УДК 532.516/532.526.2

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

О. А. Фроловская

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрены автомодельные решения нестационарного диффузионно-динамического пограничного слоя, возникающего вблизи вертикальной стенки при больших числах Шмидта, и динамического пограничного слоя, сопрягающегося на внутренней границе с диффузионно-динамическим слоем. Показано, что в динамическом пограничном слое в области течения возникает зона противотока.

Введение. Для описания свободной конвекции вязкой жидкости вблизи вертикальной стенки и переноса примеси применяются классическая модель Обербека — Буссинеска и модель микроконвекции. Известно, что при использовании модели Обербека — Буссинеска при больших числах Рейнольдса можно выделить пограничный слой и из решений задачи в этом случае получить интегральные характеристики течения (числа Нуссельта). При микроконвекции числа Рейнольдса, как правило, невелики. В работе [1] предложен подход, позволяющий выделить диффузионно-динамический слой и в случае микроконвекции, когда модель Обербека — Буссинеска неприменима. В обеих моделях выделен особый диффузионно-динамический пограничный слой, если числа Шмидта (Прандтля) велики. При этом на число Рейнольдса не накладывалось никаких ограничений. В этих пограничных слоях оказались существенными вязкие силы и силы плавучести, а силы инерции пренебрежимо малы. Вне диффузионно-динамического пограничного слоя структура поля скоростей зависит от числа Рейнольдса. Если оно велико, то в области движения имеется еще один чисто динамический слой с большей асимптотической толщиной, сопрягающийся на внутренней границе с диффузионно-динамическим слоем, а на внешней — с областью состояния покоя.

В [1] сформулированы уравнения стационарного диффузионно-динамического пограничного слоя, построены их автомодельные решения и рассмотрены начальные асимптотики. Наиболее полные результаты исследования свободно-конвективных течений приведены в [2, 3].

Нестационарные пограничные слои. Рассмотрим задачу определения компонент u, v вектора скорости $\boldsymbol{v}$, концентрации c и отклонения от гидростатического давления p в области $y > 0$, ограниченной бесконечной вертикальной стенкой $\{y = 0\}$. Сила тяжести направлена по оси Ox, в координатах (x, y) ускорение свободного падения имеет вид $\boldsymbol{g} = (-g, 0)$. Считаем, что плотность расплава ρ линейно зависит от концентрации: $\rho = \rho_0[1 + \beta(c - c_\infty)]$, где ρ_0, c_∞ — средние плотность и концентрация раствора; $\beta = (1/\rho_0)(d\rho/dc) = \mathrm{const}$ (для определенности полагаем $\beta > 0$).

В случае больших чисел Шмидта $\mathrm{Sc} = \nu/D$ вблизи вертикальной стенки при тех же допущениях, что и в [1], можно выделить нестационарный диффузионно-динамический

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00782) и Совета поддержки ведущих научных школ (код проекта 00-15-96162).

слой. Уравнения пограничного слоя для модели Буссинеска имеют вид

$$
\begin{gathered}
\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g\beta(c-c_\infty),\qquad \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p}{\partial y}=\nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\
\frac{\partial c}{\partial t}+u\,\frac{\partial c}{\partial x}+v\,\frac{\partial c}{\partial y}=D\,\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Краевые условия для скорости задаются в виде

$$
u\big|_{y=0}=v\big|_{y=0}=0,\qquad u\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}u_\infty(t,x).
\tag{2}
$$

Для концентрации ставятся условия первого рода

$$
c\big|_{t=0}=c_\infty,\qquad c\big|_{y=0}=f(t,x),\qquad c\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}c_\infty
\tag{3}
$$

или условия второго рода

$$
c\big|_{t=0}=c_\infty,\qquad \frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{y=0}=h(t,x),\qquad c\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}c_\infty,
\tag{4}
$$

где $c_\infty=\mathrm{const}$; $f(t,x)$, $h(t,x)$ — заданные функции; $u_\infty(t,x)$ определяется в процессе решения задачи.

Задача (1)–(3) (или (1), (2), (4)) описывает движение в тонком диффузионно-динамическом слое толщиной порядка $(\mathrm{ScRe}^2)^{-1/4}$, вне слоя $c\approx c_\infty$. В этом слое силы плавучести и вязкие силы одного порядка, а силы инерции и продольный градиент давления по сравнению с ними пренебрежимо малы. В отличие от случая классического пограничного слоя [4] внешнее представление скорости определяется в процессе решения, а не из условия сращивания с внешним решением:

$$
u=v=0,\qquad p=0,\qquad c=c_\infty.
\tag{5}
$$

Компоненты вектора скорости и концентрации находятся независимо от давления, которое определяется интегрированием второго уравнения (1) по y от y до ∞ с учетом уравнения неразрывности:

$$
p(t,x,y)=p_\infty(t,x)+\rho_0\nu\Big(\frac{\partial u_\infty}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big),
\tag{6}
$$

где $p_\infty(t,x)$ — давление на внешней границе пограничного слоя.

Задача для диффузионно-динамического пограничного слоя при микроконвекции состоит в нахождении концентрации c, вектора модифицированной скорости $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+\beta D\nabla c$ и модифицированного давления $q=p/\rho_*-gx+\beta(\nu-D)D\Delta c$, где $\rho=\rho_*(1-\beta(c-c_\infty))^{-1}$, удовлетворяющих начально-краевой задаче [1]

$$
\begin{gathered}
\nu(1-\beta(c-c_\infty))\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}=g\beta(c-c_\infty),\quad \frac{\partial q}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2},\quad \frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}=0,\\
\frac{\partial c}{\partial t}+w_1\,\frac{\partial c}{\partial x}+w_2\,\frac{\partial c}{\partial y}-\beta D\Big(\frac{\partial c}{\partial y}\Big)^2=D(1-\beta(c-c_\infty))\frac{\partial^2 c}{\partial y^2},\\
w_1\big|_{y=0}=\beta D\,\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{y=0},\qquad w_2\big|_{y=0}=\beta D\frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{y=0},\qquad w_1\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}w_\infty(t,x)<\infty,\\
c\big|_{t=0}=c_\infty,\qquad c\big|_{y=0}=r(t,x),\qquad c\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}c_\infty.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь w_1, w_2 — компоненты вектора скорости $\boldsymbol{w}$; $r(t,x)$ — заданная функция; $w_\infty(t,x)$ определяется в процессе решения задачи. Здесь также можно задавать для концентрации условия второго рода.

Поскольку в общем случае $u_\infty \neq 0$ ($w_\infty \neq 0$), решение задачи (1)–(3) (или (7)) нельзя срастить с внешним решением (5). Для компенсации этой невязки, если $\mathrm{Sc}/\mathrm{Re}^2 \to 0$, в области движения можно выделить, как это сделано в [1], еще одну асимптотику задачи, которая описывает движение в области с асимптотической толщиной, большей толщины рассмотренного выше пограничного слоя. В данном случае справедлива гипотеза Прандтля о равенстве порядков вязких сил и сил инерции. Движение в этом слое толщиной порядка $(\mathrm{Sc}/\mathrm{Re}^2)^{1/4}$ описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

В начальный момент времени

$$u\big|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Из условий сращивания получаем граничные условия для продольной компоненты скорости u

$$u\big|_{y=0} = u_\infty(t,x), \qquad u \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{10}$$

Граничное условие для поперечной компоненты скорости v задается в виде

$$v\big|_{y=0} = 0. \tag{11}$$

Задача для динамического слоя отличается от классической тем, что значение продольной скорости задается на внутренней, а не на внешней границе. Давление в задаче можно считать нулевым, поскольку из второго уравнения (8) следует, что давление p такое же, как при $y \to \infty$, где $p \equiv 0$ (состояние покоя, давление равно гидростатическому). Поэтому в формуле (6) в этом случае $p_\infty \equiv 0$.

Автомодельные решения. Если заданы условия первого рода, то можно искать автомодельные решения задачи (1)–(3) при $f(t,x) = c_\infty - \nu x t^{-2}/(g\beta D)$. Решение рассматриваемой задачи будем искать в виде $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, $c - c_\infty = (c_\infty - f(t,x))(C(\xi) - 1)$, где функция тока

$$\psi = \sqrt{D}\,x t^{-1/2}\Psi(\xi), \qquad \xi = y t^{-1/2}/\sqrt{D}.$$

Тогда уравнения (1) примут вид

$$\Psi''' = C - 1, \qquad C'' = (\Psi' - 2)(C - 1) - (\Psi + \xi/2)C'. \tag{12}$$

Из условий (2), (3) следует

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = 0, \quad C(0) = 0, \quad \lim_{\xi\to\infty} \Psi'(\xi) = U_\infty = \mathrm{const} < \infty, \quad \lim_{\xi\to\infty} C(\xi) = 1. \tag{13}$$

Начальные условия здесь не ставятся. Характерный профиль концентрации приведен на рис. 1.

Для внешнего представления скорости имеем

$$u_\infty(x) = U_\infty x t^{-1} \approx 0{,}975 x t^{-1}.$$

Для характеристики массообмена между растущей пленкой и раствором введем общее и местное числа Нуссельта:

$$\mathrm{Nu} = \int\limits_0^l \frac{1}{c_\infty - c_\omega}\,\frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{y=0} dx, \qquad \mathrm{Nu}_x = \frac{x}{c_\infty - c_\omega}\,\frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{y=0},$$

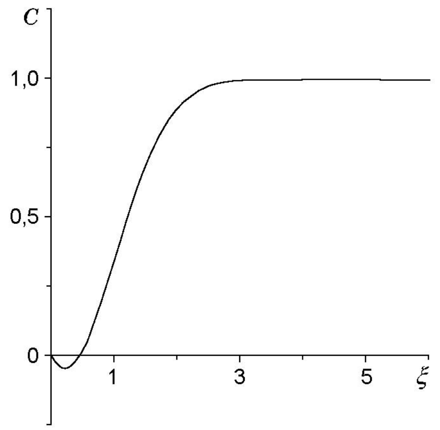

Рис. 1

где c_ω — значение концентрации на стенке $\{y = 0\}$. Для рассматриваемых решений формулы для определения чисел Нуссельта принимают вид

$$\mathrm{Nu} = \frac{lt^{-1/2}}{\sqrt{D}}\,|C'(0)| \approx 0{,}434\,\frac{lt^{-1/2}}{\sqrt{D}}, \qquad \mathrm{Nu}_x = \frac{xt^{-1/2}}{\sqrt{D}}\,|C'(0)| \approx 0{,}434\,\frac{xt^{-1/2}}{\sqrt{D}}.$$

Определим толщину диффузионно-динамического слоя. Для оценки толщины пограничного слоя в классической теории используется так называемая толщина вытеснения [4]. В данном случае пограничный слой характеризуется тем, что в нем концентрация c отличается от средней, а вне слоя $c \approx c_\infty$. Аналог толщины вытеснения δ_c^* определим равенством

$$\delta_c^*(c_\infty - c_\omega) = \int\limits_0^\infty [c_\infty - c(t, x, y)]\, dy.$$

После вычислений для автомодельных решений получим

$$\delta_c^* = \sqrt{Dt} \int\limits_0^\infty [1 - C(\xi)]\, d\xi \approx 1{,}276\sqrt{Dt}.$$

В случае задания условия второго рода для концентрации на стенке автомодельное решение задачи (1), (2), (4) можно построить, если

$$h(t, x) = q\nu x t^{-5/2}/(g\beta D\sqrt{D}) \qquad (q = \mathrm{const} \geqslant 0).$$

Тогда решение ищем в том же виде, что и при решении задачи первого рода. При этом уравнения (12) и граничные условия (13) сохраняют вид, за исключением условия для концентрации на стенке: в (13) условие $C(0) = 0$ заменяется на $C'(0) = q$. Концентрация на стенке в зависимости от величины теплового потока (при $0 < q < 1$) изменяется по закону

$$c_\infty - c\big|_{y=0} = \nu x t^{-2}(1 - C(0))/(g\beta D),$$

где $1 - C(0) = 0{,}139q^3 - 0{,}485q^2 + 1{,}896q + 2{,}132$.

Задача (7) не допускает автомодельного решения.

Решение задачи (8)–(11) ищем в виде $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, где функция тока ψ имеет вид

$$\psi = \sqrt{\nu}\, x t^{-1/2}\Psi(\eta), \qquad \eta = y t^{-1/2}/\sqrt{\nu}.$$

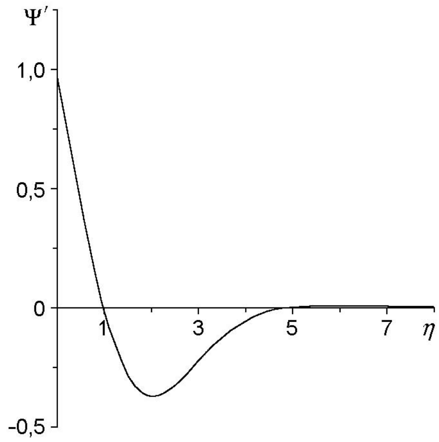

Рис. 2

Тогда для определения Ψ получаем задачу

$$\Psi''' = (\Psi' - 1)\Psi' - (\Psi + \eta/2)\Psi'', \qquad \Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = U_\infty, \quad \lim_{\eta\to\infty} \Psi'(\eta) = 0. \qquad (14)$$

Из численного решения задачи (14) следует, что в области течения возникает зона противотока. Распределение $\Psi'(\eta)$ представлено на рис. 2. В этом случае (в отличие от классического) можно вычислить объемный расход Q в динамическом пограничном слое

$$Q = \int\limits_0^\infty u(t,x,y)\,dy$$

и толщину вытеснения δ_v^* динамического слоя по формуле

$$\delta_v^* u_\infty(t,x) = \int\limits_0^\infty u(t,x,y)\,dy.$$

Проведя вычисления, получим $Q = \sqrt{\nu}xt^{-1/2}\Psi_\infty \approx -0{,}256\sqrt{\nu}xt^{-1/2}$. Толщина зоны противотока

$$\delta = ((\Psi(\eta_*) - |\Psi_\infty|)/U_\infty)\sqrt{\nu t} \approx 0{,}201\sqrt{\nu t}$$

составляет 76,66 % толщины динамического слоя δ_v^*. Здесь Ψ_∞ — значение $\Psi(\eta)$ при $\eta \to \infty$; η_* — точка, в которой $\Psi' = 0$.

Выводы. Рассмотрена задача о массообмене и свободной конвекции вблизи вертикальной стенки при больших числах Шмидта. В неустановившемся режиме движения построены автомодельные решения. Получены формулы для массообмена.

Если число Рейнольдса велико, то в области движения имеется также чисто динамический пограничный слой с большей асимптотической толщиной, сопрягающийся на внутренней границе с диффузионно-динамическим слоем. В области течения возникает зона противотока.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузнецов В. В., Фроловская О. А.** Пограничные слои при свободной конвекции // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 3. С. 92–100.

2. **Мартыненко О. Г., Соковишин Ю. А.** Свободно-конвективный теплообмен на вертикальной поверхности. Минск: Наука и техника, 1977.
3. **Мартыненко О. Г., Березовский А. А., Соковишин Ю. А.** Асимптотические методы в теории свободно-конвективного теплообмена. Минск: Наука и техника, 1979.
4. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 21/VI 2001 г.