

УДК 519.688

Безынтерполяционный LBM на неравномерных сетках*

А.В. Березин^{1,2}, А.В. Иванов¹, А.Ю. Перепёлкина¹

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Миусская пл., 4, Москва, 125047

²Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Каширское шоссе, 31, Москва, 115409

E-mails: arsenbrs@mail.ru (Березин А.В.), aiv.racs@gmail.com (Иванов А.В.), mogmi@narod.ru (Перепёлкина А.Ю.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 16, 2023.

Березин А.В., Иванов А.В., Перепёлкина А.Ю. Безынтерполяционный LBM на неравномерных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 3. — С. 235–252.

Метод решёточных уравнений Больцмана (LBM) — это численная схема решения задач гидродинамики. Одним из важных и развивающихся направлений LBM является корректное построение такой схемы на неравномерных пространственных решётках, которые позволяют значительно снизить общее число вычислений. Однако на текущий момент построение схемы LBM вблизи границы решёток с разным пространственным шагом неизбежно влечёт за собой необходимость интерполяции данных, что может снизить порядок аппроксимации LBM и привести к нарушению законов сохранения. В работе впервые разработан и протестирован безынтерполяционный метод построения атермического узлового LBM на неравномерных решётках с единым шагом по времени для сеток разного масштаба, основанный на двухступенчатой процедуре перекалибровки популяций, отвечающих разным шаблонам.

DOI: 10.15372/SJNM20230301

Ключевые слова: метод решёточных уравнений Больцмана, масштабирование решётки, перекалибровка популяций LBM, перекалибровка моментами.

Berezin A.V., Ivanov A.V., Perepelkina A.Y. LBM on non-uniform grids without interpolation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 3. — P. 235–252.

The lattice Boltzmann method (LBM) is a numerical scheme for solving fluid dynamics problems. One of the important and actively developing areas of LBM is correct construction of the scheme on non-uniform spatial grids. With non-uniform grids the total number of calculations can be significantly reduced. However, at the moment the construction of an LBM scheme near a boundary of grids with different spatial steps inevitably requires data interpolation, which can reduce the LBM approximation order and lead to violation of conservation laws. In this work, for the first time, we have developed and tested a method for constructing an athermal node-based LBM on non-uniform grids without interpolation, with the same time step for grids of different scales. The method is based on a two-stage transformation of populations corresponding to different on-grid stencils.

Keywords: Lattice Boltzmann method, grid refinement, LBM populations transformation, moment matching.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-71-10004)

1. Введение

Метод решётчных уравнений Больцмана (LBM) [1–3] — это численная схема решения задач гидрогазодинамики. Она основана на применении квадратурных формул для вычисления скоростных моментов кинетической функции распределения: плотности, скорости потока и температуры. При этом моменты выражаются через набор популяций — дискретных значений функции распределения. Эволюция популяций определяется системой дискретных кинетических уравнений Больцмана, каждое из которых отвечает фиксированной скорости $\mathbf{c}_i$. Совокупность скоростей $\{\mathbf{c}_i\}$, согласно которым популяции перемещаются по пространственной решётке, называется шаблоном LBM.

Одним из важных и развивающихся направлений LBM является корректное построение этой схемы на неравномерных пространственных решётках [4–9]. Измельчение решётки только в необходимой ограниченной области позволяет значительно снизить общее число вычислений, тем самым повысив эффективность метода. На текущий момент построение схемы LBM вблизи границы решёток с разными пространственными шагами неизбежно влечёт за собой необходимость интерполяции данных по пространству и/или времени [4–15], что может снизить порядок аппроксимации LBM и привести к нарушению законов сохранения.

В данной статье впервые представлен безынтерполяционный метод построения атермического узлового LBM на неравномерных решётках с единым шагом по времени для решёток разного масштаба. В этом методе перемещение популяций LBM вблизи границ решёток разного масштаба обеспечивается использованием трёх различных шаблонов LBM, при этом все шаблоны попадают на решётку и интерполяция не нужна. Однако при этом возникает необходимость перекалибровки — локального перехода от набора популяций, соответствующих одному из шаблонов, к набору популяций другого шаблона. Такая необходимость появляется из-за того, что отвечающие разным шаблонам наборы популяций являются решениями различных систем дискретных уравнений Больцмана. Нами разработан двухступенчатый способ локальной перекалибровки популяций между произвольными шаблонами, который включает в себя масштабирование неравновесной части популяций [10] и разработанную для PoD перекалибровку моментами [16, 17].

Изложенный в работе метод протестирован путём моделирования течения Пуазейля и затухающей гармонической волны на неравномерной пространственной решётке.

2. Описание метода

2.1. Построение LBM. Свободные и фиксированные параметры

Кинетическое уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \hat{\Omega}, \quad (1)$$

где $f(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$ — одночастичная функция распределения, зависящая от времени t , координаты пространства $\mathbf{r}$ и скорости $\boldsymbol{\xi}$, а $\hat{\Omega}$ — столкновительный член.

Макроскопические параметры течения: плотность $\rho(t, \mathbf{r})$, скорость течения $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, температура $T(t, \mathbf{r})$ — определяются моментами функции распределения:

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^D} f d^D \boldsymbol{\xi}, \quad \rho \mathbf{u} = \int_{\mathbb{R}^D} \boldsymbol{\xi} f d^D \boldsymbol{\xi}, \quad \rho(u^2 + DT) = \int_{\mathbb{R}^D} \boldsymbol{\xi}^2 f d^D \boldsymbol{\xi}. \quad (2)$$

Здесь D — размерность рассматриваемого пространства.

В случае отсутствия столкновительного члена решением (1), удовлетворяющим соотношениям (2), является равновесная функция распределения

$$f^{\text{eq}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\rho}{(\sqrt{2\pi}\xi_0)^D} e^{-(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{u})^2/2\xi_0^2}, \quad T = \xi_0^2. \quad (3)$$

Применим численное квадратурное интегрирование для вычисления моментов (2). При этом, с учётом вида частного решения (3), введём в рассмотрение весовой множитель

$$\omega(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\xi_0)^D} e^{-\boldsymbol{\xi}^2/2\xi_0^2}. \quad (4)$$

Допустим, что мы построили квадратурную формулу, имеющую порядок аппроксимации n :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^D} g(\boldsymbol{\xi}) d^D \boldsymbol{\xi} &= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{g(\boldsymbol{\xi})}{\omega(\boldsymbol{\xi})} \omega(\boldsymbol{\xi}) d^D \boldsymbol{\xi} = \int_{\substack{\boldsymbol{\xi}=\xi_0 \mathbf{v} \\ d^D \boldsymbol{\xi}=\xi_0^D d^D \mathbf{v}}} \frac{g(\boldsymbol{\xi})}{\omega(\boldsymbol{\xi})} \omega(\boldsymbol{\xi}) d^D \boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{g(\xi_0 \mathbf{v})}{\omega(\xi_0 \mathbf{v})} e^{-\mathbf{v}^2/2} d^D \mathbf{v} \simeq \sum_i \frac{w_i g(\mathbf{c}_i)}{\omega(\mathbf{c}_i)}, \end{aligned} \quad (5)$$

в которой $\mathbf{c}_i = \xi_0 \mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_i$ — узел квадратуры, а w_i — отвечающий этому узлу вес.

Совокупность скоростей $\{\mathbf{c}_i\}$ является шаблоном LBM. Таким образом, шаблон определяется используемой квадратурой и параметром ξ_0 .

Используя (2) и (5), находим

$$\rho = \sum_i \frac{w_i f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i)}{\omega(\mathbf{c}_i)} = \sum_i f_i, \quad (6)$$

где определён дискретный набор популяций

$$f_i(t, \mathbf{r}) \equiv \frac{w_i f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i)}{\omega(\mathbf{c}_i)} = \left(\sqrt{2\pi}\xi_0 \right)^D w_i f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) e^{c_i^2/2\xi_0^2}. \quad (7)$$

И аналогично для остальных моментов:

$$\rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i, \quad \rho(u^2 + DT) = \sum_i f_i c_i^2. \quad (8)$$

Для популяций (7) равновесной функции распределения (3) получаем

$$f_i^{\text{eq}} = \rho w_i e^{(2\mathbf{c}_i \mathbf{u} - u^2)/2\xi_0^2}. \quad (9)$$

Считая скорость потока $\mathbf{u}$ малой, можно разложить (9) и прийти к хорошо известному представлению равновесных популяций

$$f_i^{\text{eq}} = \rho w_i \left(1 - \frac{u^2}{2\xi_0^2} + \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{u}}{\xi_0^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \mathbf{u})^2}{2\xi_0^4} \right), \quad (10)$$

которые в точности удовлетворяют соотношениям (6), (8), если используется квадратура, имеющая по крайней мере четвёртый порядок аппроксимации (при этом опять же

$T = \xi_0^2$). Подчеркнём, что выражение (10) зависит как от выбора точек квадратуры $\mathbf{v}_i$, так и от выбора параметра ξ_0 .

Обсудим смысл величины ξ_0 . В вышеприведённых выкладках ξ_0 является свободным параметром, который, к примеру, позволяет масштабировать набор дискретных скоростей $\mathbf{c}_i$, тем самым выступая дополнительной переменной при построении шаблонов. Таким образом, ξ_0 можно воспринимать как параметр, отождествляющий абстрактную математическую квадратуру с реальным пространством и временем/решёткой LBM. Кроме того, исходя из (3), ξ_0^2 можно придать смысл температуры или квадрата скорости звука. Однако в текущей работе мы не интересуемся этими величинами и рассматриваем атермический LBM, для построения которого достаточно квадратур пятого порядка [1].

Итак, благодаря соотношениям (6), (8), мы выразили макроскопические параметры системы через дискретные популяции f_i . Их эволюцию во времени определяет набор дискретизованных по скорости $\boldsymbol{\xi}$ кинетических уравнений Больцмана, которые можно получить из (1), положив $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{c}_i$ и домножив, в соответствии с (7), на $w_i/\omega(c_i)$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = \hat{\Omega}_i, \quad \hat{\Omega}_i \equiv \frac{w_i}{\omega(c_i)} \hat{\Omega} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}_i}. \quad (11)$$

Далее в выкладках мы будем использовать оператор столкновения BGK [18]. При этом

$$\hat{\Omega} = \frac{f^{\text{eq}} - f}{\tau}, \quad \hat{\Omega}_i = \frac{f_i^{\text{eq}} - f_i}{\tau}, \quad (12)$$

где τ — ещё один свободный параметр — характерное время релаксации функции распределения к равновесной.

Для численного решения уравнений (11) введём равномерную пространственную решётку с шагом Δx . Дискретизируем (11), разбив эволюцию популяций, соответствующую дискретному временному шагу Δt , на два последовательных этапа:

- шаг переноса: $\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = 0 \Rightarrow$

$$f_i(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{c}_i \Delta t, \quad (13)$$

- шаг столкновения: $\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{f_i^{\text{eq}} - f_i}{\tau} \Rightarrow$

$$f_i(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta t}{\tau} (f_i^{\text{eq}}(\mathbf{r}, t) - f_i(\mathbf{r}, t)). \quad (14)$$

Чтобы удовлетворить последнему условию в (13), которое позволяет популяциям f_i перемещаться строго по выбранной пространственной решётке, необходимо нормировать шаблон $\{\mathbf{c}_i\}$ согласно выбранным шагам Δx , Δt . Это можно сделать соответствующим выбором масштабирующего параметра ξ_0 . К примеру, для шаблона D2Q9, отвечающего квадратуре с точками

$$\{\mathbf{v}_i^{\text{D2Q9}}\} = \{(0, 0), (0, \pm\sqrt{3}), (\pm\sqrt{3}, 0), (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})\}, \quad (15)$$

необходимо положить $\xi_0 = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}\Delta t}$.

С учётом вышесказанного численная схема LBM принимает простой вид: на шаге переноса популяции f_i перемещаются строго по дискретной пространственной решётке

согласно своим скоростям $\mathbf{c}_i$, а на этапе столкновения локально получают приращение согласно (14).

Наконец, определим одну из важнейших характеристик макроскопического течения, а именно вязкость ν . Исходя из разложения Чепмена–Энскога, в терминах LBM [1] имеем

$$\nu = \xi_0^2 \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right). \quad (16)$$

В качестве итога ещё раз перечислим основные параметры при построении классического LBM и связи, которым эти параметры должны удовлетворять. Допустим, мы хотим смоделировать течение с вязкостью ν на равномерной пространственной решётке с заданным пространственным шагом Δx . При этом необходимо удовлетворить соотношениям

$$n\Delta x = \xi_0 v_{i,k} \Delta t, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \nu = \xi_0^2 \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right), \quad (17)$$

в которых ξ_0 , Δt , τ можно считать свободными параметрами.

Также у нас есть выбор в использовании квадратуры, т.е. её точек $\mathbf{v}_i$, однако, во-первых, чем меньше узлов в квадратуре, тем схема проще для численного решения, а во-вторых, чтобы удовлетворить первому условию в (17) для любых компонент любой точки квадратуры, эти точки должны с точностью до общего масштабирующего коэффициента накладываться строго на выбранную пространственную решётку. Кроме того, для моделирования уравнения Навье–Стокса с вязкостью (16) необходима квадратура по крайней мере пятого порядка аппроксимации [1]. Эти условия значительно (но не полностью) ограничивают выбор квадратур.

2.2. Неравномерные сетки

Построим безынтерполяционную схему LBM на границе перехода двумерных решёток разного масштаба. Допустим, слева мы имеем равномерную “coarse”-решётку с $\Delta x_c = 1$, а справа равномерную “fine”-решётку с $\Delta x_f = 1/2$ (рисунок 1).

Для начала отметим, что есть две эквивалентные парадигмы шага переноса в LBM: Push и Pull. В случае парадигмы Push новый (после шага переноса) набор популяций в узле решётки определяется шаблонами других узлов, т.е. необходимо взять те популяции других узлов, которые при переносе согласно своим шаблонам попадут в рассматриваемый. В случае парадигмы Pull новый набор популяций в узле решётки определяется шаблоном именно этого узла, т.е. популяции “запрашиваются” из других узлов согласно шаблону рассматриваемого. Если речь идёт о равномерной пространственной сетке, то эти парадигмы неотличимы. Однако в случае неравномерных сеток это не так. Далее мы будем следовать парадигме Pull.

Теперь отдельно построим схему LBM для грубой и точной равномерных решёток. Используем двумерную квадратуру Гаусса–Эрмита и, соответственно, набор узлов (15). При этом выполнения первого условия в (17) для обеих решёток можно добиться разными способами. Один из них — аналогично масштабированию по пространству ввести для точной решётки масштабирование временного шага, т.е. положить $\Delta t_c = 2\Delta t_f = 1$ ($\xi_{0,c} = \xi_{0,f} = 1/\sqrt{3}$), как это сделано, к примеру, в [10]. Проблема такого подхода заключается в неизбежности интерполяции данных на границе перехода решёток, т.к. только так можно получить информацию на границе для точной решётки на полупелых шагах по времени. Другой способ, который мы и используем — это масштабирование шаблона путём изменения параметра ξ_0 . Положим

$$\xi_{0,c} = 2\xi_{0,f} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \Delta t_c = \Delta t_f = \Delta t \quad (18)$$

и определим шаблоны для точек на грубой и точной решётке как

$$\{\mathbf{c}_{i,c}\} = \xi_{0,c} \left\{ \mathbf{v}_i^{\text{D2Q9}} \right\}, \quad \{\mathbf{c}_{i,f}\} = \xi_{0,f} \left\{ \mathbf{v}_i^{\text{D2Q9}} \right\}. \quad (19)$$

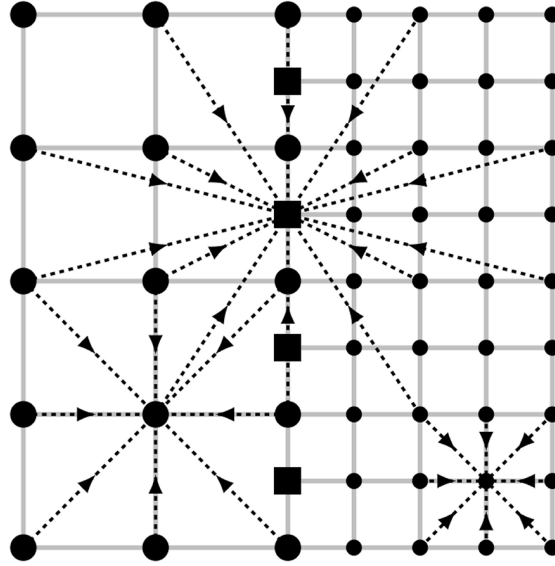


Рис. 1. Схема шага переноса на границе перехода решёток разного масштаба для трёх различных шаблонов. Большие и малые круглые узлы соответствуют квадратуре D2Q9 с параметрами ξ_0 , равными $1/\sqrt{3}$ и $1/(2\sqrt{3})$ соответственно. Квадратные узлы соответствуют квадратуре D2Q15 с $\xi_0 = 5/\sqrt{38}$ (приложение А)

Итак, в случае парадигмы Pull для больших круглых узлов на рис. 1 будем использовать шаблон $\{\mathbf{c}_{i,c}\}$, а для малых круглых — $\{\mathbf{c}_{i,f}\}$. Для квадратных же узлов необходимо построить новый шаблон. Причём, как несложно видеть из положения этих точек на границе, такой шаблон не получится построить масштабированием квадратуры (15). Один из простейших шаблонов для квадратных узлов на рис. 1, имеющий пятый порядок аппроксимации, построен в приложении А.

Теперь, когда мы определили шаблон для каждого узла нашей неравномерной решётки, необходимо заметить, что во время шага переноса вблизи границы сеток разного масштаба узлы, соответствующие одному из используемых шаблонов, будут запрашивать популяции из узлов, соответствующих другому шаблону. Таким образом, мы приходим к необходимости локальной перекалибровки популяций одного шаблона в популяции другого шаблона.

2.3. Метод перекалибровки

Приведём метод локальной (по времени и пространству) перекалибровки популяций между двумя произвольными шаблонами.

Дискретизованное кинетическое уравнение Больцмана (13), (14) имеет вид

$$f_i(t + \Delta t, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t) = f_i(t, \mathbf{r}) + \frac{\Delta t}{\tau} (f_i^{\text{eq}}(t, \mathbf{r}) - f_i(t, \mathbf{r})). \quad (20)$$

С точки зрения цикла LBM, (20) можно прочесть следующим образом: выходящие из точки $(t, \mathbf{r})$ популяции (после шага столкновения!) определяются популяциями в этой же точке, согласно правой части равенства.

Чтобы найти связь между исходящими из узла наборами популяций, отвечающих разным шаблонам, обратимся к разложению Чепмена–Энскога [1, 19]. Учитывая только линейную поправку по числу Кнудсена ϵ , имеем

$$f_i \simeq f_i^{\text{eq}} + \epsilon f_i^{(1)}, \quad f_i^{(1)} = -\tau \left(\partial_t^{(1)} f_i^{\text{eq}} + \mathbf{c}_i \partial_{\mathbf{r}}^{(1)} f_i^{\text{eq}} \right), \quad \partial^{(1)} = \frac{\partial}{\epsilon}, \quad (21)$$

или же, расписав явно:

$$f_i \simeq f_i^{\text{eq}} - \tau (\partial_t f_i^{\text{eq}} + \mathbf{c}_i \partial_{\mathbf{r}} f_i^{\text{eq}}) = f_i^{\text{eq}} - \tau D f_i^{\text{eq}}, \quad D \equiv \partial_t + \mathbf{c}_i \partial_{\mathbf{r}}. \quad (22)$$

Мы начнём с уже существующего метода перекалибровки между наборами популяций, отвечающих одинаковым шаблонам $\{\mathbf{c}_i\}$, но различным параметрам Δt и τ в (20). Допустим, речь идёт о крупной сетке с параметрами Δt_c и τ_c . Подставляя (22) в (20), получаем

$$f_{i,c}(t + \Delta t_c, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t_c) - f_i^{\text{eq}}(t, \mathbf{r}) = (\Delta t_c - \tau_c) D f_i^{\text{eq}}(t, \mathbf{r}). \quad (23)$$

Аналогично для сетки с $\Delta t_f = \Delta t_c/n$, τ_f :

$$f_{i,f}(t + \Delta t_f, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t_f) - f_i^{\text{eq}}(t, \mathbf{r}) = (\Delta t_f - \tau_f) D f_i^{\text{eq}}(t, \mathbf{r}). \quad (24)$$

Разделив (23) на (24), получим соответствующую [10] формулу

$$\frac{f_{i,c}(t + \Delta t_c, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t_c) - f_i^{\text{eq}}(t, \mathbf{r})}{f_{i,f}(t + \Delta t_f, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t_f) - f_i^{\text{eq}}(t, \mathbf{r})} = \frac{n(1 - \tau_c/\Delta t_c)}{1 - \tau_f/\Delta t_f}, \quad (25)$$

в которой связь между τ_c и τ_f даётся исходя из равенства вязкости (17) на разных сетках:

$$\nu = \xi_0^2 \left(\tau_c - \frac{\Delta t_c}{2} \right) = \xi_0^2 \left(\tau_f - \frac{\Delta t_f}{2} \right) \Rightarrow \frac{\tau_c/\Delta t_c - 1/2}{\tau_f/\Delta t_f - 1/2} = \frac{1}{n}. \quad (26)$$

Теперь получим выражение, аналогичное (25), для интересного нам случая $\Delta t_c = \Delta t_f = \Delta t$. Пусть сначала речь идёт о двух шаблонах, отвечающих одной и той же квадратуре $\{\mathbf{v}_i\}$, но различным параметрам ξ_0 , за счёт чего и будет происходить масштабирование решётки. Положим

$$\xi_{0,f} = \frac{\xi_{0,c}}{n}, \quad \{\mathbf{c}_{i,f}\} = \frac{\{\mathbf{c}_{i,c}\}}{n}, \quad (27)$$

при этом

$$D_f \neq D_c, \quad f_{i,f}^{\text{eq}} \neq f_{i,c}^{\text{eq}}, \quad (28)$$

а вместо связи (26) имеем

$$\frac{\tau_c/\Delta t - 1/2}{\tau_f/\Delta t - 1/2} = \frac{1}{n^2}. \quad (29)$$

С учётом (27), (28) соотношение, связывающее постстолкновительные популяции, в отличие от (25) принимает вид

$$\frac{f_{i,c}(t + \Delta t, \mathbf{r} + \mathbf{c}_{i,c}\Delta t) - f_{i,c}^{\text{eq}}(t, \mathbf{r})}{f_{i,f}(t + \Delta t, \mathbf{r} + \mathbf{c}_{i,f}\Delta t) - f_{i,f}^{\text{eq}}(t, \mathbf{r})} = \frac{(1 - \tau_c/\Delta t)D_c f_{i,c}^{\text{eq}}}{(1 - \tau_f/\Delta t)D_f f_{i,f}^{\text{eq}}}. \quad (30)$$

Выясним зависимость величины Df_i^{eq} от выбора сетки. Для этого явно подействуем производными в операторе D на моменты $\rho, \mathbf{u}$. Исходя из (10), (22), находим

$$Df_i^{\text{eq}} = w_i \epsilon \left(\partial_t^{(1)} \rho - \frac{1}{2\xi_0^2} \partial_t^{(1)} \rho u^2 + \frac{c_{i,\beta}}{\xi_0^2} \partial_t^{(1)} \rho u_\beta + \frac{c_{i,\beta} c_{i,\gamma}}{2\xi_0^4} \partial_t^{(1)} \rho u_\beta u_\gamma + \right. \\ \left. c_{i,\alpha} \partial_\alpha^{(1)} \rho - \frac{c_{i,\alpha}}{2\xi_0^2} \partial_\alpha^{(1)} \rho u^2 + \frac{c_{i,\alpha} c_{i,\beta} c_{i,\gamma}}{2\xi_0^4} \partial_\alpha^{(1)} \rho u_\beta u_\gamma + \frac{c_{i,\alpha} c_{i,\beta}}{\xi_0^2} \partial_\alpha^{(1)} \rho u_\beta \right). \quad (31)$$

Избавимся от производных по времени в (31) с помощью уравнений на моменты первого порядка по ϵ :

$$\partial_t^{(1)} \rho + \partial_\alpha^{(1)} (\rho u_\alpha) = 0, \quad \partial_t^{(1)} (\rho u_\alpha) + \partial_\gamma^{(1)} \Pi_{\alpha\gamma}^{\text{eq}} = 0, \quad (32)$$

где

$$\Pi_{\alpha\gamma}^{\text{eq}} = \rho u_\alpha u_\gamma + \rho \xi_0^2 \delta_{\alpha\gamma}. \quad (33)$$

Расписав производную

$$\partial_t^{(1)} \rho u_\beta u_\gamma = u_\beta \partial_t^{(1)} \rho u_\gamma + u_\gamma \partial_t^{(1)} \rho u_\beta - u_\beta u_\gamma \partial_t^{(1)} \rho \quad (34)$$

и используя (32), (33), выражение (31) можно переписать в виде

$$Df_i^{\text{eq}} = w_i \epsilon \left(-\rho \partial_\alpha^{(1)} u_\alpha + \frac{c_{i,\alpha} c_{i,\beta}}{\xi_0^2} \rho \partial_\alpha^{(1)} u_\beta - \right. \\ \left. \frac{c_{i,\beta}}{\xi_0^2} \partial_\gamma^{(1)} \rho u_\beta u_\gamma - \frac{c_{i,\alpha}}{2\xi_0^2} \partial_\alpha^{(1)} \rho u^2 + \frac{c_{i,\alpha} c_{i,\beta} c_{i,\gamma}}{2\xi_0^4} \partial_\alpha^{(1)} \rho u_\beta u_\gamma + \mathcal{O}(u^3) \right). \quad (35)$$

Вернёмся в (35) к стандартным производным, согласно (21), и выразим скорости шаблона через точки квадратуры ($\mathbf{c}_i = \xi_0 \mathbf{v}_i$), чтобы явно выделить зависимость от параметра ξ_0 :

$$Df_i^{\text{eq}} = w_i \left(-\rho \partial_\alpha u_\alpha + v_{i,\alpha} v_{i,\beta} \rho \partial_\alpha u_\beta - \right. \\ \left. \frac{v_{i,\beta}}{\xi_0} \partial_\gamma \rho u_\beta u_\gamma - \frac{v_{i,\alpha}}{2\xi_0} \partial_\alpha \rho u^2 + \frac{v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{i,\gamma}}{2\xi_0} \partial_\alpha \rho u_\beta u_\gamma + \mathcal{O}(u^3) \right). \quad (36)$$

Из (36) видно, что подчёркнутые, линейные по скорости, слагаемые совпадают для шаблонов разного масштаба. О квадратичных и кубических такого уже сказать нельзя. Если всё же ими пренебречь и оставить только первый порядок по u , формула перекалибровки (30) принимает вид

$$\frac{f_{i,c}(t + \Delta t, \mathbf{r} + \mathbf{c}_{i,c}\Delta t) - f_{i,c}^{\text{eq}}(t, \mathbf{r})}{f_{i,f}(t + \Delta t, \mathbf{r} + \mathbf{c}_{i,f}\Delta t) - f_{i,f}^{\text{eq}}(t, \mathbf{r})} = \frac{1 - \tau_c/\Delta t}{1 - \tau_f/\Delta t}. \quad (37)$$

Наконец, обсудим общий случай перекалибровки между шаблонами, отвечающими разным квадратурам $\{\mathbf{v}_i\}$ и разным параметрам ξ_0 (и, соответственно, исходя из (27),

(29), разным параметрам τ). Необходимость перекалибровок (25), (37) популяций, отвечающих одной и той же квадратуре $\{v_i\}$, возникает из-за того, что такие популяции отвечают различным параметрам τ и поэтому решают уравнения (20) с разными столкновительными членами. Таким образом, эти перекалибровки “выравнивают” параметр τ . В интересном нам случае, $\Delta t_c = \Delta t_f = \Delta t$, для перехода между наборами популяций, отвечающими одному и тому же значению ξ_0 (одному и тому же значению τ), но разным квадратурам, мы можем применить перекалибровку моментами [16, 17, 20, 21]. При этом связь популяций задаётся исходя из равенства моментов функции распределения, к примеру

$$\left(\sum_i c_{i,x}^p c_{i,y}^q f_i \right) \Big|_{D2Q9} = \left(\sum_i c_{i,x}^p c_{i,y}^q f_i \right) \Big|_{D2Q15}, \quad (38)$$

где общее количество равенств определяется порядком аппроксимации используемых квадратур. В нашем случае требуем выполнение равенства (38) вплоть до

$$p + q \leq 5, \quad p, q \in \mathbb{N}_0. \quad (39)$$

Отметим, что в дополнение к равенствам (38) мы можем написать явную связь популяций, отвечающих одной и той же скорости c_i . В нашем случае это популяции f_0 , отвечающие нулевой скорости. Исходя из (7), следует

$$\frac{f_0}{w_0 \xi_0^2} \Big|_{D2Q9} = \frac{f_0}{w_0 \xi_0^2} \Big|_{D2Q15}. \quad (40)$$

Соотношения (38), (40) являются системой линейных уравнений относительно популяций шаблона, к которому мы хотим перейти. Эта система может быть недоопределённой, и число независимых уравнений в ней может оказаться меньше числа искоемых популяций. Такое, например, происходит при переходе от популяций шаблона D2Q9 к популяциям шаблона D2Q15. В этом случае используются равенства (38) для большего порядка аппроксимации, но исходные моменты рассчитываются с помощью соответствующей узлу равновесной функции распределения.

Обобщим результаты этого подпункта (имеется ввиду всё содержание 2.2): перекалибровка популяций от одного шаблона LBM к другому в общем случае происходит в два этапа. Один из них — переход к популяциям шаблона с таким же значением τ , что и у конечного шаблона (поскольку при этом происходит и изменение параметра ξ_0 согласно (16), этот этап можно назвать выравниваем масштаба). Другой этап — переход к популяциям шаблона с такой же квадратурой, что и у конечного шаблона (выравнивание формы). Эти два этапа могут осуществляться в любом порядке.

3. Тесты

Проведём ряд тестов с помощью построенной нами схемы LBM для неравномерных решёток. Положим

$$\rho = 1, \quad \Delta t = 1, \quad (41)$$

а в качестве области моделирования выберем прямоугольную решётку с измельчением пространственного шага по обеим осям в два раза по краям (рис. 2). При этом её размеры с учётом популячек по краям:

$$L_x = (n_{x,c} - 1)\Delta x_c + (2n_{x,f} + 1)\Delta x_f, \quad L_y = n_{y,c}\Delta x_c. \quad (42)$$

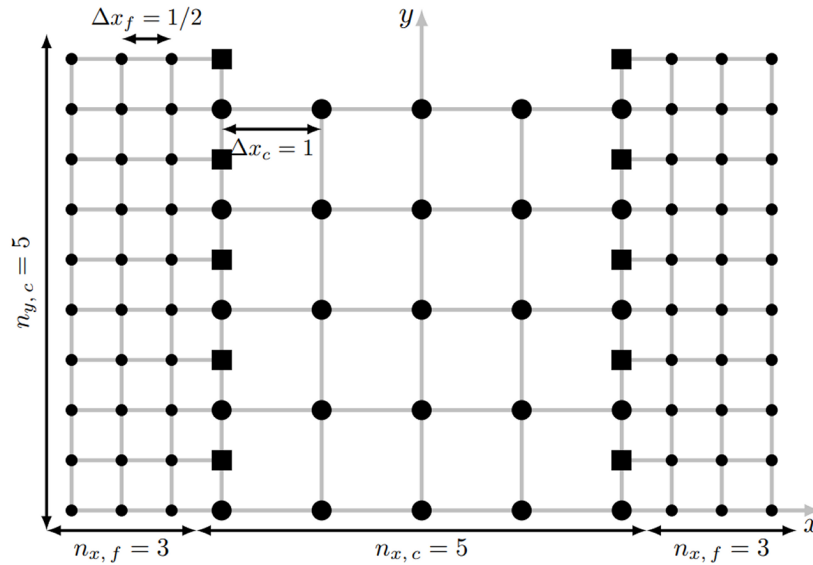


Рис. 2. Характерный вид области моделирования для проверки безынтерполяционной схемы LBM на неравномерных решётках

Результаты численного расчёта LBM будем сравнивать с аналитическим решением уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости (∇ — оператор набла)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (43)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

3.1. Описание алгоритма

Приведём описание алгоритма численной схемы LBM, используемого при проведении тестов. С учётом описанного в предыдущем пункте метода перекалибровки алгоритм во многом соответствует классическому LBM в парадигме Pull: на каждом шаге по времени каждый узел запрашивает популяции согласно своему шаблону. Если запрос приходит в узел, соответствующий другому шаблону, перед шагом переноса происходит процесс локальной перекалибровки (в один или два этапа). Преобразование популяций на границе области определяется граничными условиями тестов.

Всего в моделировании участвуют четыре шаблона: шаблоны $\{\mathbf{c}_{i,c}\}$, $\{\mathbf{c}_{i,f}\}$ (19) для больших круглых узлов грубой и малых круглых узлов точной сеток соответственно, шаблон $\{\mathbf{c}_{i,b}\}$ с параметром $\xi_{0,b} = 5/\sqrt{38}$ (приложение А) для квадратных узлов на границе грубой и точной сеток, а также фантомный шаблон

$$\{\mathbf{c}_{i,p}\} = \xi_{0,b} \left\{ \mathbf{v}_i^{\text{D2Q9}} \right\}, \quad (44)$$

непосредственно не ассоциированный с каким-либо узлом, но необходимый как промежуточный в процессе перекалибровки.

При моделировании применяется библиотека Aiwlib [22].

Алгоритм:

- Шаг переноса для больших круглых узлов. При этом для узлов на границе неравномерных сеток при запросе трёх популяций из малых круглых узлов применяется перекалибровка $\{\mathbf{c}_{i,f}\} \rightarrow \{\mathbf{c}_{i,c}\}$ по формуле (37).

- Шаг переноса для малых круглых узлов. При этом для узлов вблизи границы неравномерных сеток при запросе популяций из больших круглых узлов применяется перекалибровка $\{\mathbf{c}_{i,c}\} \rightarrow \{\mathbf{c}_{i,f}\}$ по формуле (37), а при запросе популяций из квадратных — двухступенчатая перекалибровка $\{\mathbf{c}_{i,b}\} \rightarrow \{\mathbf{c}_{i,p}\} \rightarrow \{\mathbf{c}_{i,f}\}$ (сначала (38), (40) для перехода к $\{\mathbf{c}_{i,p}\}$, после чего (37) для перехода к $\{\mathbf{c}_{i,f}\}$).
- Шаг переноса для квадратных узлов. При этом при запросе популяций из больших круглых узлов применяется двухступенчатая перекалибровка $\{\mathbf{c}_{i,c}\} \rightarrow \{\mathbf{c}_{i,p}\} \rightarrow \{\mathbf{c}_{i,b}\}$ (сначала (37) для перехода к $\{\mathbf{c}_{i,p}\}$, после чего (38), (40) для перехода к $\{\mathbf{c}_{i,b}\}$), а при запросе популяций из малых круглых — двухступенчатая перекалибровка $\{\mathbf{c}_{i,f}\} \rightarrow \{\mathbf{c}_{i,p}\} \rightarrow \{\mathbf{c}_{i,b}\}$ (сначала (37) для перехода к $\{\mathbf{c}_{i,p}\}$, после чего (38), (40) для перехода к $\{\mathbf{c}_{i,b}\}$).
- Локальный шаг столкновения для всех узлов с параметрами BGK $\tau = \Delta t/2 + \nu/\xi_0^2$ (для больших круглых узлов $\xi_{0,c} = 1/\sqrt{3}$, для малых круглых узлов $\xi_{0,f} = 1/(2\sqrt{3})$, для квадратных узлов $\xi_{0,b} = 5/\sqrt{38}$).

3.2. Течение Пуазёйля

Стационарное течение Пуазёйля $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$ соответствует условиям:

$$\mathbf{u}\left(-\frac{L_x}{2}, y\right) = \mathbf{u}\left(\frac{L_x}{2}, y\right) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, y + L_y) = \mathbf{u}(x, y), \quad \nabla p = (0, -g). \quad (45)$$

При этом решение (43) принимает вид

$$u_x = 0, \quad u_y(x) = \frac{gL_x^2}{8\rho\nu} \left(1 - \frac{4x^2}{L_x^2}\right). \quad (46)$$

Для моделирования течения Пуазёйля с помощью LBM используем “bounce-back” граничные условия по оси x [1] и нулевые начальные условия. Для учёта градиента давления g на шаге столкновения будем добавлять поправку $\Delta u_y = g\tau/\rho$ к скорости в равновесных популяциях [23], при этом система со временем придёт к стационарному состоянию. Результаты моделирования приведены на рис. 3.

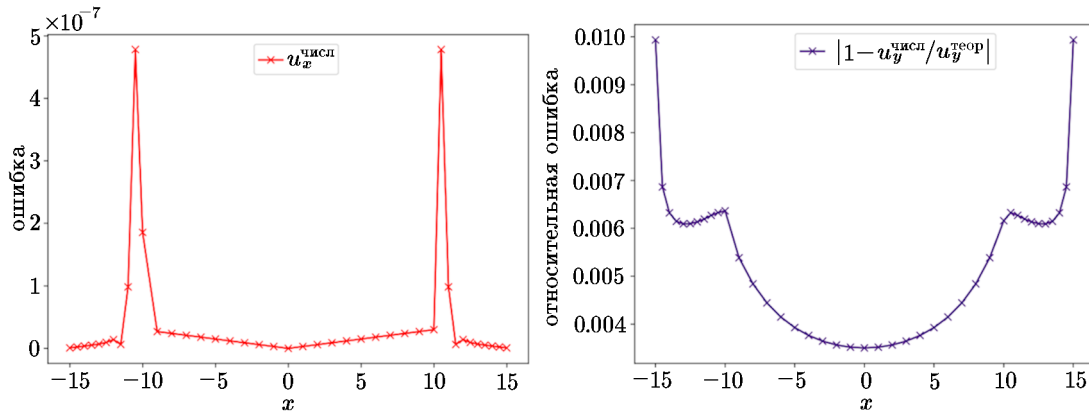


Рис. 3. Зависимость ошибки компонент скорости потока $\mathbf{u}$ от координаты x при моделировании течения Пуазёйля для параметров $n_{x,f} = 10$, $n_{x,c} = 21$, $n_{y,c} = 21$, $\nu = 0.036$, $\Delta u_y = 10^{-8}$ при $30000 \Delta t$

Сравним результаты моделирования нашим кодом с результатами статьи [5], в которой также рассматриваются два метода построения LBM на неравномерных решётках

(IVP и BVP) и приводятся данные моделирования течения Пуазейля. Для этого мы построили графики (см. рис. 4), аналогичные по смыслу графикам [5, рис. 7]. Однако стоит отметить, что для уменьшения ошибки, связанной с границами области моделирования, в [5] используется TRT-оператор столкновения, а мы с этой же целью выбираем выделенное значение параметра $\tau = (\sqrt{3} + 2)/4$, при котором указанная ошибка не превышает ошибки классического LBM [1]. При этом, чтобы моделировать одинаковое поле скоростей, мы удерживаем отношение g/ν таким же, как и в [5]. При одинаковом N разрешение равномерной сетки совпадает с разрешением “fine”-области неравномерной.

Из рис. 4 видно, что наша схема стабильно сходится к точному решению по обеим нормам. Однако в то время как классический LBM на равномерной решётке имеет второй порядок аппроксимации по обеим нормам, наша схема имеет первый порядок и по норме L_∞ , и по норме L_1 . При этом наш новый метод сравним с методом IVP из [5], так как имеет похожую сходимость по норме L_∞ .

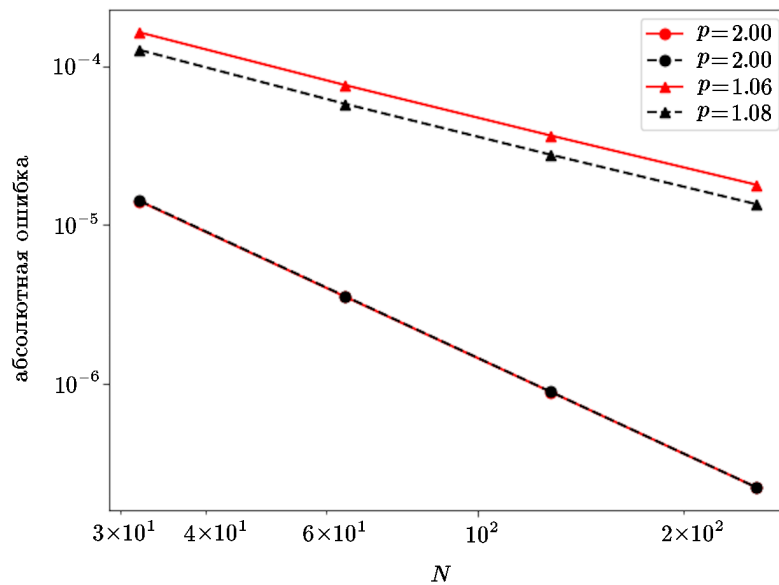


Рис. 4. Абсолютная ошибка при моделировании течения Пуазейля на равномерной (●) и неравномерной (▲) решётках по нормам L_1 (прерывистые линии) и L_∞ (сплошные линии) в зависимости от числа узлов в области моделирования по оси x в логарифмическом масштабе, p — модуль коэффициента наклона графика, порядок аппроксимации. Параметры моделирования: $\tau = (\sqrt{3} + 2)/4$, $g = 7.05 \times 10^{-6}$, для неравномерной сетки $n_{x,f} = n_{x,c}$, $n_{y,c} = 4$

3.3. Двумерная затухающая гармоническая волна

Теперь рассмотрим затухание гармонической волны, которая задаётся условиями

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{r}) = \mathbf{u}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}(t, x + L_x, y + L_y) = \mathbf{u}(t, x, y), \quad \nabla p = 0, \quad (47)$$

а параметры $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{k}$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{u}_0 \mathbf{k} = 0, \quad k_x = \frac{2\pi N_x}{L_x}, \quad k_y = \frac{2\pi N_y}{L_y}, \quad N_x, N_y \in \mathbb{Z}. \quad (48)$$

Решением (43), (47), (48) является функция

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r})e^{-\nu k^2 t/\rho}, \quad \mathbf{u}_0 = u_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + k_x^2/k_y^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + k_y^2/k_x^2}} \right). \quad (49)$$

Результаты моделирования затухающей гармонической волны с помощью схемы LBM на неравномерных сетках приведены на рис. 5.

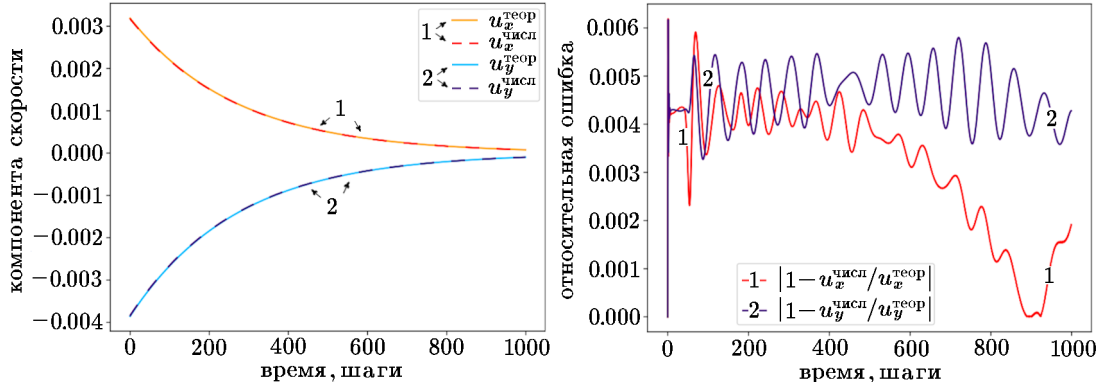


Рис. 5. Зависимость компонент скорости потока $\mathbf{u}$ в узле с координатой $(0, 0)$ от времени (слева) и их относительная ошибка (справа) при моделировании затухающей гармонической волны для параметров $n_{x,f} = 40$, $n_{x,c} = 61$, $n_{y,c} = 81$, $\nu = 0.0625$, $u_0 = 5 \times 10^{-3}$, $N_x = 3$, $N_y = 2$

4. Заключение

Разработана безынтерполяционная схема построения атермического узлового LBM на двумерных неравномерных решётках с единым шагом по времени для решёток разного масштаба. В основе схемы лежит использование различных шаблонов для разных типов узлов на неравномерной решётке, в частности, масштабированный путём изменения свободного параметра ξ_0 шаблон D2Q9. Интерполяции данных на границе перехода сеток удаётся избежать за счёт нового метода перекалибровки популяций, позволяющего свободно переходить от набора популяций одного шаблона к набору популяций другого. Стандартные методы с интерполяцией обладают первым [10, 12, 14, 24], реже вторым [5, 7, 25] порядком аппроксимации, тем не менее, хоть и показано, что на данный момент наша схема имеет первый порядок, остаются пути дальнейшего улучшения порядка аппроксимации за счёт уточнения перекалибровки, выбора других шаблонов для скоростей и др. При этом наш подход является принципиально новым, не испытанным другими авторами, методом построения связи неравномерных сеток, и поэтому существует много путей его развития. Изложенный метод перекалибровки может быть применён как для построения схожих, более сложных схем, так и для уточнения уже существующих.

Приложения

А. Шаблон для разобобщённых граничных узлов

Построим шаблон для квадратных граничных узлов на рис. 1. Чтобы двумерный ($D = 2$) шаблон имел пятый порядок аппроксимации ($n = 5$), его точки $\{\mathbf{c}_i\}$ и их веса $\{w_i\}$ в согласии с (4), (5) должны удовлетворять следующим равенствам:

$$\frac{1}{2\pi\xi_0^2} \int_{\mathbb{R}^2} \xi_x^p \xi_y^q e^{-(\xi_x^2 + \xi_y^2)/2\xi_0^2} d^2\xi = \sum_i w_i c_{i,x}^p c_{i,y}^q, \quad p+q \leq 5, \quad p, q \in \mathbb{N}_0, \quad (50)$$

число которых в общем случае равно $(n+1)(n+2)/2 = 21$.

При фиксированных точках шаблона $\{c_i\}$ (50) является системой линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $0 < w_i < 1$ с параметром ξ_0 . Если эта система разрешима, то шаблон построен.

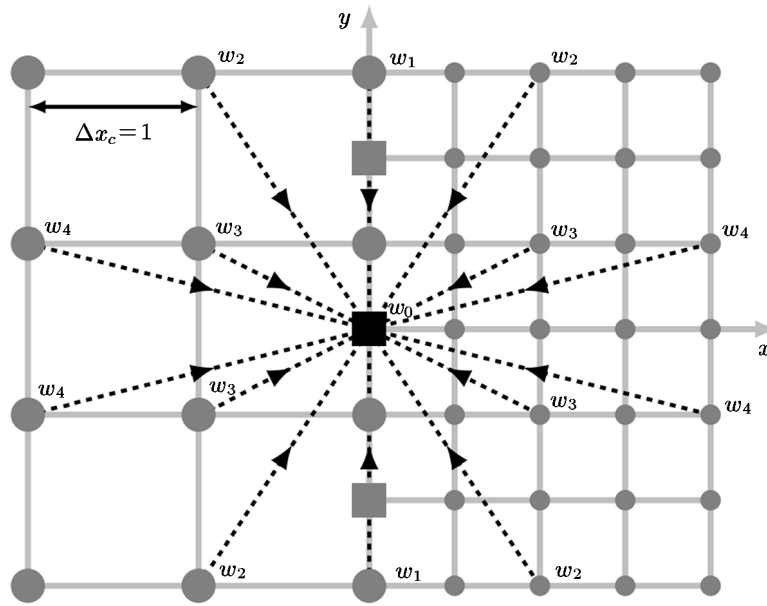


Рис. 6. Шаблон для разбиённых узлов на границе сеток разного масштаба, имеющий пятый порядок аппроксимации

Чтобы упростить систему (50), предположим у шаблона наличие симметрии по обеим осям x и y . При этом все уравнения, содержащие нечётные значения p или q , будут выполнены автоматически, а число нетривиальных равенств уменьшится до шести. Таким образом, необходимо пять коэффициентов w_i (с учётом симметрий шаблона) в дополнение к свободному параметру ξ_0 .

Рассмотрим шаблон

$$\{c_{i,b}\} = \left\{ (0,0), \left(0, \pm\frac{3}{2}\right), \left(\pm 1, \pm\frac{3}{2}\right), \left(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm 2, \pm\frac{1}{2}\right) \right\}, \quad (51)$$

изображённый на рис. 6. При этом нетривиальные равенства, которым необходимо удовлетворить, имеют вид:

$$p = 0, \quad q = 0 : \quad 1 = w_0 + 2w_1 + 4w_2 + 4w_3 + 4w_4, \quad (52)$$

$$p = 2, \quad q = 0 : \quad \xi_0^2 = 4w_2 + 4w_3 + 16w_4, \quad (53)$$

$$p = 0, \quad q = 2 : \quad \xi_0^2 = \frac{9w_1}{2} + 9w_2 + w_3 + w_4, \quad (54)$$

$$p = 4, \quad q = 0 : \quad 3\xi_0^4 = 4w_2 + 4w_3 + 64w_4, \quad (55)$$

$$p = 2, \quad q = 2 : \quad \xi_0^4 = 9w_2 + w_3 + 4w_4, \quad (56)$$

$$p = 0, \quad q = 4 : \quad 3\xi_0^4 = \frac{81w_1}{8} + \frac{81w_2}{4} + \frac{w_3}{4} + \frac{w_4}{4}. \quad (57)$$

Система (52)–(57) имеет решение

$$w_0 = \frac{1249}{3249}, \quad w_1 = \frac{6125}{103968}, \quad w_2 = \frac{775}{23104}, \quad w_3 = \frac{5375}{69312}, \quad w_4 = \frac{925}{69312} \quad (58)$$

при значении параметра $\xi_{0,b} = 5/\sqrt{38}$. Следовательно, необходимый нам шаблон построен.

Литература

1. **Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A. et al.** The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice. — Springer, 2016. — DOI: 10.1007/978-3-319-44649-3.
2. **Куперштох А.Л.** Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость–пар методом решёточных уравнений Больцмана // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика и информатика. — 2005. — Т. 5. — С. 29–42.
3. **Куперштох А.Л.** Трёхмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решёточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 130–138.
4. **Yu Chen, Qinqun Kang, Qingdong Cai, Dongxiao Zhang** Lattice Boltzmann method on quadtree grids // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 83, № 2. — Article № 026707. — DOI: 10.1103/PhysRevE.83.026707.
5. **Guzik S., Xinfeng Gao, Weisgraber T., Alder B., Colella P.** An Adaptive Mesh Refinement Strategy with Conservative Space–Time Coupling for the Lattice-Boltzmann Method // Proc. 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. — American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013. — DOI: 10.2514/6.2013-866.
6. **Touil H., Ricot D., Lévêque E.** Direct and large-eddy simulation of turbulent flows on composite multi-resolution grids by the lattice Boltzmann method // J. Comput. Phys. — 2014. — Vol. 256. — P. 220–233. — <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.07.037>.
7. **Dorschner B., Frapolli N., Chikatamarla S.S., Karlin I.V.** Grid refinement for entropic lattice Boltzmann models // Phys. Rev. E. — 2016. — Vol. 94. — Article № 053311. — DOI: 10.1103/PhysRevE.94.053311.
8. **Fakhari A., Geier M., Lee Taehun** A mass-conserving lattice Boltzmann method with dynamic grid refinement for immiscible two-phase flows // J. Comput. Phys. — 2016. — Vol. 315. — P. 434–457. — DOI: 10.1016/j.jcp.2016.03.058.
9. **Rohde M., Kandhai D., Derksen J.J., Van den Akker H.** A generic, mass conservative local grid refinement technique for lattice-Boltzmann schemes // Intern. J. Numerical Methods in Fluids. — 2006. — Vol. 51, № 4. — P. 439–468. — DOI: 10.1002/fld.1140.
10. **Filippova O., Hänel D.** Grid refinement for lattice-BGK models // J. Comput. Phys. — 1998. — Vol. 147, iss. 1. — P. 219–228.
11. **Filippova O., Hänel D.** A novel lattice BGK approach for low Mach number combustion // J. Comput. Phys. — 2000. — Vol. 158, iss. 2. — P. 139–160.
12. **Chen H., Filippova O., Hoch J. et al.** Grid refinement in lattice Boltzmann methods based on volumetric formulation // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2006. — Vol. 362, № 1. — P. 158–167. — DOI: 10.1016/j.physa.2005.09.036.

13. **Ye Zhao, Feng Qiu, Zhe Fan, Kaufman A.** Flow simulation with locally-refined LBM // Proc. of the 2007 symposium on Interactive 3D graphics and games. — 2007. — P. 181–188. — <https://doi.org/10.1145/1230100.1230132>.
14. **Dupuis A., Chopard B.** Theory and applications of an alternative lattice Boltzmann grid refinement algorithm // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 67. — Article № 066707. — DOI: 10.1103/PhysRevE.67.066707.
15. **Geier M., Greiner A., Korvink J.G.** Bubble functions for the lattice Boltzmann method and their application to grid refinement // The European Physical J. Special Topics. — 2009. — Vol. 171, № 1. — P. 173–179. — DOI: 10.1140/epjst/e2009-01026-6.
16. **Dorschner B., Bösch F., Karlin I.V.** Particles on demand for kinetic theory // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 121. — Article № 130602. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.130602.
17. **Zipunova E., Perepelkina A., Zakirov A., Khilkov S.** Regularization and the Particles-on-Demand method for the solution of the discrete Boltzmann equation // J. Comput. Science. — 2021. — Vol. 53, № 4. — Article № 101376. — DOI: 10.1016/j.jocs.2021.101376.
18. **Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.** A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 94, № 3. — P. 511–525. — DOI: 10.1103/PHYSREV.94.511.
19. **Куперштох А.Л.** Учёт действия объёмных сил в решёточных уравнениях Больцмана // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика и информатика. — 2004. — Т. 4. — С. 75–96.
20. **Закиров А.В., Корнеев Б.А., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю.** К вопросу о консервативности метода PonD решения дискретного уравнения Больцмана. — 2019. — (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН; 35).
21. **Зипунова Е.В., Перепёлкина А.Ю.** Разработка явных и консервативных схем для решёточных уравнений Больцмана с адаптивным переносом. — 2022. — (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН; 7).
22. **Ivanov A., Khilkov S.** Aiwlib library as the instrument for creating numerical modeling applications // Scientific Visualization. — 2018. — Vol. 10, № 1. — P. 110–127.
23. **Sukop M.C., Thorne D.T.** Lattice Boltzmann Modeling: An Introduction for Geoscientists and Engineers. — Springer, 2006.
24. **Lin C.L., Lai Y.G.** Lattice Boltzmann method on composite grids // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 62, № 2. — P. 2219–2225. — DOI: 10.1103/PhysRevE.62.2219.
25. **Tolke J., Krafczyk M.** Second order interpolation of the flow field in the lattice Boltzmann method // Comput. Math. Appl. — 2009. — Vol. 58, iss. 5. — P. 898–902.

Поступила в редакцию 04 ноября 2022 г.

После исправления 29 января 2023 г.

Принята к печати 10 апреля 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A. et al.** The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice. — Springer, 2016. — DOI: 10.1007/978-3-319-44649-3.
2. **Kupershtokh A.L.** Modelirovanie techenii s granicami razdela faz zhidkost'—par metodom reshetochnykh uravnenii Bol'cmana // Vestnik NGU. Seriya: Matematika, mekhanika i informatika. — 2005. — Т. 5. — С. 29–42.
3. **Kupershtokh A.L.** Trekhmernoe modelirovanie dvukhfaznykh sistem tipa zhidkost'—par metodom reshetochnykh uravnenii Bol'cmana na GPU // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 130–138.

4. **Yu Chen, Qijun Kang, Qingdong Cai, Dongxiao Zhang** Lattice Boltzmann method on quadtree grids // *Phys. Rev. E.* — 2011. — Vol. 83, № 2. — Article № 026707. — DOI: 10.1103/PhysRevE.83.026707.
5. **Guzik S., Xinfeng Gao, Weisgraber T., Alder B., Colella P.** An Adaptive Mesh Refinement Strategy with Conservative Space–Time Coupling for the Lattice-Boltzmann Method // *Proc. 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition.* — American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013. — DOI: 10.2514/6.2013-866.
6. **Touil H., Ricot D., Lévêque E.** Direct and large-eddy simulation of turbulent flows on composite multi-resolution grids by the lattice Boltzmann method // *J. Comput. Phys.* — 2014. — Vol. 256. — P. 220–233. — <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.07.037>.
7. **Dorschner B., Frapolli N., Chikatamarla S.S., Karlin I.V.** Grid refinement for entropic lattice Boltzmann models // *Phys. Rev. E.* — 2016. — Vol. 94. — Article № 053311. — DOI: 10.1103/PhysRevE.94.053311.
8. **Fakhari A., Geier M., Lee Taehun** A mass-conserving lattice Boltzmann method with dynamic grid refinement for immiscible two-phase flows // *J. Comput. Phys.* — 2016. — Vol. 315. — P. 434–457. — DOI: 10.1016/j.jcp.2016.03.058.
9. **Rohde M., Kandhai D., Derksen J.J., Van den Akker H.** A generic, mass conservative local grid refinement technique for lattice-Boltzmann schemes // *Intern. J. Numerical Methods in Fluids.* — 2006. — Vol. 51, № 4. — P. 439–468. — DOI: 10.1002/fld.1140.
10. **Filippova O., H  nel D.** Grid refinement for lattice-BGK models // *J. Comput. Phys.* — 1998. — Vol. 147, iss. 1. — P. 219–228.
11. **Filippova O., H  nel D.** A novel lattice BGK approach for low Mach number combustion // *J. Comput. Phys.* — 2000. — Vol. 158, iss. 2. — P. 139–160.
12. **Chen H., Filippova O., Hoch J. et al.** Grid refinement in lattice Boltzmann methods based on volumetric formulation // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2006. — Vol. 362, № 1. — P. 158–167. — DOI: 10.1016/j.physa.2005.09.036.
13. **Ye Zhao, Feng Qiu, Zhe Fan, Kaufman A.** Flow simulation with locally-refined LBM // *Proc. of the 2007 symposium on Interactive 3D graphics and games.* — 2007. — P. 181–188. — <https://doi.org/10.1145/1230100.1230132>.
14. **Dupuis A., Chopard B.** Theory and applications of an alternative lattice Boltzmann grid refinement algorithm // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 67. — Article № 066707. — DOI: 10.1103/PhysRevE.67.066707.
15. **Geier M., Greiner A., Korvink J.G.** Bubble functions for the lattice Boltzmann method and their application to grid refinement // *The European Physical J. Special Topics.* — 2009. — Vol. 171, № 1. — P. 173–179. — DOI: 10.1140/epjst/e2009-01026-6.
16. **Dorschner B., B  sch F., Karlin I.V.** Particles on demand for kinetic theory // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Vol. 121. — Article № 130602. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.130602.
17. **Zipunova E., Perepelkina A., Zakirov A., Khilkov S.** Regularization and the Particles-on-Demand method for the solution of the discrete Boltzmann equation // *J. Comput. Science.* — 2021. — Vol. 53, № 4. — Article № 101376. — DOI: 10.1016/j.jocs.2021.101376.
18. **Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.** A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // *Phys. Rev.* — 1954. — Vol. 94, № 3. — P. 511–525. — DOI: 10.1103/PHYSREV.94.511.
19. **Kupershtokh A.L.** Uchet deistviya obemnykh sil v reshetochnykh uravneniyakh Bol’cmana // *Vestnik NGU. Seriya: Matematika, mekhanika i informatika.* — 2004. — T. 4. — S. 75–96.
20. **Zakirov A.V., Korneev B.A., Levchenko V.D., Perepelkina A.Yu.** K voprosu o konservativnosti metoda PonD resheniya diskretnogo uravneniya Bol’cmana. — 2019. — (Preprint / IPM im. M.V. Keldysya RAN; 35).

21. **Zipunova E.V., Perepelkina A.Yu.** Razrabotka yavnykh i konservativnykh skhem dlya reshetochnykh uravnenii Bol'cmana s adaptivnym perenosom. — 2022. — (Preprint / IPM im. M.V. Keldysha RAN; 7).
22. **Ivanov A., Khilkov S.** Aiwlib library as the instrument for creating numerical modeling applications // Scientific Visualization. — 2018. — Vol. 10, № 1. — P. 110–127.
23. **Sukop M.C., Thorne D.T.** Lattice Boltzmann Modeling: An Introduction for Geoscientists and Engineers. — Springer, 2006.
24. **Lin C.L., Lai Y.G.** Lattice Boltzmann method on composite grids // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 62, № 2. — P. 2219–2225. — DOI: 10.1103/PhysRevE.62.2219.
25. **Tolke J., Krafczyk M.** Second order interpolation of the flow field in the lattice Boltzmann method // Comput. Math. Appl. — 2009. — Vol. 58, iss. 5. — P. 898–902.