

УДК 534.1: 532.59

ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

И. Н. Солдатов

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН, 603024 Нижний Новгород

E-mail: erfv@newmail.ru

Исследуются дисперсионные характеристики гироскопических волн в слое несжимаемой жидкости в полости быстровращающегося цилиндра. Показано, что в слое вязкой несжимаемой жидкости инерционная волна может быть представлена в виде суммы шести винтовых гармоник. Исследовано влияние вязкости жидкости и отношения частоты волны к угловой скорости вращения цилиндра на действительную и мнимую части волнового числа.

Ключевые слова: вращающаяся жидкость, вращающийся цилиндр, гироскопические волны, дисперсионные характеристики.

Введение. Волновые процессы в жидкости с учетом влияния вращения Земли рассматривались в работах, посвященных исследованию волн в океане (см., например, работы [1–4] и библиографию к ним). Яркими примерами сильного влияния вращения на динамику жидкости являются роторные системы. В настоящее время находят применение роторы с полостью, содержащей жидкость, где центробежная сила может превышать силу тяжести в сотни тысяч или даже в миллионы раз. Вследствие нарушения равновесия между градиентом давления и силой Кориолиса во вращающейся жидкости могут возникать волновые движения, называемые инерционными, или гироскопическими, волнами. Эти волны играют большую роль в задачах динамики роторов, турбин, сепараторов, центрифуг, вращающихся летательных аппаратов, содержащих жидкость, и некоторых геофизических задачах (течения в жидком ядре Земли [5]). Волновые явления во вращающемся слое жидкости могут оказывать существенное влияние на ряд технологических процессов (в частности, на процессы седиментации), на фазовые равновесия в многокомпонентных жидкостях, а также на траекторию полета летательного аппарата. Динамика инерционных волн в жидкости, заполняющей вращающийся цилиндр, экспериментально исследовалась в ряде работ (см. работы [6, 7] и библиографию к ним). В [8, 9] рассматривались стационарные гироскопические волны в круговом цилиндрическом слое идеальной жидкости, ограниченном твердыми стенками. Получены дисперсионные соотношения и построены зависимости безразмерных длин волн от безразмерных частот. Поведение маловязкой жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре в зависимости от скорости вращения и степени наполнения изучалось в работе [10]. В [11–19] исследовано резонансное возбуждение волн в жидкости, находящейся в полости ротора, которое является основной причиной потери устойчивости стационарного вращения роторной системы.

В данной работе изучаются свойства гироскопических волн в слое вращающейся жидкости, что обусловлено интересом к задаче устойчивости роторной системы с закрепленной

точкой, в которой угловая скорость вращения ротора поддерживается приводом постоянной. Для подобных роторных систем в [15, 17] предложен метод исследования устойчивости, одним из основных этапов которого является вычисление моментов сил, действующих со стороны жидкости на стенки ротора, при стационарной конической прецессии ротора. Несложно показать, что при конической прецессии стационарная гидродинамическая задача непосредственно связана с задачей о возбуждении инерционных волн в слое жидкости в полости твердого тела, вращающегося вокруг стационарной оси. В настоящей работе рассматривается только кинематическая часть гидродинамической задачи, а именно дисперсионные свойства гироскопических волн в слое вращающейся жидкости.

1. Винтовые гармоники. Рассмотрим слой несжимаемой вязкой жидкости, находящейся в бесконечном цилиндре кругового сечения, быстро вращающемся вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью Ω . Влиянием силы тяжести пренебрегается. Введем связанную с цилиндром неинерциальную цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$ с осью z , направленной вдоль оси симметрии. В невозмущенном состоянии жидкость движется вместе с вращающейся твердой цилиндрической оболочкой как единое целое:

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad p_0 = p_a + \rho\Omega^2(r^2 - b^2)/2 \quad (1.1)$$

(p_a — давление в полости цилиндра, свободной от жидкости; b — радиус свободной невозмущенной поверхности; ρ — плотность).

После линеаризации (1.1) движение жидкости в окрестности невозмущенного состояния описывается линейными уравнениями Навье — Стокса и уравнениями несжимаемости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \frac{p}{\rho} + 2[\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}] + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.2)$$

При этом задавались следующие граничные условия: условие прилипания частиц жидкости к боковой стенке полости ($r = a$):

$$\mathbf{v} = 0, \quad (1.3)$$

условие равенства нулю касательных напряжений, условие непрерывности нормального напряжения и кинематическое условие на свободной поверхности жидкости ($r = b$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{b} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ -p - \rho\Omega^2 b h + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} - u = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь u, v, w — радиальная, азимутальная и осевая компоненты вектора скорости \mathbf{v} ; $\mu, \nu = \mu/\rho$ — динамическая и кинематическая вязкость соответственно; функция $h(\varphi)$ определяет форму свободной поверхности жидкости: $r = b + h(\varphi)$; p — давление.

Уравнения (1.2) допускают частные решения вида

$$\boldsymbol{\varkappa} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v}; \quad (1.5)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_*(r) e^{i(\omega t + kz + m\varphi)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (1.6)$$

$$p = -2\rho\Omega \boldsymbol{\varkappa}^{-1} w, \quad (1.7)$$

если циклическая частота ω , параметр завихренности $\boldsymbol{\varkappa}$ и k связаны соотношением

$$\omega \boldsymbol{\varkappa} - 2\Omega k - i\nu \boldsymbol{\varkappa}^3 = 0. \quad (1.8)$$

В этом нетрудно убедиться, применив операцию rot к первому уравнению (1.2) и используя (1.5). Для рассматриваемых винтовых полей первое уравнение (1.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{2}{\boldsymbol{\varkappa}} (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}) \right) + \operatorname{rot} \left(\frac{2}{\boldsymbol{\varkappa}} [\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}] - \nu \operatorname{rot} \mathbf{v} \right),$$

откуда несложно получить выражение для давления (1.7).

Применяя к (1.5) операцию rot, получим

$$\Delta \mathbf{v} + \varkappa^2 \mathbf{v} = 0. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) имеет наиболее простой вид в проекции на ось z :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varkappa^2 \right) w = 0. \quad (1.10)$$

Подставим (1.6) в (1.10). Тогда амплитуда $w_*(r)$ осевой компоненты вектора скорости должна удовлетворять уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 w_*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_*}{dr} + \left(-\frac{m^2}{r^2} + \lambda^2 \right) w_* = 0,$$

где $\lambda^2 = \varkappa^2 - k^2$. Отметим, что амплитуды радиальной u_* и азимутальной v_* скоростей связаны с w_* следующим образом:

$$u_* = \frac{im\varkappa}{\lambda^2 r} w_* + \frac{ik}{\lambda^2} \frac{dw_*}{dr}, \quad v_* = -\frac{mk}{\lambda^2 r} w_* - \frac{\varkappa}{\lambda^2} \frac{dw_*}{dr}. \quad (1.11)$$

Далее индекс “*” будем опускать.

2. Влияние вязкости на гироскопические волны. Введем безразмерные переменные: $r' = r/a$, $z' = z/a$, $\tau = \omega/\Omega$, $\delta = b/a$, $\varkappa' = \varkappa a$, $k' = ka$, $\lambda' = \lambda a$, число Экмана $E = \nu/(\Omega a^2)$. Далее штрихи опускаем. Уравнение (1.8) в безразмерных переменных принимает вид

$$\tau \varkappa - 2k - iE\varkappa^3 = 0. \quad (2.1)$$

Один из корней уравнения (2.1) зависит от параметров крупномасштабного движения жидкости:

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{s}{3E} - i \frac{\tau}{s} \right) - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{s}{3E} + i \frac{\tau}{s} \right), \quad (2.2)$$

а два других корня — от параметров пограничных слоев:

$$\varkappa_2 = \frac{s}{3E} - i \frac{\tau}{s}, \quad \varkappa_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{s}{3E} - i \frac{\tau}{s} \right) + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{s}{3E} + i \frac{\tau}{s} \right).$$

Здесь $s = (27k + 3\sqrt{3it^3 E^{-1} + 81k^2})^{1/3} E^{2/3} (\sqrt{3}/2 + i/2)$. Во многих случаях число Экмана E очень мало, и если значение τ не близко к нулю, то

$$\varkappa_1 \approx \frac{2}{\tau} k + i \frac{8E}{\tau^4} k^3 + O(E^2), \quad \varkappa_j \approx (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{|\tau|}{2E}} \left(-\frac{\tau}{|\tau|} + i \right) - \frac{k}{\tau} + O(E) \quad (j = 2, 3).$$

Используя (1.11), будем искать решение только для осевой компоненты скорости w . Это решение можно представить в виде

$$w = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 C_{lj} Z_m^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j r),$$

где C_{lj} — константы, причем $C_{12} = C_{13} = C_{31} = 0$; δ_{1j} — дельта-функция Кронекера, равная единице при $j = 1$; $Z_m^{(0)}(\lambda_1 r) = J_m(\lambda_1 r)$; $Z_m^{(1)}(\lambda_1 r) = Y_m(\lambda_1 r)$; $J_m(\lambda_1 r)$, $Y_m(\lambda_1 r)$ — функции Бесселя; $Z_m^{(l)}(\lambda_j r) = H_m^{(l-1)}(\lambda_j r)$ при $l = 2, 3$, $j = 2, 3$; $H_m^{(l-1)}(\lambda_j r)$ — функция Ганкеля m -го порядка; $\lambda_j^2 = \varkappa_j^2 - k^2$. Следует отметить, что в (2.3) наряду с функциями Бесселя 1-го и 2-го рода используются функции Ганкеля, более удобные для описания пограничных

слоев по сравнению с другими цилиндрическими функциями. Функция $H_m^{(1)}(\lambda_j r)$ обращается в нуль при бесконечном значении комплексного аргумента, когда его мнимая часть положительна; $H_m^{(2)}(\lambda_j r)$ обращается в нуль, когда мнимая часть аргумента отрицательна. Подставляя решение (2.2) в граничные условия (1.3), (1.4), преобразованные с использованием (1.11) таким образом, что они содержат только осевую компоненту скорости, получим

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{m(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2} Z_m^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j) + \frac{k}{\lambda_j} Z_{m-1}^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j) \right) C_{lj} = 0,$$

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{m(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2} Z_m^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j) - \frac{\varkappa_j}{\lambda_j} Z_{m-1}^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j) \right) C_{lj} = 0,$$

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 Z_m^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j) C_{lj} = 0,$$

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{2m(\varkappa_j - mk - k) - \varkappa_j \lambda_j^2 \delta^2}{\lambda_j^2} Z_m^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j \delta) - \frac{2(\varkappa_j - mk)}{\lambda_j} Z_{m-1}^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j \delta) \right) C_{lj} = 0,$$

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{m(\varkappa_j^2 - 2k^2 + \varkappa_j k)}{\lambda_j^2} Z_m^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j \delta) - \frac{(\varkappa_j^2 - 2k^2)\delta}{\lambda_j} Z_{m-1}^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j \delta) \right) C_{lj} = 0,$$

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{2}{\varkappa_j} - \frac{m(\varkappa_j - k)}{\lambda_j^2 \tau} - \frac{2imE(m^2 \varkappa_j - m^2 k + m\varkappa_j - k + k\lambda_j^2 \delta^2)}{\lambda_j^2 \delta^2} \right) Z_m^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j \delta) + \left(-\frac{k\delta}{\lambda_j \tau} + \frac{2iE(m\varkappa_j - k)}{\lambda_j \delta} \right) Z_{m-1}^{(l-\delta_{1j})}(\lambda_j \delta) \right] C_{lj} = 0.$$

Из условия разрешимости данной системы уравнений относительно шести неизвестных постоянных C_{lj} можно получить дисперсионное уравнение. Следует отметить, что матрица является плохо обусловленной, поэтому при вычислениях целесообразно перепределить часть коэффициентов C_{lj} следующим образом:

$$C'_{22} = C_{22} H_m^{(1)}(\lambda_2 \delta), \quad C'_{23} = C_{23} H_m^{(1)}(\lambda_3 \delta), \quad C'_{32} = C_{32} H_m^{(2)}(\lambda_2), \quad C'_{33} = C_{33} H_m^{(2)}(\lambda_3).$$

Дисперсионная кривая имеет счетное множество ветвей. На рис. 1, 2 представлены действительная и мнимая части волнового числа k для первых четырех мод при $E = 0,5 \cdot 10^{-4}$, $m = 1$, $\delta = 0,7$. Поверхностной волне соответствует значение $n = 0$. Для сравнения на рис. 1 приведены дисперсионные кривые, полученные в предельном случае ($\mu = 0$), когда дисперсионное уравнение имеет достаточно простой вид:

$$\begin{aligned} & [|k|\gamma J_{m-1}(|k|\gamma) - m(1-2/\tau)J_m(|k|\gamma)][|k|\delta\gamma Y_{m-1}(|k|\delta\gamma) - (m-2m/\tau+4-\tau^2)Y_m(|k|\delta\gamma)] - \\ & - [|k|\delta\gamma J_{m-1}(|k|\delta\gamma) - (m-2m/\tau+4-\tau^2)J_m(|k|\delta\gamma)] \times \\ & \times [|k|\gamma Y_{m-1}(|k|\gamma) - m(1-2/\tau)Y_m(|k|\gamma)] = 0 \quad (\gamma = \sqrt{4/\tau^2 - 1}). \end{aligned}$$

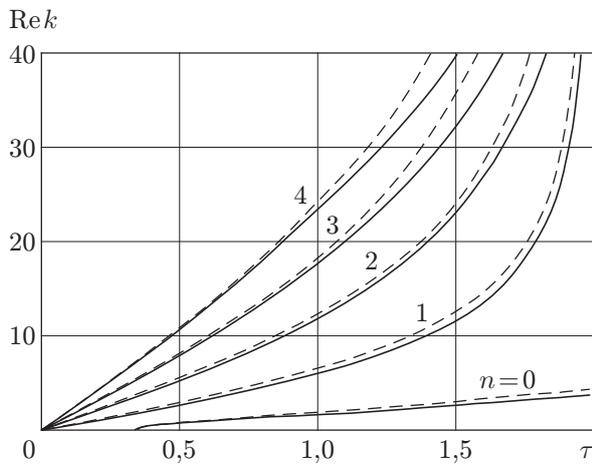


Рис. 1

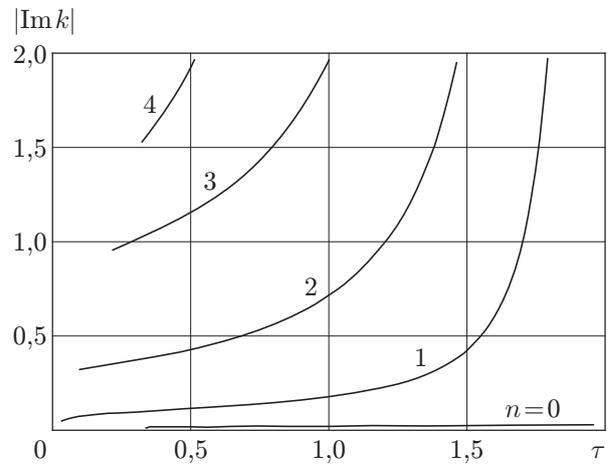


Рис. 2

Рис. 1. Действительная часть волнового числа для первых четырех мод при $E = 0,5 \cdot 10^{-4}$, $m = 1$, $\delta = 0,7$:

сплошные линии — $\mu \neq 0$; штриховые — $\mu = 0$

Рис. 2. Мнимая часть волнового числа для первых четырех мод при $E = 0,5 \cdot 10^{-4}$, $m = 1$, $\delta = 0,7$

Чем больше номер моды, тем существеннее влияние вязкости на коэффициент затухания (мнимую часть волнового числа k), поскольку увеличение номера приводит к усложнению пространственной структуры моды, возрастанию вязких напряжений и увеличению диссипации энергии волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grimshaw R. H. J., Ostrovsky L. A., Shrira V. I., Stepanyants Yu. A. Long nonlinear surface and internal gravity waves in a rotating ocean // *Surveys Geophys.* 1998. V. 19. P. 289–338.
2. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
3. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
4. Бреховских Л. М. Введение в механику сплошных сред / Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров. М.: Наука, 1982.
5. Rieutord M. Inertial modes in the liquid core of the Earth // *Phys. Earth Planetary Interiors.* 1995. V. 91, N 1/4. P. 41–46.
6. Kobine J. J. Inertial wave dynamics in a rotating and precessing cylinder // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 303, N 1. P. 233–252.
7. Manasseh R. Distortions of inertia waves in a rotating fluid cylinder forced near its fundamental mode resonance // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 265, N 1. P. 345–370.
8. Салтанов Н. В. Обобщенный потенциал в теории однородных винтовых потоков несжимаемой жидкости // *Докл. АН СССР.* 1989. Т. 305, № 6. С. 1325–1327.
9. Салтанов Н. В. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения / Н. В. Салтанов, В. А. Горбань. Киев: Наук. думка, 1993.
10. Иванова А. А., Козлов В. Г., Чиграков А. В. Динамика жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2004. № 4. С. 98–111.

11. **Соболев С. Л.** О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // ПМТФ. 1960. № 3. С. 20–55.
12. **Stewartson K.** On the stability of a spinning top containing liquid // J. Fluid Mech. 1959. V. 5, N 4. P. 577–592.
13. **Stewartson K., Roberts P. H.** On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body // J. Fluid Mech. 1963. V. 17, N 1. P. 1–20.
14. **Rumyantsev V. V.** Stability of motion of solid bodies with liquid-filled cavities by Lyapunov's method // Adv. Appl. Mech. 1964. V. 8. P. 183–232.
15. **Моисеев Н. Н.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. М.: Наука, 1965.
16. **Saito S., Someya T.** Self-excited vibration of a rotating hollow shaft partially filled with liquid // Trans. ASME. J. Mech. Design. 1980. V. 102, N 1. P. 185–192.
17. **Дерендяев Н. В., Сандалов В. М.** Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 4. С. 578–586.
18. **Дерендяев Н. В., Сандалов В. М.** Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Машиноведение. 1986. № 1. С. 19–26.
19. **Derendyayev N. V., Soldatov I. N., Vostrukhov A. V.** Stability and Andronov — Hopf bifurcation of steady-state motion of rotor system partly filled with liquid: continuous and discrete models // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2006. V. 73, N 4. P. 580–589.

*Поступила в редакцию 18/IV 2006 г.,
в окончательном варианте — 3/V 2007 г.*
