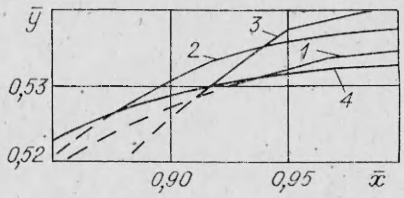
На фиг. 2 показана зависимость скорости эрозии U при $x = 0{,}98$ (на фиг. 1 указана стрелкой) от размера эродирующих частиц (кривая *3*). Видно, что скорость эрозии монотонно возрастает с увеличением диаметра частиц, что непосредственно следует и из выражения (1.4) для разности наклонов $y'_a - y'_w$.



Фиг. 3

Заметим, что при эрозии полидисперсными частицами следует использовать уравнения (2.1) для расчета результирующих повреждений. Из анализа данных, приведенных на фиг. 2, 3, следует, что в этом случае необходимо знать функцию распределения частиц по размерам. Вид кривой распределения имеет более существенное влияние на эрозию, чем на другие параметры двухфазного течения, что согласуется с выводами [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Neilson J. H., Gilchrist A.** An analytical and experimental investigation of the trajectories of particles entrained by the gas flow in nozzles.— J. Fluid Mech., 1968, vol. 35, p. 549.
2. **Neilson J. H., Gilchrist A.** An experimental investigation into aspects of erosion in rocket motor tall nozzles.— Wear, 1968, N 11.
3. **Рафиков Р. В., Зауличный Е. Г. и др.** Численное исследование двухфазного течения в осесимметричном канале с учетом реальных механизмов разрушения его стенок.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1981, № 3, вып. 1.
4. **Шелдон, Маджи, Кроу.** Эрозия трубы в газовом потоке, содержащем частицы.— Теор. основы инж. расчетов, 1977, № 2.
5. **Рафф А. У., Видерхорн С. М.** Эрозия при ударе твердых частиц.— В кн.: Эрозия. М.: Мир, 1982.
6. **Трунев А. П., Фомин В. М.** Обтекание тел двухфазным потоком типа газ — твердые частицы с учетом эрозии.— ПМТФ, 1983, № 1.
7. **Стернин Л. Е.** Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974.
8. **Marble F.** Dynamics of dusty gases.— Ann. Rev. of Fluid Mech., 1970, vol. 2, N 4.
9. **Крайко А. Н., Ткаленко Р. А.** К решению прямой задачи теории сопла Лаваля для двухфазной смеси при малом отставании частиц.— ПМТФ, 1973, № 4.
10. **Камнолов В. Н., Маслов Б. Н., Пирумов У. Г.** Исследование траекторий частиц в соплах Лаваля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 5.
11. **Шелдон.** Сходства и различия в эрозионном поведении материалов.— ТОИР, 1970, № 3.
12. **Wakeman T., Tabakoff W.** Erosion behaviour in a simulated jet engine environment.— J. Aircraft, 1979, vol. 16, N 12.
13. **Bryan G. M., Pugh F. M.** Cratering of lead by oblique impacts of hypervelocity steel pellets.— J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, N 2.
14. **Старр В.** Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971.
15. **Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М.** Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.
16. **Ketner D. M., Hess K. S.** Particle impingement erosion. AIAA Pap. N 1250, 1979.

Поступила 27/XII 1983 г.

УДК 54—138

МЕТОД ПОТОКОВ В КИНЕТИКЕ КОАГУЛЯЦИИ

А. А. Ликальтер

(*Москва*)

Изменения концентрации и распределения по размерам частиц аэрозоля в широком диапазоне условий вызваны коагуляцией [1]. Измеренные распределения частиц по радиусам имеют куполообразный вид. Верхняя часть купола обычно описывается так называемым нормальным логарифмическим распределением. Правое крыло может спадать значительно медленнее, по степенному закону [2]. Степенной спектр частиц атмосферного аэрозоля обнаружен в [3]. Впоследствии он был объяснен на основе представления о постоянном потоке массы по спектру частиц. С точностью до коэффициента вид спектра следует из размерных соображений с использованием гипотезы локальности [4, 5]. Исходя из кинетического уравнения стационарный спектр получен в [6]. Вместе с коэффициентами стационарные степенные спектры при тепловой и гравитационной коагуляции в разных диапазонах радиусов частиц получены в [7]. В [8] показано, что эти результаты следуют из более общего анализа кинетического уравнения с использованием понятий потоков частиц и массы по спектру. Однако до сих пор не было введено прямого кинетического определения потоков. Последнее в теории коагуляции и в некоторых других похожих задачах является нетривиальным.

В данной работе явно определяются потоки числа и объема частиц (капель) по спектру, соответствующие физическому смыслу этих величин. Такой подход (во многом аналогичный разработанному ранее в колебательной кинетике [9]) сразу приводит к стационарным степенным распределениям и может быть полезен для анализа более сложных задач. Другая рассматриваемая задача — эволюция нормального логарифмического распределения. Показано, что поток числа капель по спектру характеризуется конечной эффективной длиной пробега, благодаря чему возможно использование уравнения типа Фоккера — Планка. Вводится логарифмическая шкала радиусов частиц, в которой уравнение принимает вид, допускающий аналогию с движением газа. Вычислена скорость распространения максимума распределения. С использованием условия нормировки найдены зависимости параметров логарифмически нормального распределения от времени.

1. Рассмотрим, каким образом осуществляется перенос частиц и объема по спектру. Результат слияния капель 1 и 2 радиусов $r_1 < r_2$ удобно представить следующим образом: первая исчезает, а вторая смещается по оси радиусов в точку 3 в соответствии с законом сохранения объема $r_3^3 = r_1^3 + r_2^3$. Смещение большей капли дает вклад в поток числа капель в пространстве радиусов j. При слиянии капель одинакового радиуса смещение максимальное: $r_3 = 2^{1/3}r_2$. Величина (1/3) ln 2 играет роль характерного пробега частиц в логарифмической шкале радиусов $\ln r$. Исчезновение же меньшей капли при слиянии с большей представляет вклад в сток C.

Данная интерпретация позволяет написать уравнение коагуляции в форме закона сохранения:

$$\partial n/\partial t = -\partial j/\partial r - C, \tag{1.1}$$

где

$$j(r) = \iint\limits_D K(r_1, r_2)\, n(r_1)\, n(r_2)\, dr_1 dr_2; \tag{1.2}$$

$$C(r) = n(r) \int\limits_r^\infty K(r, r_1)\, n(r_1)\, dr_1. \tag{1.3}$$

Здесь $n(r)$ — плотность числа капель в пространстве радиусов; t — время; $K(r_1, r_2)$ — коэффициент скорости коагуляции. Область интегрирования D в (1.2) определяется неравенствами $r_1 < r_2 < r$ и $r_1^3 + r_2^3 > r^3$ (фиг. 1). Коэффициент скорости тепловой (броуновской) коагуляции для частиц с радиусами более чем 0,1 мкм имеет вид [1]

$$K(r_1, r_2) = (2kT/3\eta)(2 + r_1/r_2 + r_2/r_1), \tag{1.4}$$

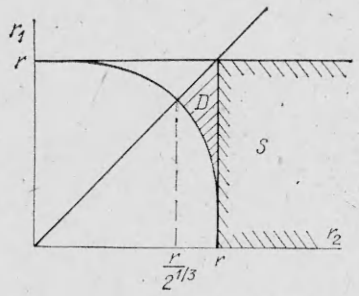
где T — температура; η — вязкость газа; k — постоянная Больцмана.

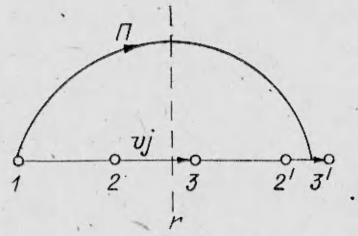
Интеграл (1.2) по области D можно представить как разность интегралов по областям $D'(r_1 < r_2 < r)$ и $D''\left(r_1 < r_2,\ r_1^3 + r_2^3 < r^3\right)$. Тогда производная $\partial j/\partial r$ записывается в виде

$$\frac{\partial j}{\partial r} = n(r) \int\limits_0^r K(r_1, r)\, n(r_1)\, dr_1 - \iint\limits_{r_1<r_2} K(r_1, r_2)\, n(r_1)\, n(r_2)\, \delta \times$$
$$\times \left[(r_1^3 + r_2^3)^{1/3} - r\right] dr_1 dr_2.$$

Подстановка этого выражения в (1.1) приводит уравнение коагуляции к стандартному виду (см., например, [2]).

Поток числа частиц j, вообще говоря, нелокален. Однако в большом масштабе по сравнению с характерным пробегом частицы в пространстве





Фиг. 2

Фиг. 1

радиусов поток j можно считать локальным. Это позволяет преобразовать уравнение (1.1) к виду закона сохранения объема.

Умножая (1.1) на объем капли $v(r)$, получим уравнение для плотности объема vn на оси радиусов:

$$\frac{\partial (vn)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(vj) + v'j - vC, \tag{1.5}$$

где штрихом обозначена производная по r. Если рассматривать поток j как локальный, то vj — конвективный поток объема, переносимый с потоком числа капель, $v'j$ и vC — источник и сток объема. Так как при коагуляции объем капель сохраняется, разность источника и стока может быть представлена в виде дивергенции потока передаваемого объема:

$$v'j - vC = -\partial \Pi / \partial r. \tag{1.6}$$

Поток передаваемого объема в сечении r оси радиусов определяется выражением

$$\Pi(r) = \iint\limits_{r_1<r<r_2} v(r_1) K(r_1, r_2)\, n(r_1)\, n(r_2)\, dr_1 dr_2. \tag{1.7}$$

Область интегрирования в (1.7) на фиг. 1 обозначена S. Поток $\Pi(r)$ соответствует передаче объема через сечение r в пространстве радиусов без пересечения r частицами в отличие от конвективного потока vj (фиг. 2).

При подстановке (1.6) уравнение (1.5) принимает вид уравнения непрерывности

$$\partial(vn)/\partial t = -\partial F/\partial r, \quad F = vj + \Pi, \tag{1.8}$$

где F — полный поток объема в пространстве радиусов. Таким образом, капельный объем переносится в пространстве радиусов в виде потока F, состоящего из двух частей: конвективного потока объема и потока передаваемого объема.

Уравнение непрерывности (1.8) имеет смысл только в большом масштабе по сравнению с характерным пробегом на оси радиусов, равным в логарифмической $\ln r$ шкале $(1/3) \ln 2$. Суть дела заключается в том, что передаваемый объем не может быть точно локализован на оси радиусов, так как он размазывается на длине пробега. Действительно, в процессе $(1) + (2') \to (3')$ увеличивается на v_1 суммарный объем в интервале $(r_{2'}, r_{3'})$ (а не в точке $3'$). Заметим, что и равенство (1.6) имеет место с такой же точностью (если считать пробег малым). В этом можно убедиться непосредственно, вычисляя производную $\partial\Pi/\partial r$ с помощью определения (1.7).

2. В стационарном случае поток F равен производительности источника

$$F = vj + \Pi = \mathrm{const}. \tag{2.1}$$

Будем искать степенное решение уравнения (2.1) $n \sim 1/r^m$. Используя однородность ядра (1.4), представим поток в виде

$$F = vn^2r^2(Q_m + P_m), \tag{2.2}$$

где Q_m и P_m зависят только от показателя степени m

$$(2.3)\qquad Q_m = \iint\limits_{\substack{0<x_1<x_2<1\\ x_1^3+x_2^3>1}} K(x_1, x_2)\frac{dx_1 dx_2}{x_1^m x_2^m};$$

$$(2.4)\qquad P_m = \iint\limits_{0<x_1<1<x_2} K(x_1, x_2)\frac{dx_1 dx_2}{x_1^{m-3} x_2^m}.$$

Конвективный поток и поток передаваемого объема пропорциональны соответственно Q_m и P_m.

Подставляя (2.2) в (2.1) и учитывая, что $v \sim r^3$, получаем

$$(2.5)\qquad n(r) \sim 1/r^{5/2}.$$

Легко видеть, что интегралы (2.3) и (2.4) при $m = 5/2$ сходятся. Первый сводится к однократному интегрированию, которое выполняется численно. Интеграл (2.4) вычисляется элементарно. Численные значения коэффициентов $Q_{5/2} \simeq 1{,}21(2kT/3\eta)$ и $P_{5/2} = 5{,}05(2kT/3\eta)$. Таким образом, в поток объема основной вклад дает поток передаваемого объема П. Подставляя величины $Q_{5/2}$ и $P_{5/2}$ в (2.2), получаем в согласии с [7, 8]

$$(2.6)\qquad n(r) = 0{,}24(F\eta/kTr^5)^{1/2}.$$

Реально распределение (2.6) может существовать на конечном интервале радиусов. Если область источников $r < a$, а область стока $r > b$, то область существования распределения (2.6) ограничена условиями $a \ll r \ll b$.

Для капель с радиусами > 1 мкм главную роль играет гравитационная коагуляция. Коэффициент скорости гравитационной коагуляции представляется однородной функцией радиусов четвертого порядка [1]. При этом поток объема в пространстве радиусов $F \sim r^6 vn^2$. Отсюда стационарное распределение при гравитационной коагуляции $n \sim r^{-9/2}$. Полное распределение для этого случая см. в [7, 8].

3. Рассмотрим задачу об эволюции нестационарного куполообразного распределения капель по радиусам, которое быстро спадает при малых и больших радиусах. Будем рассматривать окрестность максимума распределения, в которой сосредоточена основная часть капель. Уравнение (1.1) здесь можно упростить, используя слабое изменение распределения в окрестности максимума.

Покажем, что выражение (1.2) для j можно представить в простой алгебраической форме. В области интегрирования r_2 изменяется в интервале от $r/2^{1/3}$ до r, равном характерной длине пробега частицы в пространстве радиусов (фиг. 1). Считая изменение $n(r)$ в этом интервале малым, вынесем множитель $n(r_2)$ из-под знака интеграла. Далее заметим, что большим r_1 соответствует большой пробег, а поэтому окрестность $r_1 \sim r$ дает главный вклад в интеграл. Таким образом, множитель $n(r_1)$ также можно вынести из-под интеграла в точке r. Используя однородность ядра (1.4), получаем

$$(3.1)\qquad j \simeq Q_0 r^2 n^2,$$

где Q_0 определяется формулой (2.3) при $m = 0$. Вычисление интеграла дает $Q_0 = J(2kT/3\eta)$, $J \simeq 0{,}212$.

Подставляя (3.1) и (1.3) в (1.1), получаем уравнение

$$(3.2)\qquad \frac{\partial n}{\partial t} = -Q_0\frac{\partial}{\partial r} r^2 n^2 - n\int\limits_r^\infty K(r, r_2)\, n(r_2)\, dr_2.$$

Введем логарифмическую шкалу радиусов $y = \ln(r/r_0)$, где r_0 — некоторый масштаб. Плотность капель на этой шкале обозначим $u(y) = n(r)/(dy/dr) = rn(r)$. Введем еще новую шкалу времени $\tau = 2Q_0 t$. Замена переменных приводит уравнение (3.2) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial y} = -u\int\limits_y^\infty R(y, y_1)\, u(y_1)\, dy_1, \tag{3.3}$$

где

$$R(y, y_1) = (1/J)[1 + \operatorname{ch}'(y - y_1)]. \tag{3.4}$$

Следует отметить очевидную аналогию между уравнением (3.3) и уравнением движения газа. Левую часть уравнения (3.3) можно предста вить в виде производной вдоль характеристики $dy/d\tau = u$, являющейся траекторией движения со скоростью u:

$$\frac{d\ln u}{d\tau} = -\int\limits_y^\infty R(y, y_1) u(y_1)\, dy_1. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) описывает уменьшение скорости u вдоль характеристики.

Меньше всего затухание скорости в передней части движущегося профиля скорости $u(y)$. Если затухание мало, крутизна профиля будет возрастать в результате того, что более быстрые части, движущиеся сзади, догоняют передние. Таким образом, аналогия с газодинамическим движением проявляется в возможности образования крутого переднего фронта движущегося профиля.

Введем скорость распространения максимума профиля

$$u_0 = dy_m/d\tau, \tag{3.6}$$

где y_m определяется уравнением $\partial u/\partial y = 0$. Дифференцируя последнее уравнение вдоль траектории максимума $y_m(\tau)$, получим

$$(\partial^2 u/\partial\tau\partial y)_m + u_0(\partial^2 u/\partial y^2)_m = 0. \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.3), дифференцируя по y, при $\partial u/\partial y = 0$ имеем

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial y}\right)_m + u_m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_m = \frac{u_m}{J}\left(2u_m - \int\limits_{y_m}^\infty \operatorname{sh}(y_m - y_1)\, u(y_1)\, dy_1\right). \tag{3.8}$$

Исключая производную по времени, получаем из (3.7) и (3.8) выражение для u_0:

$$u_0 = u_m\left(1 - \frac{2u_m + \int\limits_{y_m}^\infty \operatorname{sh}(y_1 - y_m)\, u(y_1)\, dy_1}{J(\partial^2 u/\partial y^2)_m}\right). \tag{3.9}$$

Согласно (3.9), скорость распространения максимума профиля скорости превышает величину максимума u_m (так как $(\partial^2 u/\partial y^2)_m < 0$). Этот эффект «опережающего» распространения максимума обусловлен увеличением затухания скорости от передней к задней части профиля.

Заменяя вблизи максимума $u(y)$ распределением Гаусса

$$u(y) \simeq u_m \exp[-a(y - y_m)^2], \tag{3.10}$$

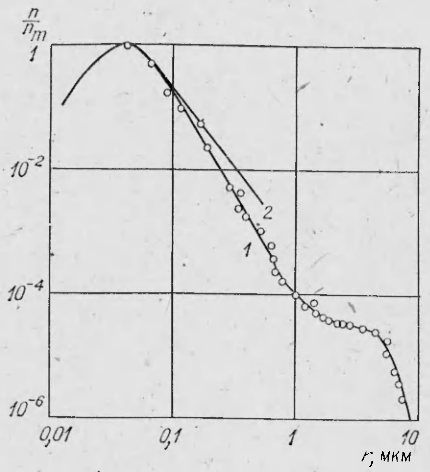
получим из (3.9) оценку скорости распространения через величину максимума и параметр a, определяющий ширину профиля,

$$u_0 \simeq u_m\left\{1 + \frac{1}{J}\left[\frac{1}{a} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{e^{1/4a}}{a^{3/2}}\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\right]\right\}, \tag{3.11}$$

где $\Phi(1/2\sqrt{a})$ — интеграл ошибок.

Формулы (3.6) и (3.10) вместе с законом изменения во времени полного числа капель

$$N = u_m\sqrt{\Pi/a}$$



Ф и г. 3

и условием сохранения суммарного объема капель

$$V/V_0 = N \exp(3y_m + 9/4a), \quad V_0 = 4\pi r_0^3/3$$

позволяют найти временную зависимость всех параметров гауссова распределения (3.10).

При больших τ асимптотически $a \sim \mathrm{const}$, $y_m \sim (1/3) \ln \tau + \mathrm{const}$ и $u_m \sim 1/\tau$.

4. В заключение кратко обсудим результаты экспериментальной работы [10], в которой исследовалось распределение по радиусам капель Al_2O_3 в пламени при горении металлизированного топлива. Проба отбиралась с помощью фильтра, через который проходили поднимающиеся и перемешивающиеся при конвекции продукты сгорания. Затвердевшие сферические частицы оксида алюминия, накапливающиеся в фильтре, анализировались затем с помощью электронного микроскопа. При этом спектр капель (кривая *1* на фиг. 3) усреднялся за время эксперимента. Судя по характеру, в области около 0,1 мкм спектр может быть обусловлен стационарной тепловой коагуляцией капель с начальными радиусами менее 0,04 мкм. Оценка времени релаксации $\sim rvn/F$ также допускает такую возможность. На фиг. 3 (кривая *2*) показан степенной спектр (2.5), хорошо аппроксимирующий экспериментальный в его средней части.

Автор благодарен И. Т. Якубову за предложенную тему и обсуждение, Д. И. Жуховицкому, обратившему внимание автора на эксперимент [10], и А. Г. Храпаку за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фукс Н. А.** Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
2. **Волощук В. М., Седунов Ю. С.** Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
3. **Junge C.** The size distribution and aging of natural aerosols as determined from electrical and optical data on the atmosphere.— J. Meteorol., 1955, vol. 12, N 1; Tellus, 1953, vol. 5, N 1.
4. **Friedlander S. K.** Similarity consideration for the particle size spectrum of a coagulation, sedimenting aerosol.— J. Meteorol., 1960, vol. 17, N 5.
5. **Drake R.** A general mathematical survey of the coagulation equation.— In: Topics in current aerosol research. Pt 2/Ed. G. Hidy, J. Brock. Oxford: Pergamon Press, 1972.
6. **Лушников А. А., Смирнов В. И.** Стационарная коагуляция и распределения частиц атмосферных аэрозолей по размерам.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1975, т. 11, № 2.
7. **Смирнов В. И.** Решения семейства уравнений стационарной коагуляции и модель спектра частиц атмосферного аэрозоля.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1977, т. 13, № 3.
8. **Винокуров Л. И., Кац А. В.** Степенные решения кинетического уравнения при стационарной коагуляции атмосферных аэрозолей.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 6.
9. **Ликальтер А. А., Найдис Г. В.** Колебательные распределения в сильно возбужденных молекулярных газах.— В кн.: Химия плазмы. Вып. 8. М.: Энергоиздат, 1981.
10. **Бахир А. П., Левашенко Г. И., Полякова Н. Г.** Определение мнимой части показателя преломления и размеров капель Al_2O_3 в пламени.— Журн. прикл. спектроскопии, 1973, т. 18, вып. 6.

Поступила 15/XII 1983 г.