Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ СНАРЯДНОЙ СТРУКТУРЫ

УДК 534.13

А. О. Максимов

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН, 690041 Владивосток

До настоящего времени теоретическое описание особенностей распространения акустических сигналов в газожидкостной смеси снарядной структуры основывалось на относительно простых моделях, предполагающих либо периодическое расположение снарядов, либо наличие слабой нерегулярности в размерах жидких пробок и газовых снарядов.

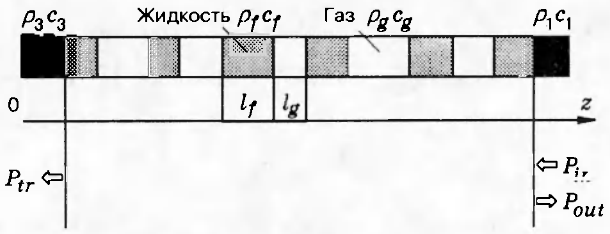
В настоящей работе предлагается использовать случайный телеграфный процесс для задания последовательно меняющихся от снарядов к пробкам акустических характеристик двухфазной среды. Существенно одномерный характер снарядного течения позволяет использовать разработанные методы теории одномерных неупорядоченных сред и получить замкнутую систему уравнений для описания статистических характеристик акустического поля. Решение этих уравнений позволяет проанализировать ряд эффектов (прохождение через слой, статистический параметрический резонанс) и продемонстрировать особенности распространения волн в смеси снарядной структуры.

Движение газо- и парожидкостных смесей может происходить в различных режимах (пузырьковом, снарядном, стержневом и др.) [1, 2]. Распространение акустических волн в жидкости с пузырьками в настоящее время изучено достаточно детально [2, 3]. Описанию акустических возмущений в смеси снарядной структуры уделяется значительно меньше внимания. Вместе с тем существенно одномерный характер этого течения позволяет использовать разработанные методы теории одномерных неупорядоченных систем и получить в ряде случаев точное, а значит, и гораздо более подробное описание, чем при анализе распространения волн в пузырьковых средах.

Воспользуемся следующей моделью снарядного течения [4], которая находит применение и при анализе одномерных неупорядоченных сред [5]. На рисунке приведена схема снарядной структуры потока. Размеры чередующихся прослоек газа (пара) l_g и жидкости l_f являются переменными. Газ рассматривается как идеальный с показателем адиабаты γ, пренебрегается трением жидкости о стенки канала и межфазным трением. Справа из однородной среды с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1 на двухфазную смесь падает плоская волна частоты ω $P_{in}\exp[-ik_1(z-L)-i\omega t]$ $(k_1=\omega/c_1)$. В этой же области находится рассеянная волна $R\exp[ik_1(z-L)-i\omega t]$. Слева за областью двухфазного течения в однородной среде с параметрами ρ_3, c_3 располагается прошедшая волна $P_{tr}\exp[-ik_3(z-L_0)-i\omega t]$ $(k_3=\omega/c_3)$.

Теория распространения акустических импульсов в периодической снарядной структуре с учетом нелинейных искажений развита в [6]. Учет слабой нерегулярности в размерах снарядов и пробок [4] позволил получить малые поправки к закону дисперсии волн. Анализ существенно неоднородной ситуации [5] относится к интересной, но частной проблеме — поиску акустических аналогов андерсоновской локализации в одномерных системах.

Акустическая модель снарядного течения. Наглядную картину акустических возмущений, имеющих в пределах каждого слоя вид плоских волн, распространяющихся в противоположные стороны и рассеивающихся на межфазных границах (при выполнении условий непрерывности давления P и скорости v), можно описать и с помощью непрерыв-



ных уравнений

$$\rho_0(z)\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0(z)\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad P = c_0^2(z)\rho. \tag{1}$$

Здесь меняющиеся от снаряда к пробке значения плотности $\rho_0(z)$ и скорости звука $c_0(z)$ могут быть заданы с помощью введения случайного телеграфного процесса $s(z)$:

$$\rho_0(z) = [(\rho_f + \rho_g) + (\rho_f - \rho_g)s(z)]/2, \quad c_0(z) = [(c_f + c_g) + (c_f - c_g)s(z)]/2,$$

где ρ_f, ρ_g — плотности, а c_f, c_g — скорости звука в жидкой пробке и газовом снаряде соответственно; $s(z)$ — случайный телеграфный процесс, принимающий последовательно значения $+1$ и -1. Приведем статистические характеристики телеграфного процесса [7] применительно к обсуждаемой задаче.

Плотность вероятности того, что в точке z' располагается жидкая пробка, имеет вид

$$P_+(z',z) = \frac{l_f}{l_f + l_g} + \exp\Big[-\Big(\frac{1}{l_f} + \frac{1}{l_g}\Big)(z'+z)\Big]\Big[\Big(\frac{l_g}{l_f + l_g}\Big)\delta_{+z} - \Big(\frac{l_f}{l_f + l_g}\Big)\delta_{-z}\Big],$$

а того, что в этой же точке располагается газовый снаряд,

$$P_-(z',z) = \frac{l_g}{l_f + l_g} - \exp\Big[-\Big(\frac{1}{l_f} + \frac{1}{l_g}\Big)(z'+z)\Big]\Big[\Big(\frac{l_g}{l_f + l_g}\Big)\delta_{+z} - \Big(\frac{l_f}{l_f + l_g}\Big)\delta_{-z}\Big].$$

Здесь $\delta_{+z} = 1$, если в точке z располагается жидкая пробка, и $\delta_{+z} = 0$, если там находится снаряд; аналогично $\delta_{-z} = 1$ для газового снаряда и $\delta_{-z} = 0$ для жидкой пробки (очевидно, что $P_+ + P_- = 1$); l_f и l_g — средние размеры жидких пробок и газовых снарядов. Условные вероятности того, что на интервале l располагается непрерывный слой жидкости $P_f(l) = (1/l_f)\exp(-l/l_f)$ или газа $P_g(l) = (1/l_g)\exp(-l/l_g)$, задают распределение жидких пробок и газовых снарядов. Теперь могут быть определены средние характеристики параметров среды:

$$\langle s\rangle = \frac{l_f - l_g}{l_f + l_g}, \quad \langle \rho_0(z)\rangle = \rho_f\frac{l_f}{l_f + l_g} + \rho_g\frac{l_g}{l_f + l_g}, \quad \langle c_0(z)\rangle = c_f\frac{l_f}{l_f + l_g} + c_g\frac{l_g}{l_f + l_g}.$$

Задача рассеяния волн на слое может быть сведена к краевой задаче для акустических возмущений внутри среды. Действительно, согласно (1), акустические возмущения частоты ω в снарядном потоке описываются системой уравнений

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{i\omega}{\rho_0(z)c_0^2(z)}P, \quad \frac{dP}{dz} = i\rho_0(z)\omega v \tag{2}$$

и удовлетворяют граничным условиям вида $P(L_0) + z_3 v(L_0) = 0$, $P(L) - z_1 v(L) = 2$, где L_0 — координата левой границы снарядного течения; L — координата правой границы; $z_1 = \rho_1 c_1$; $z_3 = \rho_3 c_3$; амплитуда падающей волны P_{in} выбрана как единица измерений.

Уравнения инвариантного погружения. Одним из непреложных критериев применимости существующих методов анализа стохастических уравнений является выполнение принципа динамической причинности. К сожалению, для сформулированной краевой задачи он не выполняется, поскольку P и v в $(\cdot)z$ функционально зависят от всех значений $s(z)$ из интервала $L_0 < z < L$; более того, даже краевые условия являются функционалом поля $s(z)$. В силу этого, согласно [8], воспользуемся методом инвариантного погружения, который позволяет перейти от краевой задачи к задаче с начальными данными (задаче Коши). Для последней принцип динамической причинности выполняется, поэтому при определенных предположениях о статистике процесса $s(z)$ оказывается возможным получить уравнение для плотности вероятности решения задачи (2).

Независимость (инвариантность) коэффициентов уравнения и граничных условий (2) от толщины слоя позволяет получить уравнение для поля давления $P(z, L)$ по параметру погружения L [8]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P(z,L)}{\partial L} = -iP(z,L)\left[-\frac{k_2 z_2}{z_1} + \frac{k_2(z_2^2 - z_1^2)}{2z_1 z_2}P(L,L)\right], \\ \frac{dP(L,L)}{dL} = -2i\frac{k_2 z_2}{z_1}(1 - P(L,L)) - i\frac{k_2(z_2^2 - z_1^2)}{2z_1 z_2}P^2(L,L), \quad P(L_0, L_0) = \frac{2z_3}{z_1 + z_3}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $P(L, L)$ — давление на правой границе, а $P(L_0, L_0)$ — на левой границе, когда толщина слоя стремится к нулю; $k_2(z) = \omega/c_0(z)$; $z_2(z) = \rho_0(z)c_0(z)$.

Удобно выделить в явном виде средние и флуктуационные составляющие в коэффициентах этого уравнения:

$$\frac{k_2 z_2}{z_1} = k_1\left[\frac{\langle\rho_0(z)\rangle}{\rho_1} + \frac{(\rho_f - \rho_g)}{2\rho_1}(s - \langle s\rangle)\right], \quad \frac{k_2(z_2^2 - z_1^2)}{2z_1 z_2} =$$

$$= k_1\left\{\left[\frac{\langle\rho_0(z)\rangle}{\rho_1} - \rho_1 c_1^2\left\langle\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\right\rangle\right] + \left[\frac{(\rho_f - \rho_g)}{\rho_1} - \rho_1 c_1^2\left(\frac{1}{\rho_f c_f^2} - \frac{1}{\rho_g c_g^2}\right)\right](s - \langle s\rangle)\right\},$$

$$\langle\rho_0\rangle = \rho_f\frac{l_f}{l_f + l_g} + \rho_g\frac{l_g}{l_f + l_g}, \quad \left\langle\frac{1}{\rho_0 c^2}\right\rangle = \frac{1}{\rho_f c_f^2}\frac{l_f}{l_f + l_g} + \frac{1}{\rho_g c_g^2}\frac{l_g}{l_f + l_g}.$$

Слабые флуктуации. Начнем анализ системы (3) с простейшего случая, когда флуктуации слабы, и ими можно пренебречь. При этом снарядное течение будет представлять собой среду с эффективными средними параметрами и система (3) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial P(z,L)}{\partial L} = -iP(z,L)\left[-k_1\frac{\langle\rho_0\rangle}{\rho_1} + \frac{k_1}{2}\left(\frac{\langle\rho_0\rangle}{\rho_1} - \rho_1 c_1^2\left\langle\frac{1}{\rho_0 c^2}\right\rangle\right)P(L,L)\right], \\ \frac{dP(L,L)}{dL} = -2ik_1\frac{\langle\rho_0\rangle}{\rho_1}(1 - P(L,L)) - \frac{ik_1}{2}\left[\frac{\langle\rho_0\rangle}{\rho_1} - \rho_1 c_1^2\left\langle\frac{1}{\rho_0 c^2}\right\rangle\right]P^2(L,L), \\ P(L_0, L_0) = \frac{2z_3}{z_1 + z_3}.\end{gathered} \tag{4}$$

Решение (4) может быть найдено непосредственно, однако гораздо проще получить его, вернувшись к исходной системе (2), поскольку сразу же могут быть определены эффективные параметры среды: скорость звука $1/c_m^2 = \langle\rho_0\rangle\langle 1/\rho_0 c^2\rangle$ и акустический импеданс $z_m = \langle\rho_0\rangle c_m$. После этого задача представляет собой классический пример из теории распространения волн в слоистых средах [9].

Амплитуды волн a и b в области двухфазного течения $P(z, L) = a(L)\exp(-ik_m z) + b(L)\exp(ik_m z)$ описываются формулами $a(L) = \exp(+ik_m L)(1/2)[(1 - z_m/z_1) + (1 + z_m/z_1)R]$, $b(L) = \exp(-ik_m L)(1/2)[(1 + z_m/z_1) + (1 - z_m/z_1)R]$, а амплитуда отраженной волны

$$R(L) = \frac{[(z_m - z_1)/(z_1 + z_m)] + [(z_3 - z_m)/(z_3 + z_m)]\exp[2ik_m(L - L_0)]}{1 + [(z_m - z_1)/(z_m + z_1)][(z_3 - z_m)/(z_3 + z_m)]\exp[2ik_m(L - L_0)]}.$$

Заслуживает обсуждения наиболее типичный случай, когда среды 1 и 3 — это та же жидкость, в которой распространяется цепочка снарядов. В данном случае $z_1 = z_2 = \rho_f c_f$, и тогда

$$R(L) = -\left(\frac{1 - z_m/z_1}{1 + z_m/z_1}\right)\{1 - \exp[2ik_m(L - L_0)]\} \Big/ \left\{1 - \left(\frac{1 - z_m/z_1}{1 + z_m/z_1}\right)\exp[2ik_m(L - L_0)]\right\}. \quad (5)$$

Проведем сравнение с известными результатами, в частности с выражением для скорости распространения акустических сигналов по двухфазной смеси снарядной структуры [4]: $c_m^2 = [\gamma P_0/\rho_f\varphi(1-\varphi)]$ (P_0 — статическое давление, φ — объемное газосодержание смеси ($\varphi = l_g/(l_f + l_g)$)). Сопоставляя это выражение с

$$c_m^{-2} - \langle\rho_0\rangle\left\langle\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\right\rangle = \left(\rho_f\frac{l_f}{l_f + l_g} + \rho_g\frac{l_g}{l_f + l_g}\right)\left(\frac{1}{\rho_g c_g^2}\,\frac{l_g}{l_f + l_g} + \frac{1}{\rho_f c_f^2}\,\frac{l_f}{l_f + l_g}\right),$$

видим, что для наиболее типичных случаев, когда $\langle\rho_0\rangle \approx \rho_f l_f/(l_f + l_g)$, а $\langle 1/\rho_0 c_0^2\rangle \approx (1/\rho_g c_f^2)(l_g/(l_f + l_g))$, совпадение полное: $c_m^2 = c_g^2(\rho_g/\rho_f)(l_f + l_g)^2/l_f l_g$. Однако используемая модель применима и в иных ситуациях, например для описания высокократных пен ($l_g \gg l_f$).

Следует отметить, что аналогичное выражение для скорости звука в снарядной смеси при любых значениях газосодержания получено методами акустики слоистых сред в работе [10]. Данное совпадение и ссылка на [10] указаны рецензентом.

В силу того что $z_m/z_1 \approx (c_m/c_f)(l_f/(l_f + l_g)) \ll 1$ (c_m много меньше скорости звука как в газе, так и в жидкости), отражение звука от цепочки снарядов происходит как от абсолютно мягкой среды, за исключением тех случаев, когда в области, занятой двухфазным течением, укладывается целое число полуволн и имеет место просветление среды ($R \to 0$). Подчеркнем, что речь идет о длинах волн в области снарядного течения, где $\lambda_m = (c_m/c_f)\lambda_1 \ll \lambda_1$ ($\lambda_1 = 2\pi/k_1$).

Уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка (ЭФП). В общем случае, когда флуктуации существенны, следует, основываясь на системе стохастических уравнений (3), определить средние и корреляционные характеристики поля давления. Попытки непосредственного усреднения (3) приведут к зацепляющейся цепочке уравнений для моментов. В силу этого при нахождении статистических характеристик краевых задач поступают иначе [8, 11]. Для соответствующей задачи Коши строят линейное уравнение Лиувилля, усреднение которого для простых моделей флуктуаций (к их числу принадлежит и случайный телеграфный процесс) уже не вызывает серьезных затруднений.

Легко убедиться [8], что $\varphi_L(U, U_L) \equiv \delta(P(z, L) - U)\delta(P(L, L) - U_L)$ как функция переменных L, U, U_L удовлетворяет уравнению Лиувилля. Поскольку $P(z, L)$, $P(L, L)$ — комплекснозначные функции, то $\varphi_L(U, U_L)$ помимо L зависит от четырех аргументов: либо амплитуд и фаз, либо действительных и мнимых частей. Напомним, что $P(z, L)$, $P(L, L)$ — решения системы (3), соответствующие определенной реализации процесса $s(z)$.

Плотность вероятности реализации решения (3) получается усреднением $\varphi_L(U, U_L)$ по ансамблю случайной величины $s(z)$: $W_L(U, U_L) = \langle\varphi_L(U, U_L)\rangle$. Начальное условие для $W_L(U, U_L)$ имеет вид [8] $W_L(U, U_L)|_{L=z} = \delta(U - U_L)\langle\varphi_z(U_z)\rangle(P_L(z, L)|_{L=z} = P(z, z))$. Уравнение Лиувилля для $\varphi_L(U_L) = \delta(U_L - P(L, L))$ в силу замкнутости уравнения Риккати для $P(L, L)$ может быть получено независимо. При этом начальное условие для плотности вероятности распределения поля на границе $W_L(U_L) = \langle\varphi_L(U_L)\rangle$ имеет вид $W_L(U_L)|_{L=L_0} = \delta(U_{L_0} - 2z_3/(z_1 + z_3))$. Ниже ограничимся рассмотрением случая, когда $z_1 = z_3$ и $W_L(U_L)|_{L=L_0} = \delta(U_{L_0} - 1)$.

Согласно [11], выразим $P(L, L)$ через коэффициент отражения $R(L, L) = P(L, L) - 1$ и получим уравнение ЭФП для плотности вероятности распределения амплитуды и фазы коэффициента отражения от двухфазной среды снарядной структуры $W_L(\rho, \chi)$ ($R(L, L) =$

$\rho_L \exp(i\chi_L))$ в виде

$$\frac{\partial W_L}{\partial L} + \frac{\partial}{\partial \rho}(AW_L) + \frac{\partial}{\partial \chi}(CW_L) = D\Big[\frac{\partial}{\partial \rho}B + \frac{\partial}{\partial \chi}F\Big]^2 W_L, \quad D = \frac{4l_f^2 l_g^2}{(l_f + l_g)^3}. \tag{6}$$

Здесь

$$A(\rho_L, \chi_L) = \frac{k_1}{2}\left[\frac{\langle \rho_0 \rangle}{\rho_1} - \rho_1 c_1^2 \langle \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \rangle\right](\rho_l^2 - 1)\sin\chi_L;$$

$$B(\rho_L, \chi_L) = \frac{k_1}{4}\left[\frac{(\rho_f - \rho_g)}{\rho_1} - \rho_1 c_1^2 \Big(\frac{1}{\rho_f c_f^2} - \frac{1}{\rho_g c_g^2}\Big)\right](\rho_L^2 - 1)\sin\chi_L;$$

$$C(\rho_L, \chi_L) = 2k_1 \frac{\langle \rho_0 \rangle}{\rho_1} - \frac{k_1}{2}\left[\frac{\langle \rho_0 \rangle}{\rho_1} - \rho_1 c_1^2 \Big\langle \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \Big\rangle\right]\Big[2 + \Big(\rho_L + \frac{1}{\rho_L}\Big)\cos\chi_L\Big];$$

$$F(\rho_L, \chi_L) = k_1 \frac{(\rho_f - \rho_g)}{\rho_1} - \frac{k_1}{4}\left[\frac{(\rho_f - \rho_g)}{\rho_1} - \rho_1 c_1^2 \Big(\frac{1}{\rho_f c_f^2} - \frac{1}{\rho_g c_g^2}\Big)\right]\Big[2 + \Big(\rho_L + \frac{1}{\rho_L}\Big)\cos\chi_L\Big].$$

Данное уравнение получено в предположении, что статистические характеристики акустических сигналов, длина волны которых значительно превышает размеры снарядов и пробок, слабо меняются на этих масштабах. В рассматриваемом приближении вся специфика телеграфного процесса отражена в виде коэффициента диффузии D.

Физическим условиям пригодности этого диффузионного уравнения отвечает ситуация, когда волна уже испытала достаточно большое число столкновений на границах снарядов и пробок, и можно удовлетвориться усредненным описанием ее поведения на расстояниях, больших по сравнению с размерами отдельных пробок и снарядов.

При решении (6) воспользуемся следующим приближением [11], позволяющим существенно упростить уравнение ЭФП. Дело в том, что в пренебрежении флуктуациями коэффициент отражения меняется на масштабе, равном половине длины волны ($\lambda_m/2 = \pi/k_m$) возмущения, распространяющегося по двухфазной среде (см. (5)), т. е. $R(L)$ представляет собой быстро осциллирующую функцию. С другой стороны, в силу того что $\lambda_m \gg l_g, l_f$, статистические характеристики акустического возмущения мало меняются на длине волны; при анализе этих возмущений можно усреднить (6) по периоду осцилляций. Сама плотность вероятности, будучи по определению величиной усредненной по ансамблю реализаций случайной величины $s(z)$, не изменится на этом масштабе, так что усреднению подлежат только коэффициенты уравнения (6). В результате этой операции получим более простое уравнение [8] с коэффициентами, зависящими только от $\chi' = \chi - (k_m, L - L_0)$:

$$\frac{\partial W_L(\rho, \chi')}{\partial L} = -\frac{\partial}{\partial \chi'}\overline{C(\rho)} W_L(\rho, \chi') - D\Big\{\frac{\partial}{\partial \rho}(\overline{B'_\rho B} + \overline{B'_{\chi'} F}) + \frac{\partial}{\partial \chi'}\overline{F'_\rho B}\Big\} W_L(\rho, \chi') +$$
$$+ D\Big\{\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\overline{B^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi'^2}\overline{F^2}\Big\} W_L(\rho, \chi'). \tag{7}$$

Здесь чертой обозначено усреднение по периоду осцилляций и использован тот факт, что $\overline{A} = 0$, $\overline{BF} = 0$.

Дальнейшее упрощение состоит в интегрировании (7) по χ', приводящем к уравнению ЭФП для $\overline{W_L}(\rho)$:

$$\frac{\partial \bar{W_L}(\rho)}{\partial L} = -D\frac{\partial}{\partial \rho}(\overline{B'_\rho B} - \overline{B'_{\chi'} F})\bar{W_L}(\rho) + D\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\overline{B^2}\,\overline{W_L}(\rho),$$

или, расписывая в явном виде коэффициенты, получим

$$\frac{\partial \bar{W_L}(\rho)}{\partial L} = -\tilde{D}\Big[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2-1)^2\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{(\rho^2-1)^2}{\rho}\Big]\overline{W_L}(\rho), \quad \tilde{D} = k_1^2\frac{l_f^2 l_g^2}{8(l_f+l_g)^3}\Big(\frac{\rho_f c_f^2}{\rho_g c_g^2}\Big)^2.$$

Поскольку это уравнение только видом коэффициента диффузии отличается от рассмотренного в [8, 11], сразу приведем его решение.

Удобно перейти к переменной $u = (1+\rho^2)/(1-\rho^2)$. Для плотности вероятности распределения u имеем [8]

$$W_L(u) = \frac{\exp[-\tilde{D}(L-L_0)/4]}{2\sqrt{2\pi}[\tilde{D}(L-L_0)]^{3/2}}\int\limits_u^\infty dx\,\frac{x\exp[-x^2/4\tilde{D}(L-L_0)]}{\sqrt{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}u}}. \tag{8}$$

С помощью найденного решения непосредственно вычисляются средние значения величин. Квадрат модуля коэффициента отражения описывается выражением

$$\langle|R(L)|^2\rangle = 1 - 4\pi^{-1/2}\exp[-\tilde{D}(L-L_0)/4]\int\limits_0^\infty dx\,\frac{x^2\exp(-x^2)}{\operatorname{ch}(x\sqrt{\tilde{D}(L-L_0)})},$$

а использование соотношения $\langle|P_{tr}|^2\rangle = 1-\langle|R(L)|^2\rangle$ позволяет определить и коэффициент прохождения через слой двухфазного течения. Приведем асимптотическое выражение [12] $(L-L_0)\tilde{D}/4 \gg 1$, когда $\langle|P_{tr}|^2\rangle \approx 0{,}5\pi^{5/2}\exp[-(L-L_0)\tilde{D}/4](4/\tilde{D}(L-L_0))^{3/2}$.

Показатель коэффициента прохождения $\tilde{D}(L-L_0)$ тесно связан с показателем Ляпунова δ ($\delta = \tilde{D}/4$), являвшимся предметом численных расчетов, представленных в [5]. Сопоставление этих величин демонстрирует хорошее совпадение как в функциональной зависимости $\tilde{D}\sim\omega^2$ (для длинноволнового режима ($\lambda_m \gg l_f, l_g$) в классификационной схеме авторов [5]), так и в порядке величин.

К сожалению, прямое сравнение с экспериментальными данными [4] не представляется возможным по следующим причинам. Во-первых, в условиях [4] неприменимо приближение быстрых осцилляций для коэффициента отражения, поскольку при длительности возмущений $\tau \sim 15 \div 500$ мс, соответствующие длины волн $\lambda_m \approx c_m\tau$ оказываются сопоставимыми с протяженностью рабочего участка ударных труб (0,8 и 2,5 м).

Во-вторых, что более существенно, различие в импедансных характеристиках жидкости и газа столь значительно, что для этих длин волн рассеяние на флуктуациях остается сильным. Так, коэффициент диффузии $\tilde{D}$, имеющий размерность обратной длины, для условий [4] $\tau = 20$ мс, $l_g = 0{,}04$ м, $\varphi = l_g/(l_g+l_f) = 0{,}3$ по порядку величины равен 3000 м$^{-1}$ и значительно превосходит l_f^{-1}, l_g^{-1}, что указывает на неприменимость предположения, позволившего совершить переход к (6). Возмущение оказывается недостаточно длинноволновым, чтобы характер его взаимодействия с флуктуациями имел вид диффузионного процесса.

Стохастический параметрический резонанс в двухфазной среде снарядной структуры. Рассмотрим статистические характеристики акустического поля внутри двухфазной среды. Как мы уже убедились, метод усреднения по быстрой переменной весьма эффективен для длин волн $l_f, l_g \ll \lambda_m$, $\lambda_m \ll 1/\tilde{D}$. Последнее условие означает, что флуктуации акустических характеристик среды в определенном смысле малы. Однако не все пространственные гармоники этих флуктуаций играют одинаковую роль. Воспользуемся формальной аналогией между уравнением для коэффициента отражения (3) и уравнением линейного осциллятора с флуктуирующими параметрами, роль собственной частоты которого играет k_m^2 [12]. Поскольку возмущение мало, можно считать, подобно тому как это предполагается в теории параметрического резонанса, что существенное влияние на распространение волн в двухфазной среде будут оказывать флуктуации либо с малыми длинами волн ($q \ll k_m$), либо с волновыми векторами $\pm 2k_m + q$. Наличие резонансных конфигураций приведет к появлению характеристик волнового поля, нарастающих в глубь снарядного течения. Подкрепим приведенные рассуждения формальными вычислениями.

Оказывается возможным [8] выразить такую характеристику, как интенсивность звукового поля $I(z, L) = P^*(z, L)P(z, L)$, через значения коэффициента отражения R и тем самым существенно использовать результаты предыдущего раздела. Действительно, на основе первого уравнения системы (3) получаем следующее интегральное представление $I(z, L)$:

$$I(z,L) = I(z,z)\exp\Big\{ -i\int\limits_z^L \frac{k_2(z_2^2 - z_1^2)}{2z_1z_2}(R(L') - R^*(L'))\,dL'\Big\},$$

а из второго уравнения — интегральное тождество

$$\frac{(1-|R(L)|^2)}{(1-|R(z)|^2)} = \exp\Big\{ -i\int\limits_z^L \frac{k_2(z_2^2 - z_1^2)}{2z_1z_2}(R(L') - R^*(L'))\,dL'\Big\}.$$

В результате имеем $I(z, L) = I_0(1 + R(z))(1 + R^*(z))(1 - |R(L)|^2)/(1 - |R(z)|^2)$, где I_0 — интенсивность падающей волны; звездочка означает комплексное сопряжение. Как и выше, удобно перейти от переменной ρ к $u = (1+\rho^2)/(1-\rho^2)$ и выделить в явном виде зависимость от быстро меняющейся фазы χ_z:

$$I(z,L) = 2I_0\Big[u_z + \sqrt{u_z^2 - 1}\cos\chi_z\Big]/(1 + u_L).$$

Поскольку анализируемый эффект реализуется на расстояниях, много больших длины волны, целесообразно рассматривать только медленно меняющуюся часть $I(z, L)$, т. е. перейти к усредненным по фазе величинам, которые будем помечать индексом a. Так [8], $I_a(z,L) = 2I_0u_z/(1+u_L)$, $I_a^2(z,L) = 2I_0^2(3u_z^2 - 1)/(1+u_L)^2$, ..., $I_a^n(z,L) = g_n(u_z)/(1+u_L)^n$ ($g_n(u)$ — полином степени n от u).

Моменты интенсивности могут быть найдены в квадратурах на основе решения уравнения ЭФП (8). Однако, поскольку в соответствующих выкладках используется весьма специфический аппарат (преобразование Меллера — Фока), приведем лишь окончательный результат:

$$\langle I_a^n(z,L)\rangle = \pi\exp[-\tilde{D}(L-z)/4]\int\limits_0^\infty d\mu\mu\frac{\operatorname{sh}\mu\pi}{\operatorname{ch}\mu\pi}K_n(\mu)\exp[-\mu^2\tilde{D}(L-z)]\times$$

$$\times\int\limits_1^\infty du g_n(u)P_{-1/2+i\mu}(u)W_z(u).$$

Здесь $W_z(u)$ — решение (8) при $L = z$; $P_{-1/2+i\mu}(u)$ — функция Лежандра первого рода; $K_n(\mu) = \operatorname{ch}\pi\mu\pi^{-1}\int\limits_1^\infty dx(1+x)^{-n}P_{-1/2+i\mu}(x)$. Не теряя общности, мы совместили начало координат с левой границей среды $L_0 = 0$.

Опишем асимптотическое поведение интенсивности $L\tilde{D} \gg 1$, при этом закономерности изменения $\langle I_a^n\rangle$ будут носить общий характер, а вся специфика снарядного течения состоит в условии реализации приведенного выше неравенства. Пространственное распределение интенсивности и ее высших моментов различается коренным образом. Так, согласно [13],

$$\langle I_a\rangle = \theta\Big(\frac{z}{L} - \frac{1}{2}\Big)\begin{cases} 0 & (z/L < 0{,}5),\\ 0{,}5 & (z/L = 0{,}5),\\ 1 & (0{,}5 < z/L).\end{cases}$$

Более аккуратная оценка [14] показывает, что переходная зона имеет размеры $\sim L^{1/2}$.

Для высших моментов слой среды разбивается на три области [8]: при $0 \leqslant z/L \leqslant 0{,}5(1 - \sqrt{1 - n^{-2}})$ моменты экспоненциально малы, при $0{,}5(1 - \sqrt{1 - n^{-2}}) \leqslant z/L \leqslant (1 - 1/(2n))$ экспоненциально велики и достигают своего максимума при $z/L = 0{,}5\langle I_x^n \rangle_{\max} \approx \exp[\tilde{D}L(n^2 - 1)/4]$, при $(1 - 1/(2n)) < z/L \leqslant 1$ они стремятся к единице по экспоненциальному закону.

При интерпретации поведения моментов интенсивности следует отметить, что нарастание высших моментов в центральной области среды отнюдь не означает экспоненциального роста энергетических характеристик акустического поля. Поток энергии

$$J = \frac{1}{4}\,(Pv^* + vP^*) = \frac{1}{2}\,\frac{(1 - |R(z)|^2)\,I(z, L)}{(1 + R(z))(1 + R^*(z))z_1}$$

есть интеграл движения и для каждой реализации является постоянной величиной во всей области снарядной структуры.

Рост моментов соответствует наличию выбросов в интенсивности, что подтверждается результатами численного моделирования [8]. Это обстоятельство может оказаться весьма существенным и приводить к разрушению газовых снарядов при падении на среду волны не очень значительной интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уоллис Г.** Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972.
2. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1983.
3. **Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.** Волны в жидкости с пузырьками // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 17.
4. **Лежнин С. И., Мулляджанов И. И., Накоряков В. Е. и др.** Эволюция слабонелинейных возмущений в воздуховодяной смеси снарядной структуры // ПМТФ. 1989. № 6. С. 91–98.
5. **Sornette D., Legrand O.** Acoustic waves propagation in one-dimensional stratified gas-liquid media: The different regimes // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 92, N 1. P. 296–308.
6. **Лежнин С. И.** Распространение длинноволновых возмущений при снарядном режиме течения двухфазной среды // Исследования по гидродинамике и теплообмену. Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1980.
7. **Гардинер К. В.** Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
8. **Кляцкин В. И.** Метод погружения в теории распространения волн. М.: Наука, 1986.
9. **Бреховских Л. М., Годин О. А.** Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
10. **Pokusaev B. G., Lezhnin S. I., Pribaturin N. A.** Waves in gas liquid medium of slug structure // Russian J. Eng. Thermophysics. 1991. V. 1, N 4. P. 259–290.
11. **Кляцкин В. И.** Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
12. **Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А.** Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
13. **Газарян Ю. Л.** Об одной задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 3. С. 1856–1862.
14. **Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А.** Многократное рассеяние волн в случайно-неоднородной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22, № 5. С. 566–573.

Поступила в редакцию 27/III 1995 г.,
в окончательном варианте — 27/IX 1995 г.