УДК 539.375

ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ВТУЛКИ КОНТАКТНОЙ ПАРЫ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН С ПЛАСТИЧЕСКИМИ КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ

В. М. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1073 Баку, Азербайджан
E-mail: irakon63@hotmail.com

Рассматривается задача механики контактного разрушения для втулки фрикционной пары. Считается, что при многократном возвратно-поступательном движении плунжера происходит разрушение материала втулки при трении, вызванное контактным взаимодействием и сопровождаемое совместным действием нагрузки и температуры. Принято, что вблизи поверхности контакта втулки имеется несколько произвольно размещенных прямолинейных трещин с концевыми зонами. Исследуется напряженное состояние втулки при наличии областей, в которых берега трещин (или их часть) вошли в контакт.

Ключевые слова: втулка контактной пары, разрушение, трещина, пластическое течение.

1. Практика эксплуатации фрикционных пар втулка — плунжер показывает, что разрушение материала втулки происходит на пятнах касания в тонких приповерхностных слоях в результате образования микротрещин. Поэтому на стадии проектирования конструкций подвижных сопряжений необходимо учитывать, что в отдельных элементах конструкции (втулка, плунжер) могут возникнуть трещины, и проводить предельный анализ деталей контактной пары, чтобы установить, что предполагаемые исходные трещины, расположенные наиболее неблагоприятным образом, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы. Размер исходной минимальной трещины следует рассматривать как проектную характеристику материала.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние втулки при работе контактной пары. Пусть во втулке вблизи поверхности трения имеется N прямолинейных трещин с концевыми зонами длиной $2l_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$).

В центрах трещин разместим начала локальных систем координат $x_kO_ky_k$, оси O_kx_k которых совпадают с направлениями трещин и образуют углы α_k с осью Ox (рис. 1). Высокая концентрация напряжений вблизи вершины трещины в некоторых случаях приводит к разупрочнению материала, окружающего трещину. Это может проявляться в образовании зон пластического течения. Анализ экспериментальных данных, а также условий равновесия и развития трещины с учетом взаимодействия ее берегов и зон разупрочнения приводит к модели трещины с концевой зоной (зоной предразрушения), в которой имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. В ряде работ рассматривались модели трещин, в которых принимается, что в концевых зонах, размер которых соизмерим с длиной трещины, имеет место пластическое течение при постоянном напряжении (см. обзор [1]).

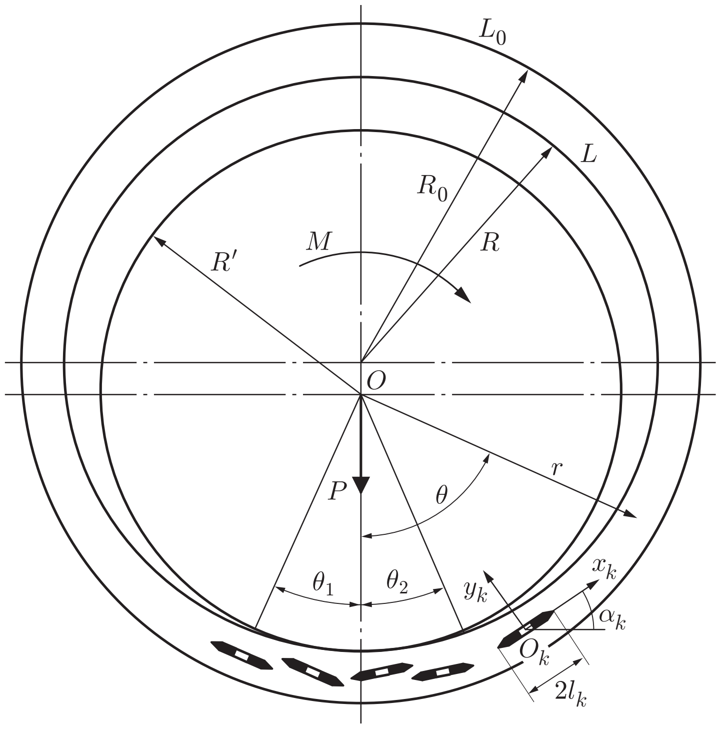

Рис. 1. Расчетная схема задачи механики контактного разрушения

Выделим участки трещины d_{1k} и d_{2k} (концевые зоны), примыкающие к ее вершинам, в которых для данного материала имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется путем введения между ее берегами линий пластического скольжения (вырожденных полос пластичности). Размеры концевых зон зависят от вида материала.

Так как концевые зоны и толщина зоны пластического течения малы по сравнению с остальной (упругой) частью втулки, их можно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют по некоторому закону и препятствуют раскрытию трещины.

При действии контактного давления и сил трения (внешней нагрузки) на втулку в концевых зонах, соединяющих берега трещины, возникают нормальные $\sigma_{y_k}(x_k) = \sigma_s$ и касательные $\tau_{x_k y_k}(x_k) = \tau_s$ усилия. Таким образом, в концевых зонах к берегам трещины приложены нормальные и касательные напряжения, равные σ_s и τ_s соответственно. Размеры концевых зон заранее неизвестны и подлежат определению при решении рассматриваемой задачи механики разрушения. Вне концевых зон (во внутренней области трещины) берега трещины свободны от нагрузки.

Введем полярную систему координат в центре концентрических окружностей L и L_0 с радиусами R и R_0 соответственно.

Краевые условия рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

— при $r = R$

$$\sigma_r = -p(\theta), \qquad \tau_{r\theta} = -fp(\theta) \tag{1.1}$$

на контактной площадке,

$$\sigma_r = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0 \tag{1.2}$$

вне площадки контакта;

— при $r = R_0$

$$v_r = 0, \qquad v_\theta = 0; \tag{1.3}$$

— на берегах трещин

$$\begin{aligned} &\sigma_{y_k}=0, \qquad \tau_{x_k y_k}=0 \qquad \text{на} \quad L'_k \qquad (k=1,2,\dots,N),\\ &\sigma_{y_k}=\sigma_s, \qquad \tau_{x_k y_k}=\tau_s \qquad \text{на} \quad L''_k. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь f — коэффициент трения контактной пары; v_r, v_θ — радиальная и касательная составляющие вектора смещений соответственно; σ_r, $\tau_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений; L'_k — свободные берега k-й трещины; L''_k — берега k-й трещины с концевыми зонами, в которых имеет место пластическое течение. В (1.1)–(1.4) принято, что в зоне контакта касательное напряжение связано с нормальным давлением $p(\theta)$ законом Амонтона — Кулона.

Контактное давление заранее неизвестно и подлежит определению при решении задачи механики контактного разрушения. Для решения поставленной задачи необходимо совместно решить износоконтактную задачу о вдавливании плунжера в поверхность втулки и задачу механики разрушения.

Пусть к внутренней поверхности втулки с механическими характеристиками G (модуль сдвига) и μ (коэффициент Пуассона) на некотором неизвестном заранее участке вдавливается плунжер с механическими характеристиками G_1 и μ_1. Считается, что наружная поверхность втулки подкреплена жесткой обоймой. Задача решается в условиях плоской деформации.

Условие, связывающее перемещения втулки и плунжера, записывается в следующем виде [2, 3]:

$$v_1+v_2=\delta(\theta) \qquad (\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2). \tag{1.5}$$

Здесь $\delta(\theta)$ — осадка точек поверхности втулки и плунжера, определяемая формой внутренней поверхности втулки и плунжера, а также величиной прижимающей силы P; $\theta_2-\theta_1$ — величина угла (площадка) контакта.

Касательные усилия (усилия трения) $\tau_{r\theta}(\theta,t)$ способствуют тепловыделению в зоне контакта. Общее количество тепла, выделяемого в единицу времени, пропорционально мощности сил трения, а количество тепла, выделяемого в точке зоны контакта с координатой θ, равно

$$Q(\theta,t)=Vfp(\theta,t)$$

(V — средняя за период скорость перемещения плунжера относительно втулки).

Общее количество тепла $Q(\theta,t)$ расходуется на повышение температуры втулки $Q_b(\theta,t)$ и плунжера $Q_1(\theta,t)$:

$$Q=Q_b+Q_1.$$

Для радиального перемещения втулки имеем

$$v_1=v_{1y}+v_{1u}. \tag{1.6}$$

Здесь v_{1y} — радиальные термоупругие перемещения точек контактной поверхности втулки; v_{1u} — перемещения, вызванные износом поверхности втулки.

Для упрощения задачи перемещения, вызванные смятием микровыступов поверхности втулки, не учитываются.

В виде, аналогичном (1.6), можно записать соотношение для радиального перемещения v_2 плунжера.

Износ деталей контактной пары считается абразивным. Скорость перемещения поверхности при износе материала втулки определяется по формуле [3, 4]

$$\frac{dv_{1u}}{dt}=K_b p(\theta,t), \tag{1.7}$$

где K_b — коэффициент износа материала втулки.

Нагрев втулки происходит в результате трения о ее стенки плунжера при возвратно-поступательном движении. Так как частота движения плунжера достаточно велика, задача рассматривается как стационарная.

Для определения термоупругих перемещений v_{1y} необходимо найти распределение температуры во втулке. Для этого решается задача теплопроводности:

$$\Delta T = 0 \tag{1.8}$$

во втулке,

$$\begin{gathered} A_{T1}\lambda \frac{\partial T}{\partial r} - A_{T2}\alpha_1(T - T_c) = -Q_* \qquad \text{при} \quad r = R, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_2(T - T_c) = 0 \qquad \text{при} \quad r = R_0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности втулки; Δ — оператор Лапласа; α_1 — коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности втулки; α_2 — коэффициент теплообмена наружной поверхности цилиндра с внешней средой при температуре T_c; Q_* — количество тепла, выделившегося при трении, расходуемое на нагрев втулки; на площадке контакта $Q_* = Q_b$, вне площадки контакта $Q_* = 0$; A_{T1} — площадь теплопоглощающей поверхности; A_{T2} — площадь охлаждающей поверхности.

Аналогично ставится задача термоупругости для определения перемещений контактной поверхности плунжера.

Величины θ_1 и θ_2, соответствующие концам участка соприкосновения плунжера с втулкой, неизвестны. Для их определения используем условие [5], согласно которому давление $p(\theta)$ непрерывно стремится к нулю и обращается в нуль, когда точка θ выходит на границу области соприкасания:

$$p(\theta_1) = 0, \qquad p(\theta_2) = 0. \tag{1.10}$$

2. Решение краевой задачи теории теплопроводности ищется методом разделения переменных. Распределение избыточной температуры втулки $t_b = T - T_c$ находим в следующем виде:

$$t_b = C_1 + C_2 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_1^{(k)} r^k + C_2^{(k)} r^{-k}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (A_1^{(k)} r^k + A_2^{(k)} r^{-k}) \sin k\theta.$$

Здесь постоянные C_1, C_2, $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, $A_1^{(k)}$, $A_2^{(k)}$ определяются из граничных условий задачи теплопроводности (1.8), (1.9). Из-за громоздкости эти формулы не приводятся.

Для решения задачи термоупругости используем термоупругий потенциал перемещений [6]. В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений для втулки F определяется из решения дифференциального уравнения

$$\Delta F = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}\, \alpha t_b, \tag{2.1}$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения.

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n \cos n\theta + f_n^* \sin n\theta).$$

Для функций $f_n(r)$ и $f_n^*(r)$ получаются обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых находятся методом вариации постоянных. Определив термоупругий потенциал перемещений для втулки с помощью известных формул [6], вычисляем соответствующие напряжения σ_r^1, σ_θ^1, $\tau_{r\theta}^1$ и перемещения v_r^1, v_θ^1. Найденные напряжения и перемещения для втулки не удовлетворяют краевым условиям (1.1)–(1.4).

Для втулки необходимо найти второе напряженно-деформированное состояние σ_r^2, σ_θ^2, $\tau_{r\theta}^2$, v_r^2, v_θ^2, так чтобы выполнялись краевые условия (1.1)–(1.4). Для определения второго напряженно-деформированного состояния во втулке имеем следующие граничные условия:

— при $r = R$

$$\sigma_r^2 = -p(\theta) - \sigma_r^1, \qquad \tau_{r\theta}^2 = -fp(\theta) - \tau_{r\theta}^1 \tag{2.2}$$

на площадке контакта,

$$\sigma_r^2 = -\sigma_r^1, \qquad \tau_{r\theta}^2 = -\tau_{r\theta}^1 \tag{2.3}$$

вне площадки контакта;

— при $r = R_0$

$$v_r^2 = -v_r^1, \qquad v_\theta^2 = -v_\theta^1; \tag{2.4}$$

— на берегах трещин

$$\begin{aligned} &\sigma_{y_k}^2 = -\sigma_{y_k}^1, && \tau_{x_ky_k}^2 = -\tau_{x_ky_k}^1 && \text{на} \quad L_k', \\ &\sigma_{y_k}^2 = \sigma_s - \sigma_{y_k}^1, && \tau_{x_ky_k}^2 = \tau_s - \tau_{x_ky_k}^1 && \text{на} \quad L_k''. \end{aligned} \tag{2.5}$$

С помощью формул Колосова — Мусхелишвили [5] краевые условия (2.2)–(2.5) задачи можно записать в виде граничной задачи для комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для втулки.

Комплексные потенциалы ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \qquad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z); \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} \Phi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \qquad \Psi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \\ \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{g_k(t)\,dt}{t - z_k}, \qquad \Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-2i\alpha_k}\int_{-l_k}^{l_k}\Big(\frac{\overline{g_k(t)}}{t - z_k} - \frac{\overline{T_k}\,\mathrm{e}^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2}\,g_k(t)\Big)\,dt, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $T_k = t\,\mathrm{e}^{i\alpha_k} + z_k^0$; $z_k = \mathrm{e}^{-i\alpha_k}(z - z_k^0)$; $g_k(x_k)$ — искомые функции, характеризующие скачок перемещений при переходе через соответствующую трещину.

Граничную задачу для отыскания комплексных потенциалов на круговых границах представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - \mathrm{e}^{2i\theta}[\bar\tau\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] = X(\theta) - (\sigma_r^1 - i\tau_{r\theta}^1) - (f_1 - if_2), \\ &\Phi_1(\tau_0) - k_b\overline{\Phi_1(\tau_0)} - \mathrm{e}^{2i\theta}[\bar\tau_0\Phi_1'(\tau_0) + \Psi_1(\tau_0)] = -2G(v_r^1 - iv_\theta^1)' - (f_3 - if_4). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь $k_b = 3 - 4\mu$; $\tau = R\exp(i\theta)$; $\tau_0 = R_0\exp(i\theta)$; $X(\theta) = -(1 - if)p(\theta)$ на площадке контакта, $X(\theta) = 0$ вне площадки контакта;

$$\begin{gathered} f_1 - if_2 = \Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - \mathrm{e}^{2i\theta}[\bar\tau\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)], \\ f_3 - if_4 = \Phi_2(\tau_0) - k_b\overline{\Phi_2(\tau_0)} - \mathrm{e}^{2i\theta}[\bar\tau_0\Phi_2'(\tau_0) + \Psi_2(\tau_0)]. \end{gathered}$$

Для решения краевой задачи (2.8) относительно потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ используем метод степенных рядов. Для этого правые части условий (2.8) разложим в ряды Фурье. После некоторых преобразований получим бесконечную линейную алгебраическую систему относительно коэффициентов a_k и b_k, решение которой записывается в виде

$$a_0 = \frac{(A_0 + A_0' + D_0)R^2 - (F_0 + D_0')R_0^2}{2R^2 - (1 - k_b)R_0^2}, \qquad a_{-1} = \frac{(A_1 + A_1' + D_1)R}{1 + k_b},$$

$$b_{-2}R^{-2} = 2a_0 - A_0 - A_0' - D_0, \qquad b_{-1} = -\frac{k_b(\overline{A_1} + \overline{A_1'} + \overline{D_1}\,)R}{1 + k_b},$$

$$a_k = \frac{(1+k)(R_0^2 - R^2)B_k - \overline{B}_{-k}(R^{-2k+2} + k_bR_0^{-2k+2})}{(1-k^2)(R_0^2 - R^2)^2 - (R^{-2k+2} + k_bR_0^{-2k+2})(R^{2k+2} + k_bR_0^{2k+2})} \qquad (k = \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

$$B_k = (F_k + D_k')R_0^{-k+2} - (A_k + A_k' + D_k)R^{-k+2},$$

$$a_1 = \frac{2(A_1 + A_1' + D_1)R(R_0^2 - R^2)}{(1-k_b)(R^4 + k_bR_0^4)} - \frac{\overline{B}_{-1}}{R^4 + k_bR_0^4},$$

$$b_{k-2}R^{k-2} = (1-k)a_kR^k + \bar{a}_{-k}R^{-k} - (A_k + A_k' + D_k).$$

Здесь использованы следующие разложения:

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \,\mathrm{e}^{ik\theta}, \qquad -(\sigma_r^1 - i\tau_{r\theta}^1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k' \,\mathrm{e}^{ik\theta}, \qquad -(f_1 - if_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \,\mathrm{e}^{ik\theta},$$

$$-2G(v_r^1 - iv_\theta^1)' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \,\mathrm{e}^{ik\theta}, \qquad -(f_3 - if_4) = D_k' \,\mathrm{e}^{ik\theta}.$$

В правые части этих формул входят интегралы от искомых функций $g_k(t)$, а также коэффициенты разложения контактного давления $p(\theta)$.

Функции (2.6), (2.7) должны удовлетворять краевым условиям на берегах трещин (2.5). Из этого условия получаем систему N сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k(x_k)$:

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-l_k}^{l_k} \bigl[R_{nk}(t,x)g_k(t) + S_{nk}(t,x)\overline{g_k(t)}\,\bigr]\,dt = \pi[f_n(x) + f]; \tag{2.9}$$

$$|x| \leqslant l_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, N),$$

$$f_n(x) = -(\sigma_{y_n}^1 - i\tau_{x_ny_n}^1) - [\Phi_1(x_n) + \overline{\Phi_1(x_n)} + x_n\overline{\Phi_1'(x_n)} + \overline{\Psi_1(x_n)}],$$

$$f = \begin{cases} \sigma_s - i\tau_s & \text{на} \quad L'', \\ 0 & \text{на} \quad L', \end{cases} \qquad L' = \sum_{k=1}^{N} L_k', \qquad L'' = \sum_{k=1}^{N} L_k''.$$

Здесь x, t, l_n — безразмерные переменные, отнесенные к R; величины R_{nk}, S_{nk} определяются по соотношениям, приведенным в [7].

Систему сингулярных интегральных уравнений для внутренних трещин следует дополнить равенствами

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k(t)\,dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.10}$$

Система комплексных сингулярных интегральных уравнений (2.9) при указанных выше условиях (2.10) сводится к системе $N \times M$ комплексных алгебраических уравнений [7, 8] для определения $N \times M$ неизвестных $g_n(t_m) = v_n(t_m) - iu_n(t_m)$ ($n = 1, 2, \ldots, N$, $m = 1, 2, \ldots, M$):

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} l_k\bigl[g_k(t_m)R_{nk}(l_kt_m, l_nx_r) + \overline{g_k(t_m)}S_{nk}(l_kt_m, l_nx_r)\bigr] = f_n(x_r) + f, \tag{2.11}$$

$$\sum_{m=1}^{M} g_n(t_m) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N, \quad r = 1, 2, \ldots, M-1).$$

Здесь $t_m = \cos((2m-1)\pi/(2M))$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$; $x_r = \cos(\pi r/M)$ $(r = 1, 2, \ldots, M-1)$. Если в (2.11) перейти к комплексно-сопряженным величинам, получим еще $N \times M$ алгебраических уравнений, в которые входят неизвестные размеры концевых зон d_{1k} и d_{2k} $(k = 1, 2, \ldots, N)$. По этой причине алгебраические системы (2.11) являются нелинейными. Для построения недостающих $2 \times N$ уравнений, определяющих размеры концевых зон, используем условие конечности напряжений в вершинах трещин. Конечность напряжений в вершинах трещины обеспечивается совместным действием внешней нагрузки и напряжений на берегах трещины в концевых зонах (постулат об уничтожении особенностей). Постулат об уничтожении особенностей эквивалентен условию равенства нулю итогового коэффициента интенсивности напряжений, определяемого как разность между коэффициентом интенсивности напряжений от действия внешних сил и коэффициентом интенсивности напряжений от сжимающих усилий, приложенных в концевых зонах трещины.

Таким образом, уравнения для определения размеров концевых зон d_{1k} и d_{2k} имеют вид

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{M} (-1)^m g_k(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M}\pi = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \\ \sum_{m=1}^{M} (-1)^{M+m} g_k(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M}\pi = 0.\end{gathered} \tag{2.12}$$

С помощью термоупругого потенциала перемещений, комплексных функций (2.6), (2.7), формул Колосова — Мусхелишвили и интегрирования кинетического уравнения (1.7) износа материала втулки находится перемещение контактной поверхности втулки v_1.

Аналогично рассматривается задача термоупругости для плунжера. С использованием решения этой задачи и кинетического уравнения износа материала плунжера находится перемещение его контактной поверхности v_2.

Найденные величины v_1 и v_2 подставляются в основное контактное уравнение (1.5). Для замены основного контактного уравнения алгебраическим уравнением неизвестные функции контактного давления на достаточно малом интервале времени ищутся в виде разложений

$$\begin{gathered}p(\theta, t) = p_0(\theta) + t p_1(\theta) + \ldots, \\ p_0(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta), \\ p_1(\theta) = \alpha_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^1 \cos k\theta + \beta_k^1 \sin k\theta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered} \tag{2.13}$$

Выбор малого временного интервала обусловлен тем, что для конструктора наибольший интерес представляет решение на малом начальном промежутке времени. На достаточно большом интервале времени следует использовать иное разложение.

Подставляя соотношение (2.13) в основное контактное уравнение, получим функциональные уравнения для последовательного определения $p_0(\theta)$, $p_1(\theta)$ и т. д.

Для построения разрешающей алгебраической системы для нахождения коэффициентов функции контактного давления в обеих частях функционального уравнения контактной задачи приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях. В результате получим бесконечную алгебраическую систему относительно α_k^0 ($k = 0, 1, 2, \ldots$), β_k^0 ($k = 1, 2, \ldots$), α_k^1, β_k^1 и т. д.

Из-за наличия неизвестных величин θ_1 и θ_2 система уравнений контактной задачи является нелинейной.

В правые части бесконечных алгебраических систем входят интегралы от неизвестных функций $g_k(t)$. Иными словами, система (2.11), (2.12) и бесконечная алгебраическая система относительно α_k, β_k связаны и должны решаться совместно.

Объединенная система уравнений из-за наличия неизвестных θ_1, θ_2, d_{1k}, d_{2k} ($k = 1, 2, \ldots, N$) является нелинейной. Для ее решения используем метод последовательных приближений [8]. Решим объединенную алгебраическую систему при некоторых значениях θ_{1*}, θ_{2*}, d_{1k}^*, d_{2k}^* ($k = 1, 2, \ldots, N$) относительно неизвестных $g_k(t_m)$ ($k = 1, 2, \ldots, N$, $m = 1, 2, \ldots, M$), α_k, β_k. Для этого нужно решить линейную алгебраическую систему. Значения θ_{1*}, θ_{2*}, d_{1k}^*, d_{2k}^* ($k = 1, 2, \ldots, N$) и найденные значения остальных неизвестных подставим в неиспользованные уравнения (1.10), (2.12). Значения θ_{1*}, θ_{2*}, d_{1k}^*, d_{2k}^* и соответствующие им значения остальных неизвестных не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (1.10) и (2.12). Поэтому значения параметров θ_{1*}, θ_{2*}, d_{1k}^*, d_{2k}^* ($k = 1, 2, \ldots, N$) находятся итерациями, до тех пор пока последние уравнения системы (1.10) и (2.12) не будут удовлетворяться с заданной точностью.

В рассматриваемой задаче механики контактного разрушения много свободных параметров: различные теплофизические и механические характеристики материалов, геометрические размеры втулки и плунжера, скорость движения плунжера. Для численной реализации изложенного метода проведены расчеты для бурового насоса двустороннего действия У8-6МА2. Найдены значения коэффициентов функции контактного давления, приближенные значения функций $g_k^0(t_m) = v_k^0(t_m) - iu_k^0(t_m)$ в узловых точках, размеры концевых зон трещин и площадки контакта. Зная контактное давление, можно найти распределение температуры, напряженно-деформированное состояние и износ деталей контактной пары.

Для определения предельного равновесия вершины трещины с концевыми областями пластического течения примем условие предельного (критического) раскрытия вблизи основания пластической зоны. Считается, что критическое состояние наступает в тот момент, когда на краю концевой зоны пластического течения выполняется условие

$$\sqrt{u^2(x_0) + v^2(x_0)} = \delta_k,$$

где $u(x_0) = u^+ - u^-$; $v(x_0) = v^+ - v^-$; δ_k — определяемая экспериментально постоянная материала, характеризующая предельное раскрытие трещины при заданных условиях.

С учетом полученного выше решения имеем

$$-\frac{1 + k_b}{2G} \int\limits_{-l_k}^{x_0} g_k(x)\, dx = v_k(x_0, 0) - iu_k(x_0, 0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Используя замену переменной, заменяя интеграл суммой и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$v_k(x_0, 0) = -\frac{1 + k_b}{2G}\,\frac{\pi l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1k}} v_k^0(t_m), \qquad u_k(x_0, 0) = -\frac{1 + k_b}{2G}\,\frac{\pi l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1k}} u_k^0(t_m).$$

Здесь M_{1k} — количество узловых точек в интервале $(-l_k, x_0)$.

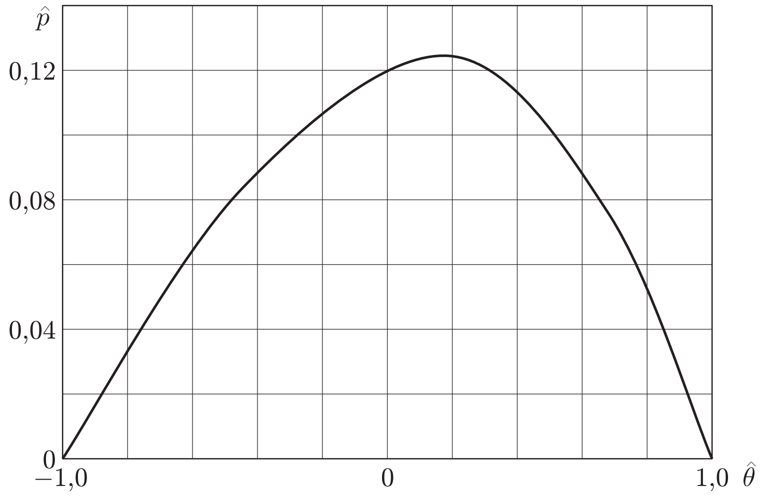

Рис. 2. Зависимость контактного давления от полярного угла для втулки бурового насоса ($V = 0{,}4$ м/с)

Следовательно, условием, определяющим предельное значение нагрузки, при которой происходит продвижение вершины трещины (разрыв связей в полосе пластичности), является условие

$$\frac{1+k_b}{2G}\,\frac{\pi l_k}{M}\,\sqrt{A^2+B^2} = \delta_k, \tag{2.14}$$

где

$$A = \sum_{m=1}^{M_{1k}} v_k^0(t_m), \qquad B = \sum_{m=1}^{M_{1k}} u_k^0(t_m).$$

Для случая одной трещины результаты расчета контактного давления $\hat{p} = p(\theta')R/\Delta E$ в зависимости от полярного угла $\hat{\theta} = \theta'/\theta_0$ ($\theta' = \theta - \theta_+$; $\theta_0 = (\theta_2 - \theta_1)/2$; $\theta_+ = (\theta_2 + \theta_1)/2$) при скорости движения плунжера $V = 0{,}4$ м/с представлены на рис. 2. В качестве постоянных приняты следующие значения параметров: $2R_0 = 73$ мм, $2R' = 56{,}7$ мм, $2R = 57$ мм, $f = 0{,}2$, $E = 1{,}8 \cdot 10^5$ МПа, $E_1 = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}25$, $\mu_1 = 0{,}3$, $K_b = 1{,}2 \cdot 10^{-10}$, $\Delta = 0{,}3$ мм, $\alpha_1 = 45°$.

Вычислялось контактное давление после десятого хода плунжера. Наибольшие значения контактного давления, как правило, находятся в средней части контактной поверхности в зависимости от угла обхвата и коэффициента трения. Наличие сил трения в зоне контакта приводит к смещению распределения контактного давления в направлении, противоположном направлению действия момента.

На рис. 3 для втулки бурового насоса приведена зависимость безразмерной длины концевой зоны пластичности d_{11}/l_1 от безразмерного контактного давления p/σ_s при $V = 0{,}4$ м/с и различной длине трещины ($\hat{l} = l_1/(R_0 - R) = 0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$).

Совместное решение объединенной нелинейной системы уравнений и (2.14) позволяет определить зависимость критического контактного давления от длины трещины, размеры концевых пластических зон и площадки контакта, а также значения искомых функций $v^0(t_m)$, $u^0(t_m)$ ($m = 1, 2, \ldots, M$). На рис. 4 приведена зависимость безразмерной предельной нагрузки $p_* = p/\sigma_s$ от безразмерной длины трещины $l_* = 8\sigma_s l_1/(\pi E \delta_k)$ втулки бурового насоса при $V = 0{,}4$ м/с.

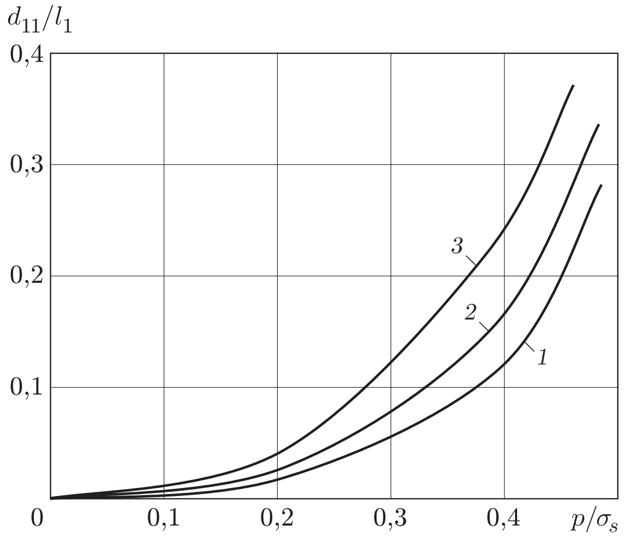

Рис. 3

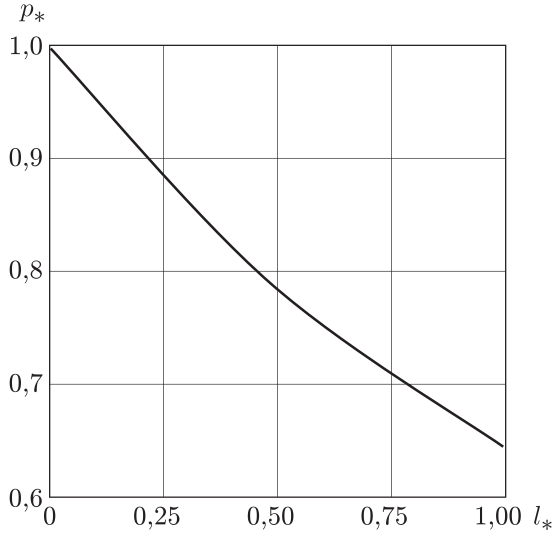

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость длины концевой зоны пластического течения от контактного давления для втулки бурового насоса ($V = 0{,}4$ м/с):
1 — $\hat{l} = 0{,}2$; *2* — $\hat{l} = 0{,}3$; *3* — $\hat{l} = 0{,}4$

Рис. 4. Зависимость предельной нагрузки от длины трещины для втулки бурового насоса

3. Анализ напряженного состояния втулки контактной пары показывает, что в процессе работы контактной пары при вдавливании плунжера в поверхность втулки возникают области сжимающих напряжений. Будем предполагать, что существуют зоны, в которых берега трещин (или их часть) вошли в контакт. Принимаем, что эти зоны примыкают к вершинам трещин, а их размеры заранее неизвестны и сравнимы с длиной трещины, но меньше размеров пластических концевых зон.

Рассмотрим участки трещины длиной $\hat{l}_{1k}$ и $\hat{l}_{2k}$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) (концевые контактные зоны), примыкающие к ее вершинам, на которых берега трещины вошли в контакт. Взаимодействие берегов трещин препятствует раскрытию трещины.

В концевых зонах, где берега трещины вошли в контакт, возникают нормальные $q_{y_k}(x_k)$ и касательные $q_{x_k y_k}(x_k)$ напряжения. Значения этих контактных напряжений заранее неизвестны и подлежат определению при решении краевой задачи механики контактного разрушения. Напомним, что в рассматриваемом случае каждая трещина состоит из трех зон: внутренней и двух концевых зон. Внутренняя зона трещины — это берега трещины, свободные от нагрузок. Две концевые зоны трещины — пластическая концевая зона $(\hat{l}_{1k}, d_{1k})$, $(\hat{l}_{2k}, d_{2k})$ и концевая зона $(-l_k, \hat{l}_{1k})$, $(\hat{l}_{2k}, l_k)$, где берега трещины вошли в контакт.

Краевые условия на берегах трещины имеют вид

$$\begin{array}{llll} \sigma_{y_k} = 0, & \tau_{x_k y_k} = 0 & \text{на} \quad L' & (k = 1, 2, \ldots, N), \\ \sigma_{y_k} = \sigma_s, & \tau_{x_k y_k} = \tau_s & \text{на} \quad L'', & \\ \sigma_{y_k} = q_{y_k}, & \tau_{x_k y_k} = q_{x_k y_k} & \text{на} \quad L'''. & \end{array}$$

Здесь $L''' = \sum\limits_{k=1}^{N} L_k'''$; L_k''' — k-я концевая зона, в которой берега трещины вошли в контакт.

Остальные граничные условия задачи механики контактного разрушения такие же, как в п. **2**.

Для получения решения поставленной задачи следует повторить процедуру вывода основных разрешающих уравнений задачи. Система $N \times M$ комплексных алгебраических уравнений для определения $N \times M$ неизвестных $g_n^1(t_m) = v_n^1(t_m) - iu_n^1(t_m)$ $(n = 1, 2, \ldots, N$, $m = 1, 2, \ldots, M)$ принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} l_k\big[g_k^1(t_m)R_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) + \overline{g_k^1(t_m)}S_{nk}(l_k t_m, l_n x_r)\big] = f_n(x_r) + f(x_r), \\ \sum_{m=1}^{M} g_n(t_m) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N, \quad r = 1, 2, \ldots, M-1), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$f = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad L', \\ \sigma_s - i\tau_s & \text{на} \quad L'', \\ q_{y_k} - iq_{x_k y_k} & \text{на} \quad L'''. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае в правые части системы (3.1) также входят неизвестные значения контактных напряжений $q_{y_k}(x_k)$ и $q_{x_k y_k}(x_k)$ в узловых точках, принадлежащих концевым контактным зонам.

Условием, определяющим неизвестные контактные напряжения, возникающие на берегах трещины в концевых контактных зонах, является условие отсутствия раскрытия трещины в этих зонах. В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее записать для производной раскрытия перемещений берегов трещины:

$$g_k^1(x_k) = \frac{2G}{i(1+k_b)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k^+(x_k,0) - u_k^-(x_k,0) + i(v_k^+(x_k,0) - v_k^-(x_k,0))\right] = 0. \tag{3.2}$$

Здесь x_k — аффикс точек берегов концевых контактных зон k-й трещины.

Требуя выполнения условий (3.2) в узловых точках, содержащихся в концевых зонах $(-l_k, \hat{l}_{1k})$ и $(\hat{l}_{2k}, l_k)$, получаем недостающие уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений $q_{y_k}(t_{m_{1k}})$ и $q_{x_k y_k}(t_{m_{1k}})$ в узловых точках:

$$g_k^1(t_{m_{1k}}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N, \quad m_{1k} = 1, 2, \ldots, M_{1k}) \tag{3.3}$$

(M_{1k} — число узловых точек, принадлежащих концевым контактным зонам k-й трещины).

Для замыкания системы (3.1), (3.3) не хватает $2 \times N$ уравнений, определяющих размеры концевых зон. Из условий конечности напряжений в окрестности вершин трещин определяются размеры концевых контактных зон. Записывая условия конечности напряжений, получаем $2 \times N$ недостающих уравнений в виде

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{M}(-1)^m g_k^1(t_m)\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \\ \sum_{m=1}^{M}(-1)^{M+m} g_k^1(t_m)\operatorname{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi = 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Поскольку размеры концевых контактных зон неизвестны, система алгебраических уравнений (3.1), (3.3), (3.4) является нелинейной. В этом случае объединенная алгебраическая система, состоящая из разрешающей системы уравнений контактной задачи и систем уравнений (3.1), (3.3), (3.4), из-за наличия неизвестных величин θ_1, θ_2, $\hat{l}_{1k}$ и $\hat{l}_{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$

$l_1/(R_0 - R)$	$d_{11}/(R_0 - R)$	$d_{21}/(R_0 - R)$	$\hat{l}_{11}/(R_0 - R)$	$\hat{l}_{21}/(R_0 - R)$
0,05	0,013	0,017	0,009	0,011
0,10	0,039	0,052	0,031	0,028
0,15	0,067	0,074	0,058	0,069
0,20	0,087	0,0931	0,087	0,076
0,25	0,095	0,108	0,091	0,087

является нелинейной. Для ее решения используем метод последовательных приближений. Решение объединенной системы позволяет определить значения коэффициентов α_k, β_k разложения функции контактного давления, значения искомых функций $g_k^1(t_m)$ в узловых точках, значения $q_{y_k} - iq_{x_k y_k}$ в узловых точках, принадлежащих концевым контактным зонам, а также размеры концевых контактных зон.

В таблице для втулки бурового насоса У8-6МА2 приведены значения параметров $d_{11}/(R_0-R)$, $d_{21}/(R_0-R)$, $\hat{l}_{11}/(R_0-R)$ и $\hat{l}_{21}/(R_0-R)$ в зависимости от длины трещины $l_1/(R_0 - R)$ при скорости движения плунжера $V = 0{,}4$ м/с.

Аналогично рассматривается случай, когда некоторые трещины (или все трещины) выходят одним концом на внутреннюю поверхность втулки. В этом случае количество условий в (2.10) уменьшается на число трещин, выходящих на поверхность втулки. Для поверхностных трещин равенства (2.10) заменяются на условия конечности напряжений на крае, выходящем на поверхность $r = R$.

Моделирование роста трещин во втулке контактной пары в процессе ее работы сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы износоконтактной задачи, системы сингулярных интегральных уравнений (2.9), (3.1), уравнений (2.12), (3.3), (3.4) и критерия роста трещины (2.14) при различных значениях свободных параметров фрикционной пары.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я.** Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения: Обзор // Пробл. прочности. 1973. № 2. С. 3–19.
2. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
3. **Горячева И. Г.** Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
4. **Горячева И. Г., Добычин М. Н.** Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
6. **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963.
7. **Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976.
8. **Мирсалимов В. М.** Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 15/IX 2004 г.,
в окончательном варианте — 4/V 2005 г.