Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 2

ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ В ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКЕ С ГИБКИМ ПОКРЫТИЕМ

УДК 539.3

И. П. Шацкий

Ивано-Франковский сектор ИППММ НАН Украины, 284002 Ивано-Франковск

В данной работе изучается влияние гибкого покрытия на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие тонкой оболочки с трещиной. Аналогичный вопрос для растянутой пластинки с изолированным разрезом исследован в [1], для пластинок с системами трещин — в [2, 3].

1. Рассмотрим изотропную оболочку Кирхгофа — Лява, ослабленную прямолинейной в плане сквозной трещиной, ориентированной вдоль линии кривизны срединной поверхности. Пусть на одну из лицевых поверхностей оболочки нанесено гибкое покрытие, которое деформируется совместно с подложкой и способно выдерживать достаточно большие напряжения. Берега трещины раскрываются самоуравновешенными мембранными усилиями; остальные поверхности объекта свободны от внешней нагрузки. Сформулируем задачу о влиянии покрытия на равновесие оболочки с трещиной.

Выберем систему декартовых координат $Oxyz$ (рис. 1,*а*). Напряженно-деформируемое состояние оболочки вне трещины опишем уравнениями теории пологих оболочек [4]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta_k w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta_k\varphi = 0, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2\backslash L. \tag{1.1}$$

Здесь φ — функция напряжений; w — прогиб оболочки; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $\Delta_k = \beta_2\partial^2/\partial x^2 + \beta_1\partial^2/\partial y^2$; $\beta_1 = R/R_1$; $\beta_2 = R/R_2$; $R = \min(|R_1|, |R_2|)$; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны нормальных сечений базисной поверхности; $B = 2Eh$; $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; h — ее полутолщина; L — отрезок оси абсцисс, вдоль которого расположен разрез длиной $2l$.

Мембранные усилия и изгибающие моменты на бесконечности принимаются нулевыми:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_y = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x,y) \to \infty. \tag{1.2}$$

Трещину в оболочке с гибким покрытием рассматриваем как разрез, берега которого соединены шарнирно в одной из лицевых поверхностей $z = sh$ ($s = +1$ либо $s = -1$) (рис. 1,*б*). Следуя [1], запишем краевые условия симметричной задачи в виде

$$[v] - sh[\vartheta_y] = 0, \quad x \in L; \tag{1.3}$$

$$N_y = -p + T, \quad M_y = shT, \quad x \in L, \tag{1.4}$$

где $[v]$ — раскрытие разреза в срединной поверхности оболочки; $[\vartheta_y]$ — скачок угла поворота нормали ($\vartheta_y = \partial w/\partial y$); $-p$ — заданная равномерно распределенная нагрузка; T — реакция в шарнире.

Исключая из соотношений (1.4) неизвестную контактную реакцию, приходим к ста-

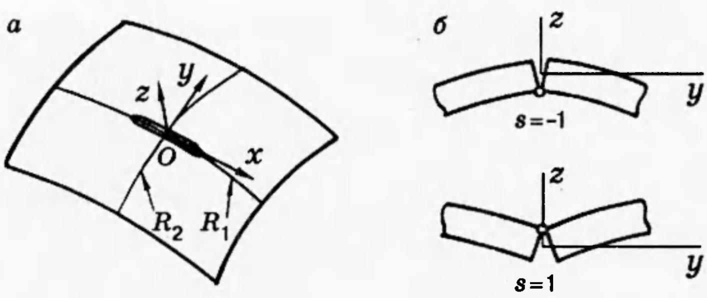

Рис. 1

тическому условию контакта

$$M_y = sh(N_y + p), \quad x \in L. \tag{1.5}$$

Соотношения (1.1)–(1.3), (1.5) — краевая задача, описывающая упругое равновесие пологой оболочки, ослабленной разрезом с шарнирно соединенными кромками, при действии симметричной нагрузки.

2. Перейдем к построению интегрального уравнения сформулированной задачи. Запишем интегральные представления усилий и моментов на линии $y = 0$ через производные от функций скачка:

$$\begin{aligned} N_y(x,0) &= \frac{B}{4\pi} \int\limits_L \Big\{ K_{11}(\xi - x)[v]'(\xi) - K_{13}(\xi - x)a[\vartheta_y]'(\xi) \Big\} \, d\xi, \\ M_y(x,0) &= \frac{Ba}{4\pi} \int\limits_L \Big\{ K_{31}(\xi - x)[v]'(\xi) - K_{33}(\xi - x)a[\vartheta_y]'(\xi) \Big\} \, d\xi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ядра этих представлений выражаются через интегралы Фурье [5, 6]:

$$K_{jk}(z) = [\delta_{jk}\mathrm{Re} + (1 - \delta_{jk})\mathrm{Im}] \int\limits_0^\infty g_{jk}(\gamma\sqrt{-i}/s) \sin zs ds, \quad j,k = 1,3. \tag{2.2}$$

Здесь $g_{11}(\rho) = r(\rho)/\omega(\rho); \quad g_{13}(\rho) = g_{31}(\rho) = -r(\rho)[1 + \nu/\omega(\rho)];$

$$g_{33}(\rho) = r(\rho)[2 - 2\nu + \beta_1\rho^2 + \omega(\rho) - \nu^2/\omega(\rho)];$$

$$r(\rho) = 2[2 + \beta_1\rho^2 + 2\omega(\rho)]^{-1/2}; \quad \omega(\rho) = (1 + \beta_2\rho^2)^{1/2};$$

$$\rho = \gamma\sqrt{-i}/s; \quad \gamma = 1/\sqrt{Ra}; \quad a = h/\sqrt{3(1 - \nu^2)}; \quad z = \xi - x;$$

δ_{jk} — символ Кронекера.

Подставляя выражения (2.1) в краевое условие (1.5) и исключая при помощи равенства (1.3) скачок угла поворота, для определения разрыва перемещений получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{B}{4\pi} \int\limits_L \Big\{ K_{11}(\xi - x) &- \frac{2s}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} K_{13}(\xi - x) + \\ &+ \frac{1}{3(1 - \nu^2)} K_{33}(\xi - x) \Big\} [v]'(\xi) d\xi = -p, \quad x \in L, \end{aligned} \tag{2.3}$$

решение которого должно удовлетворять дополнительному условию

$$[v](\partial L) = 0. \tag{2.4}$$

В безразмерных координатах $t = x/l$, $\tau = \xi/l$ задача (2.3), (2.4) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{B}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1} K(\tau - t)[v]'(\tau)d\tau = -p, \quad t \in (-1,1), \quad [v](\pm 1) = 0,\\ K(\zeta) = K_{11}(\zeta) - 2sK_{13}(\zeta)/\sqrt{3(1-\nu^2)} + K_{33}(\zeta)/(3(1-\nu^2)),\\ K_{jk}(\zeta) = lK_{jk}(l\zeta), \quad j,k = 1,3, \quad \zeta = \tau - t.\end{gathered} \tag{2.5}$$

3. Решение задачи (2.5) получено методом малого параметра в первом оболочечном приближении. Известно [5], что ядра (2.2) допускают разложение по малому параметру $\lambda = l\gamma = (l/\sqrt{Rh})(3(1-\nu^2))^{1/4}$:

$$K_{jk}(\zeta) = \frac{c_{jk0}}{\zeta} + \lambda\sum_{p=1}^{\infty}(a_{jkp} + b_{jkp}\ln\lambda|\zeta|)(\lambda\zeta)^p.$$

Нулевые и первые коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$a_{110} = 1, \quad a_{130} = a_{310} = 0, \quad a_{330} = 3 - 2\nu - \nu^2,$$

$$a_{111} = -\frac{\beta_1 + 5\beta_2}{32}\pi\mathrm{B} - \frac{\sqrt{-\beta_1\beta_2}}{24}\frac{3\beta_1^2 - 22\beta_1\beta_2 + 15\beta_2^2}{(\beta_1 - \beta_2)^2}\eta(-\beta_1\beta_2),$$

$$a_{331} = \frac{(5 + 2\nu + \nu^2)\beta_1 + (1 + 2\nu + 5\nu^2)\beta_2}{32}\pi\mathrm{B} +$$

$$+\frac{\sqrt{-\beta_1\beta_2}}{24}\frac{3(5 + 2\nu + \nu^2)\beta_1^2 - 2(11 + 2\nu + 11\nu^2)\beta_1\beta_2 + 3(1 + 2\nu + 5\nu^2)\beta_2^2}{(\beta_1 - \beta_2)^2}\eta(-\beta_1\beta_2),$$

$$a_{131} = a_{311} = \left[\frac{3(1+\nu)\beta_1^2 + 4(1 + 11\nu)\sqrt{\beta_1\beta_2^3} + (5 + 37\nu)\beta_2^2}{48(\sqrt{\beta_1} - \sqrt{\beta_2})^2} + \right.$$

$$\left. + b_{131}\left(\ln\frac{\gamma_0(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})}{4} - 1\right)\right]\eta(\beta_1\beta_2) + \left[\frac{(1+\nu)(\beta_1 + 3\beta_2)}{16} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_2^2}{12}\frac{3(1 - 3\nu)\beta_1 - (1 - 7\nu)\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)^2} + b_{131}\left(\ln\frac{\gamma_0\sqrt{|\beta_1 - \beta_2|}}{4} - 1\right)\right]\eta(-\beta_1\beta_2),$$

$$b_{111} = b_{331} = 0, \; b_{131} = b_{311} = \frac{(1+\nu)\beta_1 + (1 + 5\nu)\beta_2}{8},$$

$$\mathrm{B} = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{-\beta_1\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2}\eta(-\beta_1\beta_2)$$

($\eta(\ldots)$ — функция Хевисайда, $\ln\gamma_0 = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера).

Для соответствующих коэффициентов представления

$$K(\zeta) = \frac{a_0}{\zeta} + \lambda\sum_{p=1}^{\infty}(a_p + b_p\ln\lambda|\zeta|)(\lambda\zeta)^p \tag{3.1}$$

получим выражения

$$a_0 = a_{110} + a_{330}/(3(1-\nu^2)), \quad a_1 = a_{111} - 2sa_{131}/\sqrt{3(1-\nu^2)} + a_{331}/(3(1-\nu^2)),$$

$$b_1 = -2sb_{131}/\sqrt{3(1-\nu^2)}.$$

Учитывая разложение (3.1), находим решение задачи в первом оболочечном приближении:

$$[v](t) = \frac{pl}{B}\Phi(\lambda, t), \quad [\vartheta_y](t) = \frac{psh l}{3(1-\nu^2)D}\Phi(\lambda, t). \tag{3.2}$$

Здесь

$$\Phi(\lambda, t) = \frac{4\sqrt{(1-t^2)}}{a_0}\left\{1 - \frac{\lambda^2}{2a_0}\left[a_1 + b_1\left(\frac{2}{3} + \frac{t^2}{3} + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)\right\}.$$

Подставляя результат (3.2) в формулу (2.1), с той же степенью точности имеем распределение контактной реакции в шарнирном соединении:

$$T(t) = \frac{p(3+\nu)}{2(3+2\nu)}\left\{1 - \frac{\lambda^2}{2a_0}\left[A_1 + B_1\left(\frac{1}{2} + t^2 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)\right\},$$

$$A_1 = a_{111} + 2s\nu a_{131}/((3+\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)}) - a_{331}/a_{330}, \tag{3.3}$$

$$B_1 = 2s\nu b_{131}/((3+\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)}).$$

Коэффициенты интенсивности усилий K_1 и моментов K_3 [5] в окрестности концов разреза вычислим по формулам

$$K_1 = -\frac{1}{4}Ba_{110}\sqrt{l}\lim_{t\to 1}\sqrt{(1-t^2)}[v]'(t) = \frac{3p\sqrt{l}(1+\nu)}{2(3+2\nu)}F(\lambda),$$

$$K_3 = \frac{1}{4}Da_{330}\sqrt{l}\lim_{t\to 1}\sqrt{(1-t^2)}[\vartheta_y]'(t) = -\frac{psh\sqrt{l}(3+\nu)}{2(3+2\nu)}F(\lambda), \tag{3.4}$$

$$F(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2a_0}\left[a_1 + b_1\left(1 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda).$$

При $\lambda = 0$ из формул (3.2)–(3.4) получим решение задачи для разреза с шарнирно соединенными кромками в растянутой пластине [1].

Наиболее важным для практики частным значениям параметров β_1, β_2 соответствуют следующие выражения функции $F(\lambda)$:

а) для псевдосферической оболочки с разрезом вдоль линии кривизны ($\beta_1 = -\beta_2 = \pm 1$)

$$F(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\left[\frac{5-\nu-10\nu^2}{64}\pi \mp\right.$$

$$\left.\mp s\sqrt{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1+11\nu}{48} + \frac{\nu}{4}\ln\frac{\gamma_0\sqrt{2}\lambda}{8}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda); \tag{3.5}$$

б) для цилиндрической оболочки с разрезом вдоль направляющей ($\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$)

$$F(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\left[\frac{1+\nu+2\nu^2}{64}\pi - s\sqrt{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1+\nu}{32} + \frac{1+\nu}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{8}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda);$$

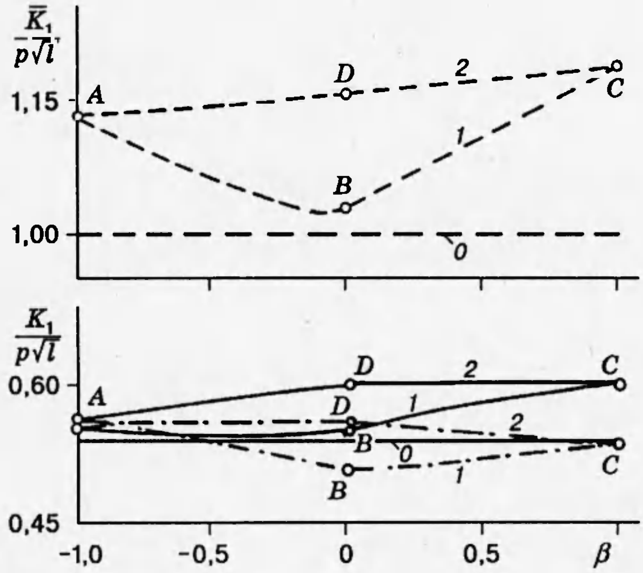

Рис. 2

в) для цилиндрической оболочки с разрезом вдоль образующей ($\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$)

$$F(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\left[\frac{7-\nu-10\nu^2}{64}\pi + s\sqrt{3(1-\nu^2)}\left(\frac{5+37\nu}{96} + \frac{1+5\nu}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{8}\right)\right] + O(\lambda^4\ln^2\lambda);$$

г) для сферической оболочки с меридиональным разрезом ($\beta_1 = \beta_2 = 1$)

$$F(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\left[\frac{3-\nu-6\nu^2}{32}\pi + s\sqrt{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1+7\nu}{32} + \frac{1+3\nu}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{4}\right)\right] + O(\lambda^4\ln^2\lambda).$$

Предельное равновесие растянутой оболочки с трещиной оценим на основе энергетического критерия разрушения при комбинированном растяжении и изгибе [1, 7, 8]:

$$G = 2\gamma_*, \quad G = \frac{\pi}{4h^2E}\left[K_1^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu}\left(\frac{K_3}{h}\right)^2\right]. \tag{3.6}$$

Здесь G — поток энергии в вершину трещины; γ_* — плотность эффективной поверхностной энергии материала.

Подставляя в критерий соотношения (3.4), определяем значение нагрузки, приводящей к распространению трещины:

$$p_* = p^0\sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}}\left\{1 + \frac{\lambda^2}{2a_0}\left[a_1 + b_1\left(1 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4\ln^2\lambda)\right\} \tag{3.7}$$

($p^0 = \sqrt{8h^2E\gamma_*/(\pi l)}$ — разрушающее растягивающее усилие для пластинки, содержащей трещину со свободными от связей берегами).

4. Если рассмотреть задачу о разрезе в пологой оболочке без покрытия, то после подстановки интегральных представлений (2.1) в краевые условия $N_y = -p$, $M_y = 0$, $x \in (-l, l)$ получим систему интегральных уравнений, решением которой будут функции [5]

$$[\bar v](t) = \frac{4pl\sqrt{(1-t^2)}}{Ba_{110}}\left[1 - \frac{a_{111}}{2a_{110}}\lambda^2 + O(\lambda^4\ln\lambda)\right], \tag{4.1}$$

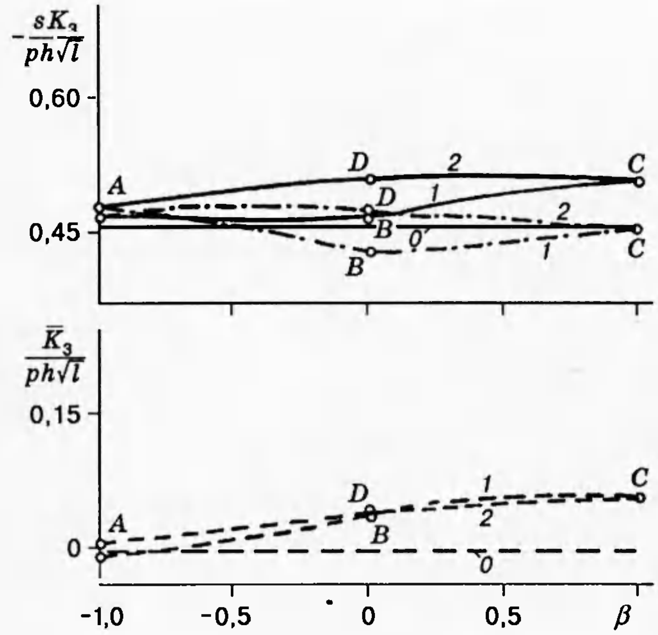

Рис. 3

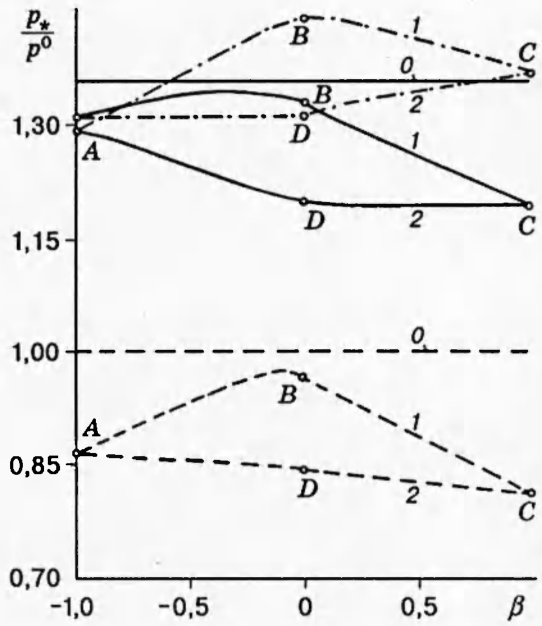

Рис. 4

$$[\bar{\vartheta}_y](t) = \frac{4phl\sqrt{(1-t^2)}}{Ba_{110}\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{\lambda^2}{2a_{330}}\left[a_{311} + b_{311}\left(\frac{2}{3} + \frac{t^2}{3} + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda).$$

Этим скачкам соответствуют коэффициенты интенсивности усилий и моментов

$$\bar{K}_1 = p\sqrt{l}\left[1 - \frac{a_{111}}{2a_{110}}\lambda^2 + O(\lambda^4 \ln \lambda)\right],$$
$$\bar{K}_3 = -\frac{ph\sqrt{l}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{\lambda^2}{2a_{110}}\left[a_{311} + b_{311}\left(1 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda), \tag{4.2}$$

а также критическая нагрузка, вычисляемая с той же точностью по критерию (3.6):

$$\bar{p}_* = p^0\left[1 + \frac{a_{111}}{2a_{110}}\lambda^2 + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)\right]. \tag{4.3}$$

5. Перейдем к обсуждению полученных результатов. На рис. 2, 3 показаны графики, характеризующие влияние формы оболочки на коэффициенты интенсивности усилий и моментов при $\nu = 0{,}3$. Аналогичные зависимости для безразмерной критической нагрузки представлены на рис. 4. Линии *0* соответствуют случаю растянутой пластины $\lambda = 0$ [1]. Кривые *1* характеризуют ориентацию трещины в оболочке вдоль линии наибольшей кривизны ($\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta$), а *2* — вдоль линии наименьшей кривизны ($\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = 1$) при $\lambda = 0{,}8$. При этом точки A и C отвечают псевдосферической оболочке и сферической, точки B и D — цилиндрической оболочке соответственно с поперечным и продольным разрезом. Выражения (3.4), (3.7), учитывающие наличие гибкого покрытия, представлены сплошными ($s = -1$) и штрихпунктирными ($s = 1$) линиями. Для сравнения штриховыми линиями показаны результаты (4.2), (4.3), получаемые в классической постановке.

Как видно из представленных графиков, шарнирное соединение берегов разреза приводит к существенному уменьшению коэффициента интенсивности усилий и к появлению

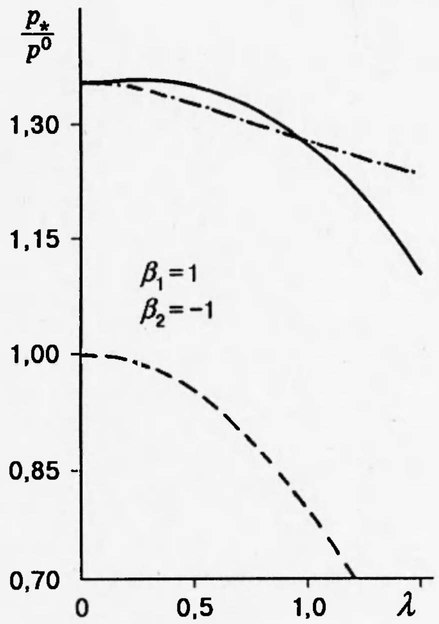

Рис. 5

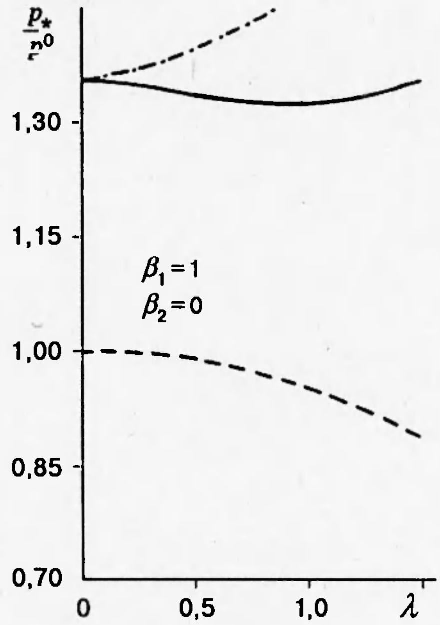

Рис. 6

немалого коэффициента интенсивности моментов. Если в классической постановке несущая способность растянутой оболочки с трещиной всегда ниже таковой для пластины, то при наличии гибкого покрытия разрушающая нагрузка для оболочки может быть как больше, так и меньше аналогичного значения для пластины. Действительно, поправка на кривизну в формуле (4.3) в первом приближении зависит только от коэффициентов разложения ядра $K_{11}(\zeta)$ и является отрицательной при произвольных значениях параметров β_1, β_2. Множитель $a_1 + b_1(1 + \ln(\lambda/2))$ в выражении (3.7), учитывающем эффект покрытия, определяется коэффициентами разложения всех ядер $K_{jk}(\zeta)$ и в зависимости от формы оболочки, параметров s и λ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

На рис. 5–8 представлены более подробные зависимости разрушающей нагрузки от параметра λ, полученные при $\nu = 0{,}3$ для оболочек простейшей геометрии: псевдосферической (рис. 5), цилиндрической с поперечным (рис. 6) и продольным (рис. 7) разрезом и сферической оболочки (рис. 8).

Поскольку для псевдосферической оболочки смена ориентации трещины в первом приближении эквивалентна изменению знака параметра s (см. формулу (3.5)), графики, соответствующие случаю $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$, получаются перестановкой сплошной и штрихпунктирной кривых на рис. 5.

Отметим, что для разреза с шарнирно соединенными кромками в растянутой оболочке характерна, вообще говоря, немонотонная зависимость предельной нагрузки от параметра λ.

Влияние гибкого покрытия на напряженное состояние и предельное равновесие оболочки при бо́льших значениях параметра λ, как и пределы применимости полученных здесь асимптотических результатов, могут быть исследованы на основе численного решения интегрального уравнения (2.5) с использованием метода механических квадратур [5].

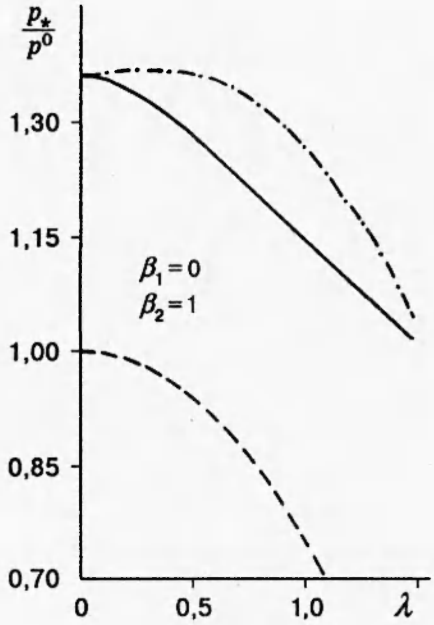

Рис. 7

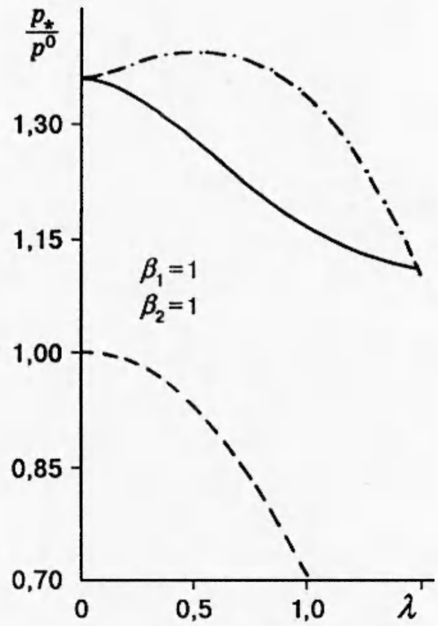

Рис. 8

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шацкий И. П.** Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками // ПМТФ. 1989. № 5. С. 163–165.
2. **Шацький І. П.** Взаємодія колінеарних розрізів з шарнірно з'єднаними берегами у розтягнутій пластинці // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 1992. Вип. 36. С. 93–97.
3. **Шацкий И. П.** Периодическая система параллельных разрезов с шарнирно соединенными кромками в растянутой пластине // Теорет. и прикл. механика. 1992. Вып. 23. С. 40–45.
4. **Власов В. З.** Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. **Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976.
6. **Хижняк В. К., Шевченко В. П.** Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учеб. пособие. Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1979.
7. **Винн Р. Г., Смит С. М.** Экспериментальное исследование критерия разрушения при комбинированном растяжении и изгибе // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Д. 1969. № 4. С. 280–288.
8. **Осадчук В. А.** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985.

Поступила в редакцию 20/II 1995 г.