatrix} (A^0) & & & \\ & \ddots & & \\ & & (A^n) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^n_{0m} \\ C^n_{1m} \\ C^n_k \\ B^n_{1m} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3, \quad k = 4, 5, 6, 7,$$

в которой каждая клетка для определенной моды имеет размерности 10×10 и 6×6 для неоднородностей первого и второго типов соответственно. Для существования нетривиальных решений необходимо выполнение условия

$$\det (A^{(n)}) = 0.$$

Численные исследования. Для классификации мод изгибно-гравитационных колебаний используется двухиндексная система обозначений (s, n), где индекс s обозначает номер решения (гармоники), индекс n — номер моды.

Расчеты проводились при следующих значениях: $H-h = 0{,}09$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2, $H = 1$ м, $\rho_{zg} = 1000$ кг/м^3, $\rho_{pl} = 917$ кг/м^3, $E = 9{,}5$ ГПа, $\nu = 0{,}3$, $c = 0{,}1$ м ($H - h$ — осадка пластины; H — толщина слоя жидкости; ρ_{zg} — плотность жидкости; ρ_{pl} — плотность пластины; E — модуль Юнга для льда; ν — коэффициент Пуассона для льда; c — толщина пластины) [13].

Зависимость собственных частот от радиуса бассейна. В табл. 1 приведены значения собственных частот при различных значениях радиуса r_2 ограниченного бассейна при неоднородности первого типа высотой $h = 0$. Собственные частоты плескания вычислялись по формуле $\omega = K\sqrt{gH}$ [14], где $Kr_2/\pi = 1{,}2197$ при $n = 0$, $Kr_2/\pi = 0{,}586$ при $n = 1$.

Из табл. 1 следует, что при увеличении радиуса бассейна собственные частоты уменьшаются и стремятся к собственным частотам плескания ограниченного бассейна. В случае бассейна бесконечного радиуса и пластины радиусом $r_0/H = 5$ квазисобственная частота при $s = 1$, $n = 0$ равна $\omega = 2{,}6316 - 0{,}4503i$, при $s = 1$, $n = 1$ — $\omega = 2{,}6120 - 0{,}300i$.

Таблица 1

Значения собственных частот ω при различных расстояниях между границами пластины и стенками бассейна для радиальной моды при $s = 1$, $n = 0$; $s = 1$, $n = 1$

r_2/H	ω, с$^{-1}$					
	$s = 1$, $n = 0$			$s = 1$, $n = 1$		
	Данные работы [14]	$r_0 < r_2$, $r_0/H = 5$	$r_0 = r_2$	Данные работы [14]	$r_0 < r_2$, $r_0/H = 5$	$r_0 = r_2$
5	2,3991	1,9243	1,9243	1,1526	1,0822	1,0822
10	1,1995	1,1458	1,1211	0,5763	0,5641	0,5516
20	0,5997	0,5963	0,5890	0,2881	0,2614	0,2576
30	0,3998	0,3993	0,3966	0,1921	0,1891	0,1879
40	0,2998	0,2997	0,2985	0,1440	0,1415	0,1408

Таблица 2

Значения собственных частот ω при радиусе пластины $r_0/H = 5$, радиусе бассейна $r_2/H = 10$ и различной толщине пластины c/H для мод с индексами $s = 1$, $n = 0$ и $s = 1$, $n = 1$

c/H	ω, с$^{-1}$	
	$s = 1$, $n = 0$	$s = 1$, $n = 1$
0,10	1,1458	0,5641
0,09	1,1472	0,5650
0,08	1,1489	0,5658
0,07	1,1523	0,5671
0,06	1,1611	0,5683
0,05	1,1695	0,5689
0,04	1,1739	0,5698
0,03	1,1811	0,5712
0,02	1,1898	0,5738
0,01	1,1935	0,5751

Таблица 3

Значения собственных частот ω при радиусе пластины $r_0/H = 5$, радиусе ограниченного бассейна $r_2/H = 10$ и различных геометрических размерах неоднородности дна первого типа для моды $s = 1$, $n = 0$

d	ω, с$^{-1}$		
	$l = r_0/2$	$l = 2r_0/3$	$l = r_0$
$h/2$	0,9537	0,7258	0,6532
0	1,1458	1,1458	1,1458
$-h/2$	2,4237	2,3181	2,2638

В табл. 2 приведены значения собственных частот при радиусе пластины $r_0/H = 5$, радиусе бассейна $r_2/H = 10$ и различной толщине пластины c/H для мод с индексами $s = 1$, $n = 0$ и $s = 1$, $n = 1$.

Из табл. 2 следует, что при уменьшении жесткости пластины собственные частоты колебания системы пластина — жидкость стремятся к собственным частотам плескания.

Зависимость собственных и квазисобственных частот от геометрических размеров неоднородности дна. В табл. 3 приведены значения собственных частот при различных геометрических размерах неоднородности дна первого типа.

Заметим, что при увеличении высоты и радиуса неоднородности собственные частоты уменьшаются.

Формы колебаний. При модах низкой частоты амплитуды изгибно-гравитационных колебаний больше, чем при модах более высокой частоты [15], поэтому рассмотрим влияние на изгибно-гравитационные колебания первых мод.

На рис. 2 показаны формы деформированной поверхности пластины для бассейна бесконечного радиуса при различных значениях квазисобственной частоты для мод с индексами $s = 1$, $n = 0$; $s = 2$, $n = 0$; $s = 3$, $n = 0$. Видно, что при увеличении номера моды увеличивается количество точек перегиба.

На рис. 3 приведено распределение изгибающего момента по радиусу пластины для мод с различными индексами. Видно, что при увеличении номера решения (гармоники) увеличивается количество точек перегиба.

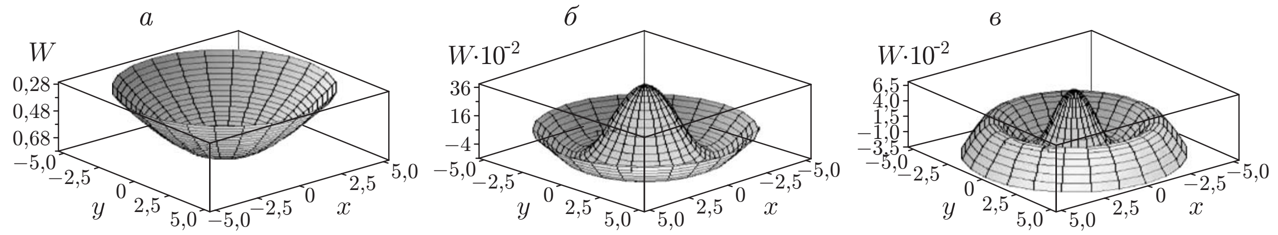

Рис. 2. Формы изгибно-гравитационных колебаний пластины радиусом $r_0/H = 5$ для бассейна бесконечного радиуса при различных значениях квазисобственной частоты и модах с различными индексами:
а — $\omega = 2{,}6316 - 0{,}4503i$, $s = 1$, $n = 0$; *б* — $\omega = 4{,}2651 - 0{,}3223i$, $s = 2$, $n = 0$; *в* — $\omega = 6{,}1918 - 0{,}1824i$, $s = 3$, $n = 0$

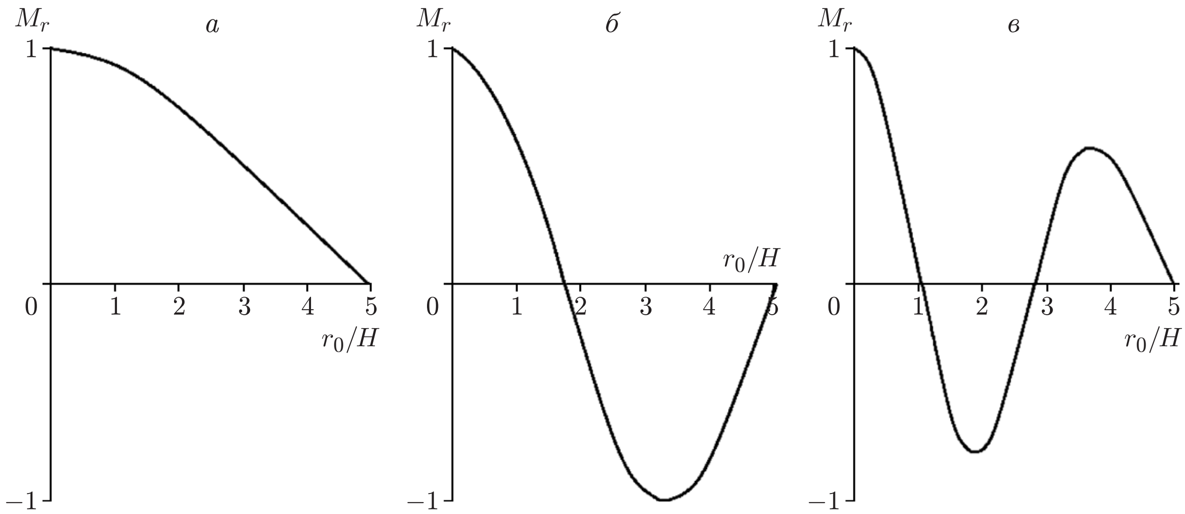

Рис. 3. Распределение изгибающего момента по радиусу пластины для мод с различными индексами:
а — $s = 1$, $n = 0$, *б* — $s = 2$, $n = 0$, *в* — $s = 3$, $n = 0$

На рис. 4, 5 приведены симметричные формы изгибно-гравитационных колебаний пластины при наличии неоднородности дна.

Заключение. Разработана методика численно-аналитических исследований собственных и квазисобственных изгибно-гравитационных колебаний плавающей упругой пластины в бассейнах с осевой симметрией в рамках линейной теории в приближении длинных волн на мелкой воде. Исследованы зависимости собственных частот от размеров бассейна и радиуса пластины. Показано, что собственные частоты уменьшаются при увеличении радиусов бассейна и пластины. В случае если размеры пластины не меняются, при увеличении радиуса бассейна собственные частоты стремятся к собственным частотам плескания ограниченного бассейна. Проведены исследования зависимости собственных частот от геометрических размеров неоднородности дна. Показано, что при увеличении высоты неровности дна собственные частоты уменьшаются. С помощью разработанных численно-аналитических методов исследована зависимость от геометрических параметров задачи собственных и квазисобственных изгибно-гравитационных колебаний для первых мод. Показано, что при увеличении номера решения (гармоники) и номера моды увеличивается количество точек перегиба.

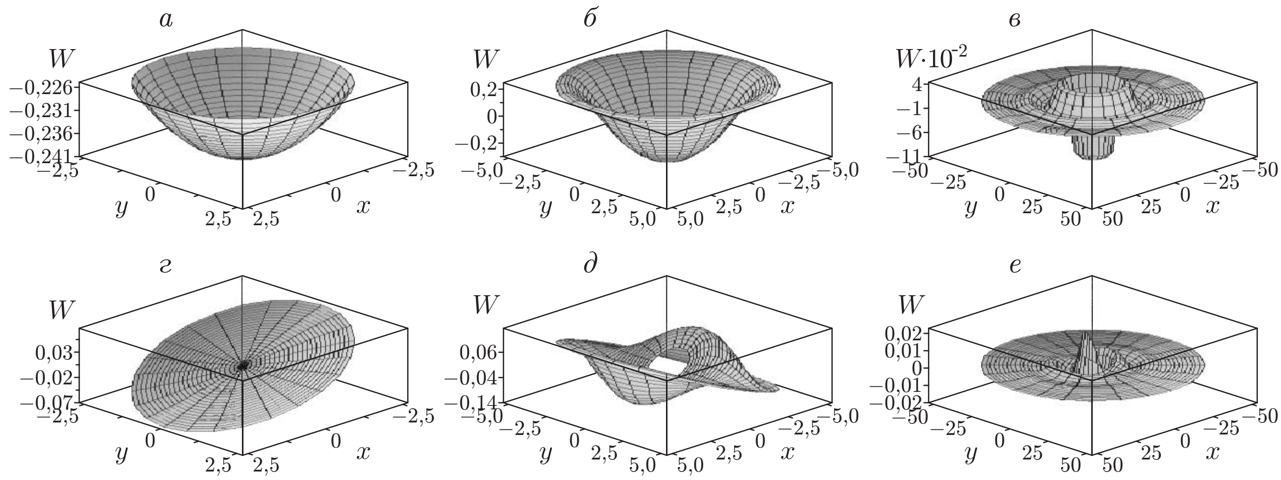

Рис. 4. Симметричные формы изгибно-гравитационных колебаний пластины для случая неоднородности дна первого типа при $d = h/2$, $l = r_0/2$ и различных значениях квазисобственной частоты и номерах моды:
а–*в* — $\omega = 0{,}8916 - 0{,}4202i$, $s = 1$, $n = 0$; *г*–*е* — $\omega = 0{,}7251 - 0{,}3404i$, $s = 1$, $n = 1$; *а, г* — область 0, *б, д* — область 1, *в, е* — область 2

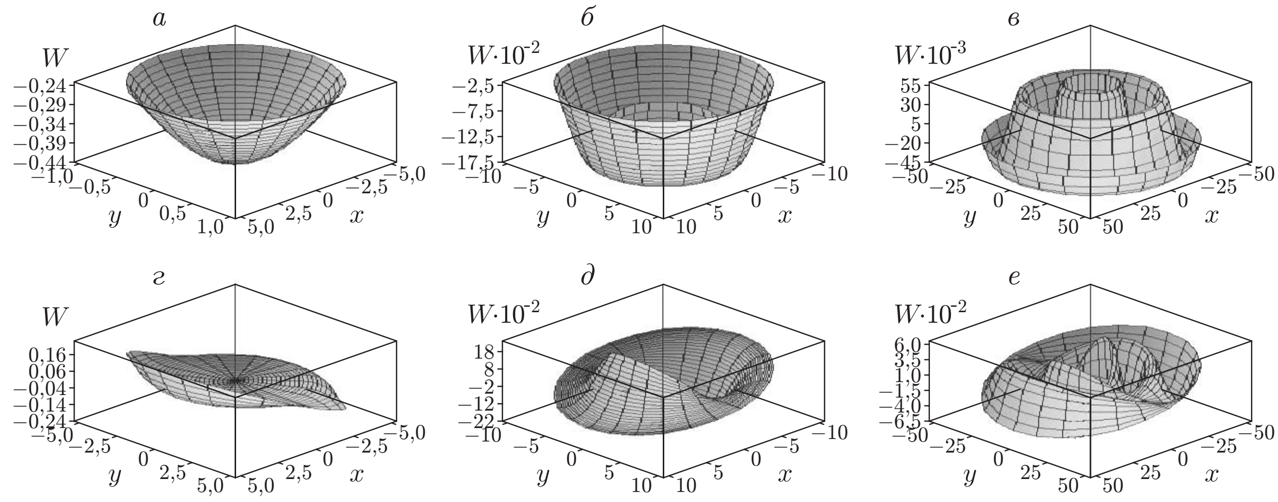

Рис. 5. Симметричные формы изгибно-гравитационных колебаний пластины для случая неоднородности дна второго типа при $r_0/h = 2{,}5$, $r_1/h = 5$, $\alpha = 10^\circ$ и различных значениях квазисобственной частоты и номерах моды:
а–*в* — $\omega = 0{,}5237 + 0{,}3502i$, $s = 1$, $n = 0$; *г*–*е* — $\omega = 0{,}4704 + 0{,}2115i$, $s = 1$, $n = 1$; *а, г* — область 1, *б, д* — область 3, *в, е* — область 2

Автор выражает благодарность С. В. Сухинину, И. В. Стуровой, В. П. Рябченко, Л. А. Ткачевой, В. С. Юрковскому за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красильников В. Н.** О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 26, вып. 4. С. 764–768.
2. **Красильников В. Н.** О возбуждении изгибно-гравитационных волн // Акуст. журн. 1962. Т. 8, вып. 1. С. 133–136.
3. **Ткачева Л. А.** Собственные колебания упругой платформы, плавающей на мелководье // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 173–181.
4. **Стурова И. В.** Действие нестационарной внешней нагрузки на упругую круглую пластину, плавающую на мелководье // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 3. С. 453–463.
5. **Хабахпашева Т. И.** Связь гидродинамических и упругих параметров при дифракции поверхностных волн на плавающей пластине // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 4. С. 101–110.
6. **Ткачева Л. А.** Воздействие периодической нагрузки на плавающую упругую пластину // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 2. С. 132–146.
7. **Коробкин А. А., Хабахпашева Т. И.** Построение точных решений в задаче о плавающей пластине // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, № 2. С. 321–328.
8. **Стурова И. В.** Влияние топографии дна на нестационарное поведение упругой пластины, плавающей на мелководье // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72, № 4. С. 588–600.
9. **Meylan M. H.** An application of scattering frequencies to hydroelasticity // Intern. J. Offshore Polar Engng. 2001. V. 3. P. 385–391.
10. **Тимошенко С. П.** Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Либрикон, 2009.
11. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде / Пер. с англ. Под ред. М. А. Лаврентьева, Н. Н. Моисеева. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
12. **Zilman G., Miloh T.** Hydroelastic buoyant circular plate in shallow water: a closed form solution // Appl. Ocean Res. 2000. V. 22. P. 191–198.
13. **Богородский В. В.** Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии / В. В. Богородский, В. П. Гаврилко. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
14. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.: Гостехтеоретиздат, 1947.
15. **Montiel F.** Numerical and experimental analysis of water wave scattering by floating elastic plates: Ph. D. thesis. Otago: Univ. Otago, 2012.

Поступила в редакцию 16/V 2014 г.,
в окончательном варианте — 6/IV 2015 г.