

(кривые 2, 3 рис. 1, ε). При всех нагружениях замечен рост деформаций на участке разгрузки по напряжениям, а также различие кривых нагружения и разгрузки при $\sigma < f(\varepsilon)$.

На рис. 2, $a - \varepsilon$ представлены результаты статистической обработки экспериментальных данных для песчаного грунта при пятикратном нагружении. Кривые рис. 2, $a - \varepsilon$ иллюстрируют зависимости $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ при первых трех нагружениях, кривые 1—5 рис. 2, ε — зависимости $\sigma(\varepsilon)$ при пяти нагружениях. Каждая из экспериментальных точек, как и ранее, — среднее по результатам 15 измерений. Доверительные интервалы определены с надежностью 0,95. Кривая 6 рис. 2, ε — статическая диаграмма сжатия $f(\varepsilon)$ ($\dot{\varepsilon} = 0,5 \cdot 10^{-5}$ 1/с), штриховая линия — предельная динамическая диаграмма $\varphi(\varepsilon)$ для того же грунта по [4]. Средний доверительный интервал в опытах составил $\delta = 0,10 - 0,15$ и практически не отличался от [1, 2]. Средняя скорость деформации при первом нагружении находилась в пределах $\dot{\varepsilon} = 10$ 1/с и также практически не отличалась от испытаний в [1, 2]. Соответственно и кривая $\sigma(\varepsilon)$ (7), полученная в [1, 2] при первом нагружении, лежит в пределах доверительных интервалов кривой 1 рис. 1, ε . Как и в предыдущем случае, видно, что при повторных нагружениях при практически одинаковых напряжениях максимальные деформации растут, что подтверждает существенность влияния эффектов вязкости на деформативность песчаных грунтов естественной влажности.

Приведенные результаты представляются особенно важными с точки зрения дальнейшего уточнения количественных оценок механических характеристик грунтов при кратковременных динамических нагрузках в рамках вязкопластических моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Котов А. И., Нарожная З. В., Рыков Г. В., Сутырин В. П. Экспериментальные исследования сжимаемости песчаных грунтов и условия пластичности при кратковременных динамических нагрузках // ПМТФ. — 1976. — № 5.
2. Рыков Г. В., Скобеев А. М. Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. — М.: Наука, 1978.
3. Нарожная З. В., Рыков Г. В. О погрешностях измерения напряжений при кратковременных нагрузках // ПМТФ. — 1972. — № 4.
4. Рыков Г. В. Результаты определения предельных динамических диаграмм сжатия для песчаных грунтов и глины // ПМТФ. — 1988. — № 6.
5. Рыков Г. В., Новгородов А. Ф., Шейнин А. Н., Передерий В. В. Автоматизированная система сбора и обработки измерительной информации «Парус-2» // Приборы и системы управления. — М., 1988. — № 9.

г. Москва

Поступила 22/IX 1988 г.,
в окончательном варианте — 2/XII 1988 г.

УДК 624.131+539.215

И. Н. Бычков, Г. В. Рыков, И. А. Самсонова

К ВОПРОСУ О МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ГРУНТОВ С УЧЕТОМ ИХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В [1, 2] изложены метод и результаты определения механических характеристик грунтов с учетом их вязкопластических свойств при кратковременных динамических нагрузках. Фактические количественные характеристики достаточно обоснованы только применительно к однократному нагружению.

Ниже излагаются результаты определения механических характеристик песчаных и глинистых грунтов с учетом их циклического нагружения. При этом потребова-

лось внесение усовершенствований в формулировку модели грунта [1, 2]. Кроме того, учтены новые данные о предельных динамических диаграммах [3], а также дополнительные экспериментальные результаты по циклическому динамическому нагружению [4] для этих грунтов.

Предполагается, что сжимаемость грунта при одноосном динамическом сжатии описывается, как и в [1, 2], законом деформирования вида [5]

$$(1) \quad \partial \varepsilon / \partial t = (1/E(\varepsilon, \varepsilon_*)) \partial \sigma / \partial t + g(\sigma, \varepsilon), \quad E(\varepsilon, \varepsilon_*) = \begin{cases} E(\varepsilon), & \sigma > f(\varepsilon, \varepsilon_*), \\ E_*(\varepsilon, \varepsilon_*) \sigma \leq f(\varepsilon, \varepsilon_*). \end{cases}$$

Здесь $g(\sigma, \varepsilon)$, $E(\varepsilon)$, $E_*(\varepsilon, \varepsilon_*) = f'_\varepsilon(\varepsilon, \varepsilon_*)$ — монотонно возрастающие функции своих аргументов; $g > 0$ при $\sigma - f(\varepsilon, \varepsilon_*) > 0$; $g \equiv 0$ при $\sigma - f(\varepsilon, \varepsilon_*) \leq 0$; $f(\varepsilon, \varepsilon_*)$ — статическая диаграмма сжатия грунта (при $\dot{\varepsilon} = \partial \varepsilon / \partial t = 0$); ε_* — максимальная деформация, соответствующая началу разгрузки.

Из (1) при $\dot{\varepsilon} = \infty$ имеем предельную динамическую диаграмму сжатия $\sigma = \int_0^\varepsilon E(\xi) d\xi = \varphi(\varepsilon)$, а при $\dot{\varepsilon} = 0$ — статическую $\sigma = f(\varepsilon, \varepsilon_*)$, у которой есть различные ветви при нагружении и разгрузке, определяемой условием $\sigma - f(\varepsilon, 0) \leq 0$.

Функции $\varphi(\varepsilon)$ и $f(\varepsilon, 0)$ в [1, 2] получены в виде

$$\varphi(\varepsilon) = E_1(\varepsilon + m_1 \varepsilon^{v_1}), \quad f(\varepsilon, 0) = K_1(\varepsilon + m_2 \varepsilon^{v_2})$$

(E_1 , K_1 , m_1 , m_2 , v_1 , v_2 — экспериментальные коэффициенты, приведенные для песков и глины в [3] с учетом большего диапазона нагрузок по сравнению с [1, 2]; табл. 1: строки 1 и 2 — песок с массовой плотностью $\rho_0 = 1,50-1,52$ г/см³, весовой влажностью $w = 0,05$ и $0,15$ соответственно; 3 — плотная глина с $\rho_0 = 1,70$ г/см³, $w = 0,22$).

Диаграмма $f(\varepsilon, \varepsilon_*)$ при разгрузке существенно уточнена по сравнению с [1, 2] и с учетом циклического нагружения представлена как

$$(2) \quad f(\varepsilon, \varepsilon_*) = (\varepsilon - \varepsilon_0) [K_* + (\sigma_* / (\varepsilon_* - \varepsilon_0) - K_*) e^{-\alpha_* (\varepsilon_* - \varepsilon_0)}].$$

Здесь ε_0 — остаточная деформация, отвечающая разгрузке при предыдущем нагружении; K_* — начальный модуль деформации при повторном нагружении (см. табл. 1); α_* — коэффициент, вычисляемый из условия непрерывности и гладкости кривой (2) в точке $\varepsilon = \varepsilon_*$, $\sigma = \sigma_* = f(\varepsilon_*, 0)$:

$$\alpha_* = \left[\frac{(\varepsilon_* - \varepsilon_0) E_* - \sigma_*}{\sigma_* - K_*(\varepsilon_* - \varepsilon_0)} \right] \frac{1}{\varepsilon_* - \varepsilon_0}, \quad E_* = \partial \varphi(\varepsilon) / \partial \varepsilon|_{\varepsilon = \varepsilon_*}$$

На основе обработки экспериментальных результатов [1, 2, 4] также установлена зависимость $\varepsilon_0(\varepsilon_*)$ при циклическом нагружении (рис. 1):

$$\varepsilon_0 = k_* (\varepsilon_* + m_* \varepsilon_*^2)$$

(k_* , m_* — экспериментальные коэффициенты (см. табл. 1)). На рис. 1 кривые 1—3 соответствуют данным строк 1—3 табл. 1.

В отличие от [1, 2] функция $g(\sigma, \varepsilon)$ при обработке результатов циклических динамических испытаний принималась в виде

$$(3) \quad g = \eta(\sigma) (\sigma - f(\varepsilon, \varepsilon_*))^\alpha, \quad \eta = \begin{cases} \eta_0, & \partial \sigma / \partial t \geq 0, \\ \eta_0 e^{-\alpha(\sigma_{**} - \sigma)}, & \partial \sigma / \partial t < 0 \end{cases}$$

(σ_{**} — максимальное напряжение, до-

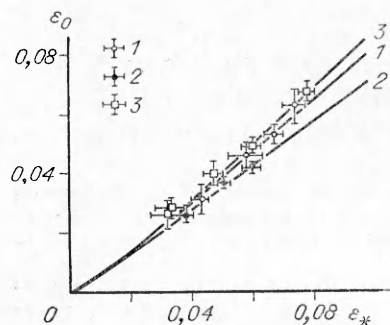


Рис. 1

Таблица 1

№ п/п	$\frac{E_1, \text{ МПа}}{K_1, \text{ МПа}}$	$\frac{m_1}{m_2}$	$\frac{\nu_1}{\nu_2}$	$c_0, \text{ м/с}$	$K_*, \text{ МПа}$	k_*	m_*
1	$\frac{100}{15}$	$\frac{137,3}{117,6}$	$\frac{1,96}{2,37}$	250	173	0,74	0,94
2	$\frac{321,6}{30^*)}$	$\frac{35,1}{160^*)}$	$\frac{1,83}{2,50^*)}$	460	153	0,70	0,00
3	$\frac{2992}{10}$	$\frac{0,6}{2600,0}$	$\frac{1,66}{3,00}$	1189	200	0,75	1,52

*) Коэффициенты получены на основе обобщения экспериментальных данных статических испытаний [2, 3].

стигнутое в данном цикле нагружения, κ , η_0 , α — экспериментальные коэффициенты).

Методика определения κ , η_0 , α основана на выборе такого их сочетания, которое, как и в [1, 2], минимизирует среднеквадратическое отклонение δ расчетных кривых $\varepsilon(t)$ от среднестатистических, полученных в эксперименте при циклическом динамическом нагружении:

$$(4) \quad \delta = \frac{\sqrt{D}}{\sum_{i=1}^s \sum_{j=j_0}^n \langle \varepsilon_{ij} \rangle}, \quad D = \sum_{i=1}^s \sum_{j=j_0}^n [\varepsilon_{ij}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) - \langle \varepsilon_{ij} \rangle]^2,$$

где $\kappa_1 = \kappa$, $\kappa_2 = \eta_0$, $\kappa_3 = \alpha$ — параметры минимизации; $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \varepsilon_{il}(t_j)$ —

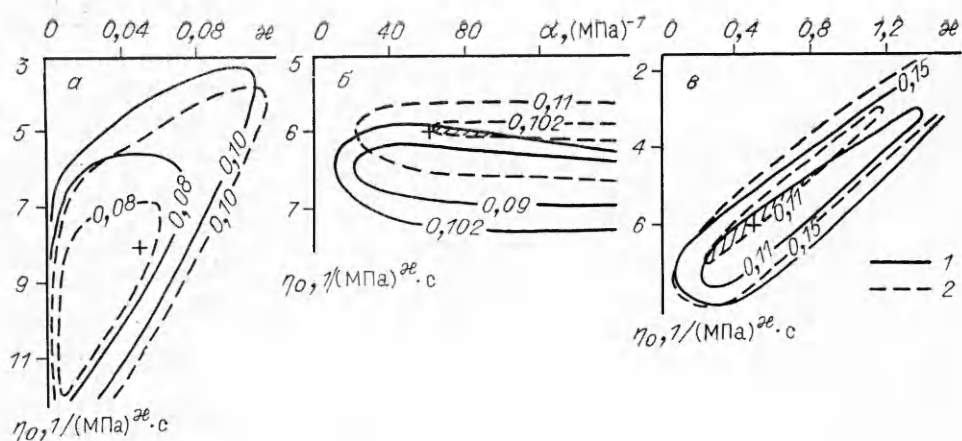
среднее значение деформаций при $t = t_j$ по результатам серии испытаний при определенном режиме деформирования; m — количество опытов в серии; j_0 — номер интервала, отвечающий моменту установления режима квазистатичности [2]; s — количество циклов нагружения одного и того же образца в серии; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i(t_j)$ — расчетное значение деформаций для данных моментов времени $t = t_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), n — количество шагов дискретизации по времени при обработке результатов экспериментов.

Расчетная зависимость $\varepsilon(t)$ вычисляется из (1) путем интегрирования при известной из эксперимента нагрузке $\sigma(t)$:

$$(5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{j+1} &= \varepsilon_j + \Delta \varepsilon_{j+1/2}, \\ \Delta \varepsilon_{j+1/2} &= \frac{1}{E(\tilde{\varepsilon}_{j+1/2}, \varepsilon_*)} \Delta \sigma_{j+1/2} + \eta [\sigma_{j+1/2} - f(\tilde{\varepsilon}_{j+1/2}, \varepsilon_*)] \Delta t, \\ \Delta \sigma_{j+1/2} &= \sigma_{j+1} - \sigma_j, \quad \sigma_{j+1/2} = (\sigma_j + \sigma_{j+1})/2 \\ (\varepsilon_j &\equiv \varepsilon(t_j), \quad \tilde{\varepsilon}_{j+1/2} \equiv \tilde{\varepsilon}(t_j + (1/2)\Delta t), \quad \sigma_{j+1/2} \equiv \sigma(t_j + (1/2)\Delta t)). \end{aligned}$$

В связи с тем что уравнение (1) не может быть записано в явном виде относительно ε , в соотношение (5) входит неявная величина $\tilde{\varepsilon}_{j+1/2}$, значение которой находится путем итераций до тех пор, пока ее отклонение от предыдущего не станет меньше 10^{-5} (начальное значение $\tilde{\varepsilon}_{j+1/2} = \varepsilon_j$). Шаг дискретизации Δt при проведении экспериментов и обработке результатов с использованием автоматизированной системы в [4] составлял $0,2 \cdot 10^{-3}$ с. При обработке данных [1, 2] шаг был существенно больше. Поэтому промежуточные значения нагрузки $\sigma(t)$ в этих случаях определялись с помощью интерполяционной формулы Лагранжа. Предполагалось, что искомыми значениями κ , η_0 , α являются те, для которых выполняется условие $\delta \leq \delta_0$ (δ_0 — средний (по всему процессу) относительный доверительный интервал для данной серии эксперимента (точность эксперимента)).

Поиск η_0 , κ , α проводился в следующем порядке. Вначале на основе минимизации (4) находились коэффициенты η_0 , κ для процесса нагружения



Р и с. 2

при $\partial\sigma/\partial t \geq 0$ ($\alpha = 0$ согласно (3)). Результатом расчета на этом этапе вычислений являются линии уровня, характеризующие распределение ошибки (4) в плоскости коэффициентов κ , η_0 . Каждое из воздействий рассматривается как самостоятельное, значения ϵ_0 задаются из опытов, а дисперсии суммируются. На втором этапе расчетов производится минимизация функции (4) по параметрам η_0 и α при фиксированном κ , принятом на основе предыдущего этапа. При этом определяется α и уточняется η_0 . На третьем этапе при выбранном α проводится повторная минимизация функции (4) по κ , η_0 , причем каждый последующий цикл рассматривается как продолжение предыдущего, а начальная деформация для каждого последующего цикла рассчитывается.

На рис. 2, а—в представлены результаты такого рода расчетов для двух серий испытаний песчаного грунта с $\rho_0 = 1,50\text{--}1,52$ г/см³ и $w = 0,05$ по [1, 2] (кривые 1) и по [4] (кривые 2). Цифры на линиях уровня соответствуют отклонениям (4). Точность эксперимента в опытах составляла $\delta_0 = 0,10\text{--}0,12$.

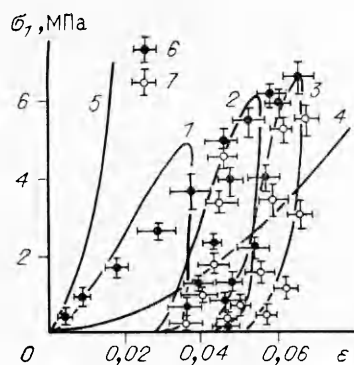
На рис. 2, а (первый этап минимизации) видно, что κ может быть принята равной 0,5. Результаты расчетов на втором этапе минимизации (рис. 2, б) свидетельствуют о том, что минимальной погрешности δ отвечает $\alpha = 60$ при $\eta_0 = 6,0$. Из третьего этапа минимизации (рис. 2, в) следует, что в качестве расчетных значений κ и η_0 могут быть взяты $\kappa = 0,5$, $\eta_0 = 6,0$.

Механические характеристики песчаных грунтов и глины при циклическом динамическом нагружении, полученные указанным способом с учетом опубликованных данных о предельных диаграммах [3], приведены в табл. 2.

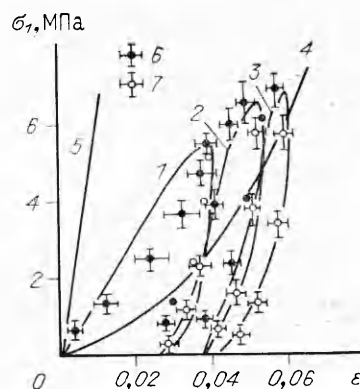
На рис. 3—5 представлены результаты сравнения расчетных кривых $\sigma(\epsilon)$ с экспериментальными значениями из [1—4]. Для песка с $\rho_0 = 1,50\text{--}1,52$ г/см³ $w = 0,05$ (рис. 3) и $w = 0,15$ (рис. 4), а для плотной глины с $\rho_0 = 1,70$ $w = 0,22$ (рис. 5). На рис. 3—5 линии 1—3 — расчет для трех последовательных нагружений образцов, 4 — статическая диаграмма сжатия $f(\epsilon, 0)$, 5 — предельная динамическая диаграмма $\phi(\epsilon)$. Точки 6, 7 — среднестатистические экспериментальные значения с доверительными интервалами, найденными с надежностью 0,95 (6 — нагружение, 7 — раз-

Т а б л и ц а 2

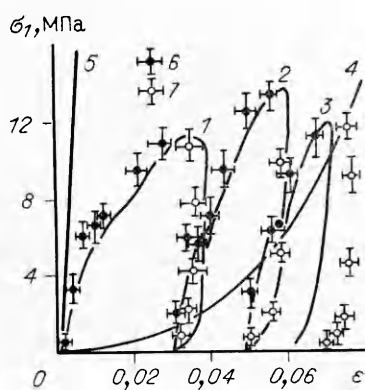
№ п/п	$\eta_0, \frac{1}{(\text{МПа})\kappa \cdot \text{с}}$	κ	$\alpha, (\text{МПа})^{-1}$	δ	δ_0
1	6,0	0,5	60	0,11	0,12
2	8,0	0,5	20	0,08	0,10
3	5,0	0,5	5	0,10	0,10



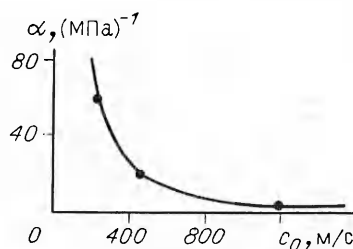
Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

грузка в каждом из циклов). Видно, что в большинстве случаев расчетные кривые $\sigma(\epsilon)$ лежат в пределах доверительных интервалов. В среднем точность аппроксимации 8—11 % (см. табл. 2). Более существенное расхождение имеет место только при разгрузке на третьем цикле нагружения образцов из плотной глины (см. рис. 5). Это связано с недостаточной точностью определения статической диаграммы для данного грунта при $\epsilon \geq 0,06$, которая в этом диапазоне деформаций принята при расчетах на основе экстраполяции экспериментальных результатов [3], полученных фактически в диапазоне $0 \leq \epsilon < 0,06$.

В заключение отметим, что есть некоторая закономерность изменения коэффициента α в зависимости от скорости распространения слабых возмущений c_0 в рассмотренных грунтах (рис. 6).

Таким образом, приведенный закон деформирования, учитывающий изменение вязких свойств песчаных и глинистых грунтов при разгрузке, позволяет с достаточной степенью точности описывать циклическое динамическое нагружение грунтов при одноосном сжатии в условиях плоской деформации. При этом результаты определения коэффициентов κ и η_0 отличаются от представленных в [1, 2], что связано как с уточнением данных о предельных динамических диаграммах сжатия рассмотренных грунтов, так и с учетом особенностей их циклического нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нарожная З. В., Рыков Г. В. О методе и результатах определения механических грунтов с учетом их вязкопластических свойств при кратковременных динамических нагрузках // ПМТФ. — 1977. — № 5.
2. Рыков Г. В., Скобеев А. И. Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. — М.: Наука, 1978.
3. Рыков Г. В. Результаты определения предельных динамических диаграмм сжатия для песчаных грунтов и глины // ПМТФ. — 1988. — № 6.

4. Новгородов А. Ф., Рыков Г. В., Шейнин А. Н. Экспериментальные исследования сжимаемости грунтов при кратковременных динамических нагрузках с использованием автоматизированной системы // ПМТФ. — 1990. — № 3.
5. Критеску Н. О распространении продольных волн в тонких упруговязкопластических стержнях // Механика. — М., 1966. — № 3.

г. Москва

Поступила 22/IX 1988 г.]

УДК 539.214; 539.374

Р. А. Каюмов

МЕТОД ВАРИАЦИИ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ О ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Одной из задач теории идеальной пластичности является проблема отыскания нагрузок, называемых предельными, при которых конструкция перестает сопротивляться воздействию внешних сил. Их двустороннюю оценку можно получить при помощи статической и кинематической теорем [1]. Ниже излагается методика, основанная на этих теоремах и позволяющая последовательно сближать верхнюю и нижнюю границы предельной нагрузки.

Пусть условие текучести имеет вид (критерий Мизеса — Хилла)

$$(1) \quad I = \sigma^T A \sigma = 1,$$

где σ — вектор-столбец, составленный из компонент тензора напряжений; A — матрица характеристик пластического течения; значок t означает операцию транспонирования.

Уравнения равновесия внутри тела и на ее границе запишем в операторной форме

$$(2) \quad D\sigma(x) = q(x), \quad q(x) = q_0(x)t.$$

Здесь D — матрица линейных дифференциальных операторов; $q_0(x)$ — нормированная внешняя нагрузка; t — параметр нагружения; x — радиус-вектор точки тела.

Отыскивается коэффициент t_* , при достижении которого конструкция теряет свою несущую способность.

Нижняя оценка. Решение уравнения (2) представимо в следующем символическом виде: $\sigma = \sigma_0 t$, $\sigma_0 = D^{-1}q_0$. Вычислим функцию I : $I = I_0 t^2$, $I_0 = \sigma_0^T A \sigma_0$. Пусть при $t = t_-$ напряжения σ достигли поверхности текучести в какой-либо точке тела. Тогда

$$(I_0)_{\max} t_-^2 = 1.$$

Поскольку уравнения равновесия удовлетворены, а напряжения не вышли за поверхность текучести (1), то согласно статической теореме

$$(3) \quad t_* \geq t_- = 1 / \sqrt{(I_0)_{\max}}.$$

Как видно из (3), для лучшей оценки необходимо искать поле напряжений, минимизирующее $(I_0)_{\max}$ (см. также [2, 3]). Таким образом, надо найти

$$(4) \quad I_* = \min_{\sigma_0} [(I_0)_{\max}].$$

Основная идея работы в том [4], что вместо поля σ_0 отыскиваются два поля — поле деформаций $\varepsilon = Lu$ (L — линейный дифференциальный оператор, u — вектор перемещений) и матрица упругих постоянных $E(x)$ некоторого фиктивного закона Гука $\sigma_0 = E\varepsilon$. Появляется возможность варьировать поле E , например, искать его в виде

$$E = E_0(x)\lambda(x).$$