ДИФФУЗИЯ В ПОЛЕ ВНЕШНИХ СИЛ ПО ГРАНИЦАМ РАЗДЕЛА

В. А. Стерхов (Горький)

Приводится решение уравнения параболического типа, описывающее диффузию по границам раздела в поле внешних сил, один из коэффициентов которого является функцией времени. Рассматривается частный случай этого решения, когда диффузия идет по плоским межкристаллитным сочленениям в поле внешних сил.

Используя модель Фишера [1] (рассматривается диффузия в полубесконечном двойном кристалле с границами зерен шириной 2δ, перпендикулярными к поверхности образца), можно записать

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - w\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{2D_v}{\delta}\left(\frac{\partial c_v}{\partial y}\right)_{y=0}, \qquad \frac{\partial c_v}{\partial t} = D_v\frac{\partial^2 c_v}{\partial y^2} \qquad (D \gg D_v) \tag{1}$$

Здесь D и D_v — коэффициенты диффузии в границе и объеме; $c(x, t)$ и $c_v(y, t)$ — концентрация диффузанта в границе и объеме; w — скорость переноса диффундирующих частиц, обусловленная влиянием внешних сил.

Первое уравнение (1) описывает распределение диффузанта в границе, третье слагаемое которого характеризует «отсос» диффузанта из границы в объем, при этом отсос описывается вторым уравнением (1). Уравнения (1) решаются при краевых условиях:

$$c(0, t) = c_0, \qquad c(\infty, t) = 0, \qquad c(x, 0) = 0 \tag{2}$$

$$c_v(0, t) = c(x, t), \qquad c_v(\infty, t) = 0, \qquad c_v(y, 0) = 0 \tag{3}$$

Тогда в зависимости от геометрии границы и при условии, что отсос в объем из границы идет по закону постоянного источника [1,2], можно записать

$$\frac{2D_v}{\delta}\left(\frac{\partial c_v}{\partial y}\right)_{y=0} = f(t)\,c(x, t) \tag{4}$$

В этом случае первое уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - w\frac{\partial c}{\partial x} - f(t)\,c \tag{5}$$

и решается с краевыми условиями (2).

Авторы работ [1,2] искали решение подобного уравнения в предположении, что при достаточно больших t производная $dc/dt = 0$; это ограничивает область применения такого решения. При помощи подстановки Смолуховского [3]

$$c(x, t) = u(x, t)\exp\left(\frac{wx}{2D} - \frac{w^2 t}{4D}\right) \tag{6}$$

уравнение (5) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(t)\,u \tag{7}$$

с граничными и начальными условиями

$$u(0, t) = c_0\exp(w^2 t/4D), \qquad u(\infty, t) = 0, \qquad u(x, 0) = 0 \tag{8}$$

Для решения уравнения (7) с краевыми условиями (8) применим синус-трансформацию Фурье [4]

$$\Phi_s(\xi, t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty u(x, t)\sin\xi x\,dx, \qquad u(x, t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty \Phi_s(\xi, t)\sin\xi x\,d\xi \tag{9}$$

Тогда уравнение (7) трансформируется в уравнение вида

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} Dc_0\xi\exp\frac{w^2 t}{4D} - \xi^2 D\Phi_s - f(t)\,\Phi_s \tag{10}$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения будет следующее:

$$\Phi_s(\xi, t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} Dc_0\xi\exp\left[-\xi^2 Dt - \int_0^t f(\lambda)\,d\lambda\right]\int_0^\infty \exp\left[\frac{w^2\lambda}{4D} + \xi^2 DA + \int_0^\lambda f(\alpha)\,d\alpha\right]d\lambda \tag{11}$$

Применив к (11) обратное преобразование Фурье (9), находим (12)

$$u(x,t)=\frac{c_0x}{2\sqrt{\pi D}}\exp\left[-\int_0^t f(\lambda)\,d\lambda\right]\int_0^\infty \exp\left[\frac{w^2\lambda}{4D}+\int_0^\lambda f(\alpha)\,d\alpha-\frac{x^2}{4D(t-\lambda)}\right]\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/2}}$$

Далее, используя (12) и (6), получим

$$c(x,t)=\frac{c_0x}{2\sqrt{\pi D}}\exp\left[-\int_0^t f(\lambda)\,d\lambda+\frac{wx}{2D}\right]\int_0^t \exp\left[-\frac{w^2(t-\lambda)}{4D}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^2}{4D(t-\lambda)}+\int_0^\lambda f(\alpha)\,d\alpha\right]\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/2}} \tag{13}$$

Произведем здесь замену переменной $\xi={}^1/_2\,x\,/\,\sqrt{D\,(t-\lambda)}$; получим

$$c(x,t)=\frac{2c_0}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{Dt}}^{\infty}\exp\left[-\int_{t-x^2/4D\xi^2}^{t} f(\lambda)\,d\lambda-\left(\xi-\frac{wx}{4D\xi}\right)^2\right]d\xi \tag{14}$$

Это решение удовлетворяет начальным и граничным условиям (2). Решение (14) не учитывает влияния внешнего поля на диффузию в объеме кристалла, так как скорость переноса в объеме на несколько порядков ниже, чем в границе.

Сложность выражения (14) обусловлена общим видом функции $f(t)$, которая учитывает геометрию границы, диффузию из границы в объем и т. д. В частных случаях решение будет значительно упрощаться. Так, если рассмотреть влияние внешнего поля на диффузию в плоской границе, как это сделано в работе [2], то функция $f(t)=\sqrt{D_v\,/\,y^2t}$, а решение (14) примет вид

$$c(x,t)=\frac{2c_0}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{Dt}}^{\infty}\exp\left[-\frac{2\sqrt{D_vt}}{\delta}+\frac{2}{\delta}\left(D_vt-\frac{x^2D_v}{4D\xi^2}\right)^{1/2}-\left(\xi-\frac{wx}{4D\xi}\right)^2\right]d\xi \tag{15}$$

Обычно величина коэффициента объемной диффузии D_v определяется независимо, поэтому для определения D и w можно воспользоваться методом «стандартных кривых», которые строятся на основании вычисления найденного решения на электронно-вычислительной машине.

Поступила 15 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Fisher J. C. Calculation of diffusion penetration curves for surface and grain boundary diffusion. J. Appl. Phys., 1951, vol. 22, No 1.
2. Клоцман С. М., Тимофеев А. Н., Трахтенберг И. Ш. Межкристаллитная самодиффузия серебра в электрическом поле. Физ. тверд. тела, 1963, т. 5, вып. 11.
3. Эйнштейн А., Смолуховский М. Брауновское движение, ОНТИ, 1963.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С СЕТОЧНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ ПРИ СЛАБОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

А. И. Болиславский, Е. И. Янтовский

(Харьков)

Рассматривается установившееся течение несжимаемой и невязкой электропроводной жидкости в трубе кругового сечения. Стенки трубы предполагаются изолированными. Оба электрода, установленные поперек трубы на расстоянии l друг от друга, выполнены в виде сетки (фиг. 1). Потенциалы на электродах считаются постоянными.

В данном случае уравнения магнитной гидродинамики имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=0,\quad (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{1}{\rho}\mathbf{j}\times\mu\mathbf{H},\quad \mathbf{j}=\operatorname{rot}\mathbf{H},\quad \mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mu\mathbf{H}) \tag{1}$$