

УДК 532.5

БЕЗВОЛНОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРЕПЯТСТВИЯ В ФОРМЕ НАКЛОННОЙ СТУПЕНИ

Е. Р. Газизов, Д. В. Маклаков

Научно-исследовательский институт математики и механики
Казанского государственного университета, 420008 Казань

Исследуются безволновые режимы обтекания весомой жидкостью наклонной ступени высоты H . Рассмотрены случаи $H > 0$ и $H < 0$. При этом всегда предполагалось, что поток является сверхкритическим справа на бесконечности, чем обеспечивается возможность существования решения с отсутствием волны вниз по потоку. Для случая докритического обтекания определялась зависимость между числом Фруда и возвышением ступени, которая обеспечивает безволновой режим. На основе анализа численных данных получена приближенная аналитическая зависимость между высотой ступени и числом Фруда. Показано, что эта зависимость практически одна и та же для ступеней любых наклонов. В случае сверхкритического обтекания установлено, что задача имеет двухпараметрическое семейство решений. В случае $H < 0$ получены приближенные аналитические формулы для определения формы свободной поверхности.

Ключевые слова: тяжелая жидкость, обтекание ступени, докритический и сверхкритические режимы.

Введение. Общая постановка задачи о течении слоя весомой жидкости над неровным дном заключается в следующем: над неровным дном заданной формы движется идеальная несжимаемая жидкость. Движение предполагается установившимся и безвихревым. Слева на бесконечности дно асимптотически горизонтальное и заданы ширина слоя h и скорость невозмущенного потока V_0 . Форма свободной поверхности над дном заранее неизвестна и должна определиться в ходе решения. Справа на бесконечности граничные условия зависят от особенностей задачи. Например, если дно асимптотически горизонтальное вниз по потоку, то предполагают, что скорость ограничена справа на бесконечности. Основным параметром, характеризующим подобные течения, является число Фруда $Fr = V_0/\sqrt{gh}$, где g — ускорение силы тяжести. Скорость $V_* = \sqrt{gh}$ называется критической. Если $Fr < 1$, то течение является докритическим, если $Fr > 1$ — сверхкритическим.

Раздел гидромеханики, посвященный исследованию обтекания препятствий при наличии свободной поверхности, в настоящее время интенсивно развивается. Библиографию работ в этом направлении можно найти в обзорах [1–3] и монографиях [4–6].

Для любых течений над ступенью, у которых свободная поверхность асимптотически горизонтальная слева и справа на бесконечности, справедливы формулы [7]

$$Fr^2 + 2 = Fr^2/(L - H/h)^2 + 2L; \quad (1)$$

$$Fr(\infty) = Fr/(L - H/h)^{3/2}. \quad (2)$$

Здесь $L = y(\infty)/h$, $y(\infty)$ — ордината свободной поверхности справа на бесконечности; $Fr(\infty)$ — число Фруда справа на бесконечности; H — высота ступени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00836).

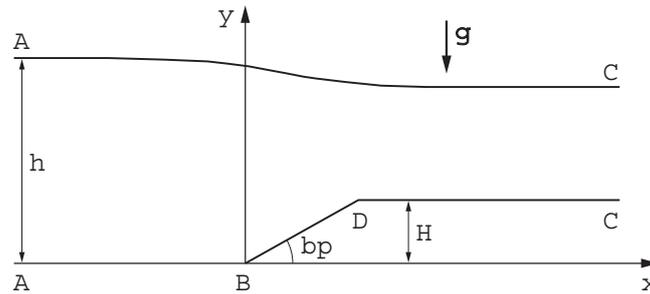


Рис. 1. Физическая область течения

При $H > 0$ задача об обтекании ступени может трактоваться как задача о водосливе с широким порогом. Если Q — расход жидкости через водослив, то $Fr = Q/\sqrt{gh^3}$. Таким образом, при фиксированных g и h число Фруда прямо пропорционально расходу жидкости. В гидравлике для определения расхода через водослив используют так называемый принцип максимума расхода (ПМР), согласно которому на пороге водослива с течением времени сам собой устанавливается безволновой режим обтекания с максимальным расходом (см. [8]). Используем ПМР для приближенного определения связи между Fr и H/h . При этом считаем, что уравнение (1) в неявном виде задает зависимость $Fr = Fr(L)$ при фиксированных значениях H/h . Продифференцировав (1) по L , найдем

$$2FrFr'_L = \frac{2FrFr'_L(L - H/h) - 2(L - H/h)Fr^2}{(L - H/h)^4} + 2.$$

Подставив в эту формулу $Fr'_L = 0$, получим

$$Fr^2/(L - H/h)^3 = Fr^2(\infty) = 1. \quad (3)$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$L = H/h + Fr^{2/3}, \quad (4)$$

а искомая связь между Fr и H/h следует из (1):

$$H/h = 1 + Fr^2/2 - 3Fr^{2/3}/2. \quad (5)$$

Соотношение (5) является приближенным, и одна из целей данной работы состоит в получении уточненной зависимости между Fr и H/h .

Постановка задачи и сведение ее к нелинейной краевой задаче для аналитической функции. Рассматривается стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой весомой жидкости над неровным полигональным дном в форме наклонной ступени (рис. 1). Вводится декартова система координат xy , причем ее начало лежит в основании ступени. Задаются: h — глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности; V_0 — скорость набегающего потока; $\beta\pi$ — угол наклона ступени к оси x ; g — ускорение силы тяжести. Сила тяжести действует в направлении, противоположном направлению оси y .

Отобразим область течения в физической плоскости $z = x + iy$ на полосу $D_t = \{0 < \eta < \pi/2\}$ в плоскости комплексного переменного $t = \xi + i\eta$ так, чтобы бесконечно удаленные точки физической плоскости перешли в бесконечно удаленные точки полосы, а угловые точки дна B и D — соответственно в точки $t = 0$ и $t = d$.

Введем аналитическую функцию

$$\chi(t) = \ln \left(\frac{\pi}{2h} \frac{dz}{dt} \right) = r + i\Theta,$$

где Θ — угол, образуемый вектором скорости с осью x . Если найдена функция $\chi(t)$, то искомое конформное отображение $z(t)$ определяется интегралом

$$z(t) = \frac{2h}{\pi} \int_0^t \exp(\chi(t)) dt. \quad (6)$$

Области течения в плоскости комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ соответствует полоса $D_t = \{0 < \psi < V_0 h\}$. Связь между областью комплексного потенциала и областью t определяется выражением

$$W = 2hV_0 t / \pi.$$

Ведём обозначения

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \chi(t) = r^0(\xi), \quad \operatorname{Im} \chi(t) = \Theta^0(\xi), \quad t = \xi, \quad -\infty < \xi < \infty, \\ \operatorname{Re} \chi(t) = r^1(\xi), \quad \operatorname{Im} \chi(t) = \Theta^1(\xi), \quad t = \xi + i\pi/2, \quad -\infty < \xi < \infty \end{aligned}$$

и поставим краевую задачу для аналитической в области D_t функции $\chi(t)$. Из (6) следует, что на верхней границе полосы D_t справедливо равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2h}{\pi} \exp(r^1)(\cos \Theta^1 + i \sin \Theta^1).$$

Так как $y'_\xi = \operatorname{Im} dz/dt$, имеем

$$y'_\xi = (2h/\pi) \exp(r^1) \sin \Theta^1. \quad (7)$$

Для комплексно-сопряженной скорости dW/dz справедлива формула

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dt} \frac{dt}{dz} = V_0 \exp(-\chi(t)). \quad (8)$$

Пусть V — скорость на свободной поверхности. Тогда из (8) вытекает, что

$$V = V_0 \exp(-r^1). \quad (9)$$

На свободной поверхности должно выполняться уравнение Бернулли

$$V^2 + 2gy = \operatorname{const}.$$

Продифференцировав данное соотношение по ξ , получим

$$VV'_\xi + gy'_\xi = 0.$$

Подставив в последнюю формулу ранее полученные выражения для y'_ξ и V , найдем, что на свободной поверхности при $\eta = \pi/2$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{dr^1}{d\xi} = \frac{2}{\pi \operatorname{Fr}^2} \exp(3r^1) \sin \Theta^1. \quad (10)$$

На дне при $\eta = 0$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\Theta^0 = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \quad \xi \geq d, \\ \beta\pi, & 0 < \xi < d. \end{cases} \quad (11)$$

На бесконечности слева имеем $V \rightarrow V_0$, поэтому в силу (8)

$$\chi(-\infty) = 0. \quad (12)$$

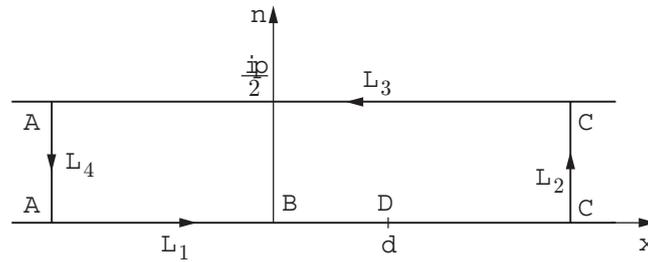


Рис. 2. Параметрическая область

На бесконечности справа скорость V ограничена, поэтому

$$|\chi(\infty)| < \infty. \quad (13)$$

Так как в выражениях (11) присутствует неизвестный параметр d , определяющий в параметрической плоскости положение точки D , то для замыкания задачи необходимо вывести дополнительное условие. При выводе этого условия существенным является режим обтекания ступени.

Докритическое обтекание. Будем исследовать безволновые режимы обтекания, при которых докритическое течение переходит в сверхкритическое. Так как справа на бесконечности $Fr > 1$, то там волны должны отсутствовать. Но слева на бесконечности $Fr < 1$, и там могут возникнуть волны. Следовательно, необходимо вывести условие отсутствия волн слева на бесконечности.

Предположим, что функция $\chi(t)$ ведет себя слева на бесконечности следующим образом:

$$\chi(t) \sim A \exp(kt) \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty. \quad (14)$$

Здесь $A = \text{const}$, $k > 0$. Линеаризовав краевое условие (10), получим

$$\frac{dr^1}{d\xi} - \frac{2}{\pi Fr^2} \Theta^1 = 0. \quad (15)$$

Из соотношения (14) найдем, что

$$r^1 = A \exp(k\xi) \cos(\pi k/2), \quad \Theta^1 = A \exp(k\xi) \sin(\pi k/2).$$

Подставив полученные выражения для r^1 и Θ^1 в (15), найдем соотношение, связывающее показатель экспоненты k и число Фруда:

$$Fr^2 \pi k/2 = \text{tg}(\pi k/2). \quad (16)$$

Из анализа функций $U = \text{tg}(\pi k/2)$ и $U = Fr^2 \pi k/2$ следует, что при $Fr > 1$ первый положительный корень уравнения (16) лежит на отрезке $(0, 1)$, а при $Fr \leq 1$ — на отрезке $(2, 3)$. Таким образом, для докритического обтекания показатель экспоненты $k > 1$, а для сверхкритического $k < 1$. Физически это означает, что для докритического обтекания свободная поверхность слева на бесконечности выходит на горизонтальную асимптоту быстрее, чем в случае сверхкритического течения.

Рассмотрим функцию $\Phi(t) = \chi(t) \exp(-t)$. Пусть $Fr < 1$, тогда $k > 1$ и возможно интегрирование функции $\Phi(t)$ по границе полосы D_t . При этом бесконечно удаленные точки обходятся по вертикальным отрезкам прямых L_2 и L_4 (рис. 2).

Согласно теореме Коши

$$\text{Im} \left[\int_{L_1} \Phi(t) dt + \int_{L_2} \Phi(t) dt + \int_{L_3} \Phi(t) dt + \int_{L_4} \Phi(t) dt \right] = 0. \quad (17)$$

Так как при $t \rightarrow +\infty$ имеем $|\chi(\infty)| < \infty$ и $\exp(-t) \rightarrow 0$, то выполняется равенство

$$\int_{L_2} \chi(t) \exp(-t) dt = 0.$$

Слева на бесконечности $\chi(t) \simeq A \exp(kt)$, где $k > 1$, следовательно, $\chi(t) \exp(-t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Это означает, что

$$\int_{L_4} \chi(t) \exp(-t) dt = 0.$$

Интегрируем вдоль отрезка L_1 :

$$\operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi)(r^0 + i\Theta^0) d\xi \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta^0 \exp(-\xi) d\xi = \int_0^d \beta\pi \exp(-\xi) d\xi = \beta\pi(1 - \exp(-d)).$$

Интегрируем вдоль отрезка L_3 :

$$\operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(\xi + i\pi/2))(r^1 + i\Theta^1) d\xi \right] = - \int_{-\infty}^{+\infty} r^1 \exp(-\xi) d\xi.$$

К полученному интегралу применяем формулу интегрирования по частям:

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} r^1 \exp(-\xi) d\xi = r^1 \exp(-\xi) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi) \frac{dr^1}{d\xi} d\xi = - \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi) \frac{dr}{d\xi} d\xi.$$

Подставив найденные интегралы в (17), получим замыкающее задачу условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr^1}{d\xi} \exp(-\xi) d\xi = \beta\pi(\exp(-d) - 1). \quad (18)$$

Условия (10)–(13) и (18) определяют краевую задачу отыскания аналитической в области D_t функции $\chi(t)$ и параметра d , где d — высота ступени в плоскости t . Таким образом, в случае докритического обтекания высота ступени не задается, а определяется из требования отсутствия волн слева на бесконечности.

Сверхкритическое обтекание. Теперь рассмотрим сверхкритическое обтекание ступени. При этом считаем, что сверхкритическое течение слева переходит в сверхкритическое справа. Обозначим $q = L - H/h$ и перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\operatorname{Fr}^2 + 2 - \operatorname{Fr}^2/q^2 - 2q - 2H/h = 0.$$

Преобразуем его в кубическое уравнение относительно q

$$q^3 - q^2(\operatorname{Fr}^2/2 + 1 - H/h) + \operatorname{Fr}^2/2 = 0. \quad (19)$$

Из физических соображений очевидно, что $q > 0$, и, следовательно, интерес представляют лишь положительные корни уравнения (19). Пусть

$$q_* = (2/3)(\operatorname{Fr}^2/2 + 1 - H/h).$$

Из уравнения Бернулли следует, что возвышение свободной поверхности над горизонтальным уровнем дна не может быть больше чем $(\operatorname{Fr}^2/2 + 1)h$. Поэтому $q_* > 0$. Введем функцию

$$P(q) = q^3 - q^2(\operatorname{Fr}^2/2 + 1 - H/h) + \operatorname{Fr}^2/2.$$

При $q \geq 0$ эта функция достигает минимального значения в точке $q = q_*$:

$$P_{\min} = \text{Fr}^2/2 - (4/27)(\text{Fr}^2/2 + 1 - H/h)^3.$$

Уравнение $P(q) = 0$ либо имеет два положительных корня, когда $P_{\min} < 0$, либо имеет кратный корень $q = q_{\min}$, когда $P_{\min} = 0$, либо вообще не имеет корней, когда $P_{\min} > 0$. Следовательно, для разрешимости рассматриваемой задачи необходимо, чтобы $P_{\min} \leq 0$. Последнее условие можно записать в виде

$$\text{Fr}^2/q_*^3 \leq 1 \quad (20)$$

или

$$H/h \leq \text{Fr}^2/2 + 1 - 3\text{Fr}^{2/3}/2. \quad (21)$$

Таким образом, число Фруда (Fr) и высоту ступени (H/h) нельзя задавать произвольно, а необходимо задавать так, чтобы выполнялось неравенство (21). Отметим, что случай равенства в (21) точно соответствует числу Фруда, определяемому с помощью ПМР (см. [6]).

Пусть условие (20) выполнено. Обозначим через q_1 и q_2 положительные корни уравнения (19). Тогда $q_1 < q_* < q_2$ и, следовательно,

$$\frac{\text{Fr}^2}{q_2^3} < \frac{\text{Fr}^2}{q_*^3} < \frac{\text{Fr}^2}{q_1^3}.$$

Отсюда и из неравенства (20) вытекает, что $\text{Fr}^2/q_2^3 < 1$. Но согласно формуле (2)

$$\text{Fr}^2/q^3 = \text{Fr}^2(\infty).$$

Таким образом, если $q = q_2$, то всегда $\text{Fr}(\infty) < 1$. Следовательно, большему по величине корню уравнения (19) всегда соответствует докритическое течение справа на бесконечности. Но так как рассматриваются течения, для которых $\text{Fr}(\infty) > 1$, то при решении уравнения (19) необходимо выбирать меньший по величине корень.

Решив уравнение (19), найдем q и $y(\infty) = qh + H$ и, воспользовавшись тем, что $V_\infty = V_0 \exp(-r^1(\infty))$, запишем уравнение Бернулли в бесконечно удаленных точках свободной поверхности

$$V_0^2 + 2gh = V_0^2 \exp(-2r^1(\infty)) + 2gy(\infty).$$

Отсюда

$$r^1(\infty) = -(1/2) \ln [1 - (q + H/h - 1)/\text{Fr}^2]. \quad (22)$$

Теперь для определения функции $\chi(t)$ и параметра d имеем условия (10)–(13) и (22).

Таким образом, в случае перехода сверхкритического течения слева в сверхкритическое справа можно задавать H — высоту ступени в физической плоскости.

Отметим здесь разницу между замыкающими условиями (18) и (22). Оба они служат для определения математического параметра d и выведены в предположении, что режим обтекания безволновой. Однако в первом, докритическом случае при фиксированном числе Фруда из уравнения (18) находится d , а затем соответствующее этому d значение параметра H/h . Во втором, сверхкритическом случае найденное значение d обеспечивает заданное заранее значение H/h .

Сведение задачи к решению системы нелинейных интегральных уравнений. Введем функцию $\lambda(\xi) = dr^1/d\xi$ и предположим, что эта функция известна. Отсюда следует, что

$$r^1(s) = \int_{-\infty}^s \lambda(\xi) d\xi = C[\lambda](s), \quad (23)$$

где $C[\lambda]$ — линейный интегральный оператор.

Соотношения (11) и (23) представляют собой условия смешанной краевой задачи для аналитической в полосе D_t функции $\chi(t)$: на верхней границе полосы задана действительная часть $\chi(t)$, на нижней — мнимая. Решение такой задачи дается формулой (см., например, [9])

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^1(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}(\xi - t)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta^0(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - t)} \right].$$

С учетом краевых условий (11) для $\Theta^0(\xi)$ можно записать:

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^1(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}(\xi - t)} + \alpha \left(\ln \frac{1 - \exp(t - d)}{1 + \exp(t - d)} - \ln \frac{1 - \exp(t)}{1 + \exp(t)} \right). \quad (24)$$

Из формулы (24) легко получить связь между действительной $r^1(\xi)$ и мнимой $\Theta^1(\xi)$ частями функции $\chi(t)$ на верхней границе полосы D_t

$$\Theta^1(\xi) = B[r^1](\xi) + \lambda_2(\xi), \quad (25)$$

где

$$\lambda_2(\xi) = 2\beta(\operatorname{arctg}(\exp(d - \xi)) - \operatorname{arctg}(\exp(-\xi))),$$

а $B[r^1]$ — линейный сингулярный оператор

$$B[r^1](s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^1(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - s)}. \quad (26)$$

Интеграл в (26) понимается в смысле главного значения.

Введем суперпозицию операторов B и C : $D[\lambda] = BC[\lambda]$ и перепишем краевое условие (10) в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\lambda(\xi) = (2/(\pi \operatorname{Fr}^2)) \exp(3C[\lambda]) \sin(D[\lambda] + \lambda_2(\xi)). \quad (27)$$

Соотношения (18) и (22) через функцию $\lambda(\xi)$ выражаются так:

$$E[\lambda(\xi) \exp(-\xi)] = \beta\pi(\exp(-d) - 1); \quad (28)$$

$$E[\lambda] = -(1/2) \ln[1 - (q + H/h - 1)/\operatorname{Fr}^2], \quad (29)$$

где $E[\lambda]$ — линейный функционал вида

$$E[\lambda] = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\xi) d\xi. \quad (30)$$

В соотношениях (27)–(29) необходимо определить функцию λ и параметр d . В случае докритического обтекания решается система (27), (28), в случае сверхкритического обтекания — система (27), (29).

Системы уравнений (27), (28) и (27), (29) нелинейные и решаются численно методом Ньютона. Способ дискретизации систем этого типа описан в работах [10, 11].

Результаты расчетов. *Докритическое обтекание.* Безволновой режим обтекания в случае, когда докритическое течение слева переходит в сверхкритическое справа, возможен лишь при определенном соотношении между высотой ступени и числом Фруда. Если

воспользоваться гидравлическим принципом максимума расхода, то это соотношение задается формулой (4), причем согласно ПМР функция $H/h(\text{Fr})$ не зависит от угла наклона ступени.

В работе [6] проведены расчеты для вертикальной ступени при произвольно заданных значениях $0 < \text{Fr} < 1$ и H/h и установлено, что в этом случае справа на бесконечности появляется бесконечный цуг периодических волн. Если зафиксировать значения $H/h > 0$ и увеличивать число Фруда, то длина волн растет. При определенном значении Fr длина волн становится бесконечной, а цуг волн за ступенью вырождается в цуг “уединенных волн”. При этом гребень первой волны за ступенью уходит на бесконечность и режим обтекания становится безволновым. Таким образом, согласно расчетам, приведенным в [6], ПМР является строго верным в том смысле, что безволновым режимам обтекания соответствуют максимальный расход (число Фруда). Однако следует отметить, что при такой трактовке ПМР максимальный расход реализуется среди течений, обладающих волнами справа на бесконечности, а при гидравлической трактовке ПМР максимальный расход реализуется среди фиктивных безволновых течений, подчиняющихся уравнению (1).

При $H/h < 0$ (когда ступень понижает уровень дна) и $0 < \text{Fr} < 1$ безволновые режимы обтекания в [6] обнаружены не были. Факт отсутствия безволновых режимов при $H/h < 0$ подтверждается и с помощью ПМР, так как из (4) следует, что если $0 < \text{Fr} < 1$, то $0 < H/h < 1$.

Целью выполненных в настоящей работе расчетов было:

- количественно проверить ПМР для углов наклона $0 < \beta \leq 1/2$;
- выяснить, действительно ли соотношение между Fr и H/h , определяющее безволновой режим обтекания, не зависит от угла наклона ступени;
- по возможности уточнить приближенную аналитическую связь между Fr и H/h , даваемую формулой (4);
- найти формы свободных границ.

На рис. 3 показаны графики зависимости H/h от Fr для различных углов наклона ступени. Здесь же представлена зависимость (4). Как видно, все кривые практически сливаются между собой. Таким образом, исходя из рис. 3 можно сделать вывод, что ПМР является приближенно верным. Количественные расхождения между вычисленными значениями и значениями, полученными по ПМР, наглядно видны на рис. 4, где показаны зависимости высоты свободной поверхности L справа на бесконечности от высоты ступени H/h при различных углах наклона ступени β . Видно, что ПМР дает завышенное

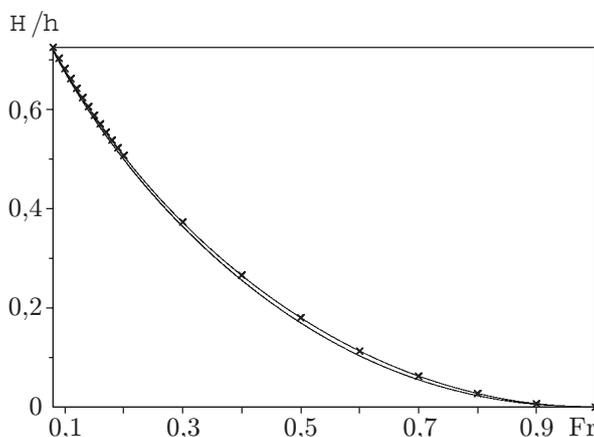


Рис. 3. Зависимости H/h от Fr при $\beta = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$. Данные, полученные по ПМР, отмечены крестиками

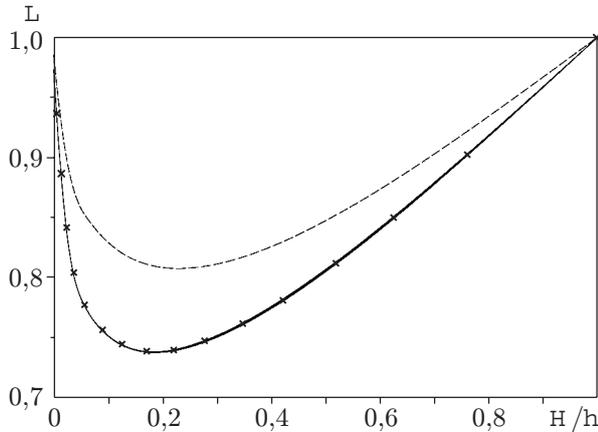


Рис. 4

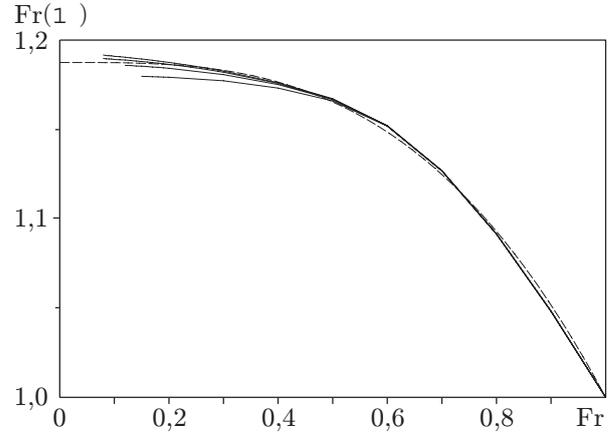


Рис. 5

Рис. 4. Зависимости L от H/h при $\beta = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$:

штриховая линия — расчет по ПМР, параметрическая зависимость отмечена крестиками

Рис. 5. Зависимости $Fr(\infty)$ от Fr для различных углов наклона ступени

значение L , причем максимальное расхождение наблюдается при $H/h \approx 0,15$. Однако для всех β зависимости L от H/h оказываются очень близкими. Это обстоятельство наводит на мысль, что ПМР может быть уточнен. В самом деле, согласно ПМР поток справа на бесконечности всегда оказывается критическим, т. е. $Fr(\infty) = 1$. Однако результаты проведенных расчетов показывают, что это не так. Число $Fr(\infty)$ всегда больше единицы, и, когда Fr стремится к нулю, значение $Fr(\infty)$ приближается к некоторому предельному значению, которое мало зависит от угла наклона ступени, изменяясь от $Fr(\infty) = 1,1794$ при $\beta = 0,2$ до $Fr(\infty) = 1,1913$ при $\beta = 0,5$. На рис. 5 показаны зависимости $Fr(\infty)$ от Fr для различных углов наклона ступени β .

Как видно из рис. 5, построенные функции слабо зависят от угла наклона ступени β . Пусть

$$Fr(\infty) = f(Fr) = a_1(1 - Fr)Fr^2 + a_2(1 - Fr^2) + 1,$$

где функция $f(Fr)$ обладает свойствами $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ при любых a_1, a_2 . С использованием метода наименьших квадратов были найдены значения $a_1 = 0,1982$, $a_2 = 0,1871$. Функция $f(Fr)$ для этих значений показана на рис. 5 штриховой линией. Видно, что найденная функция хорошо аппроксимирует вычисленные точки. Таким образом, для любых наклонов ступени в диапазоне $0,2 < \beta \leq 0,5$ мы получили приближенную аналитическую зависимость между Fr и $Fr(\infty)$.

Из формул (1), (2) найдем, что

$$H/h = 1 + [Fr^2 - Fr^{2/3}(Fr^2(\infty) + 2)/Fr^{2/3}(\infty)]/2,$$

$$L = [Fr^2 + 2 - Fr^{2/3}Fr^{4/3}(\infty)]/2.$$

Параметрическая зависимость между H/h и L , отмеченная на рис. 4 крестиками, дает значительно более точный результат, чем ПМР.

Формы свободной поверхности для различных значений угла наклона ступени при $Fr = 0,5$ представлены на рис. 6.

Сверхкритическое обтекание. В случае, когда сверхкритическое течение слева переходит в сверхкритическое справа, высота ступени в физической плоскости (H) задается

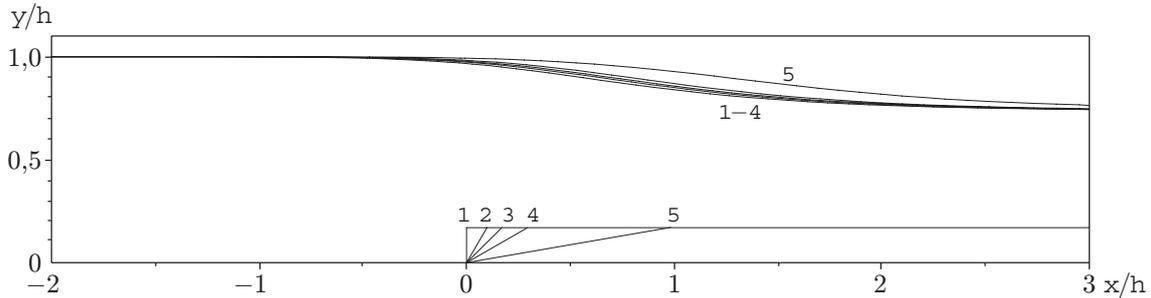


Рис. 6. Формы свободной поверхности в случае докритического течения ($Fr = 0,5$) при $\beta = 1/2$ (1), $1/3$ (2), $1/4$ (3), $1/6$ (4) и $1/18$ (5)

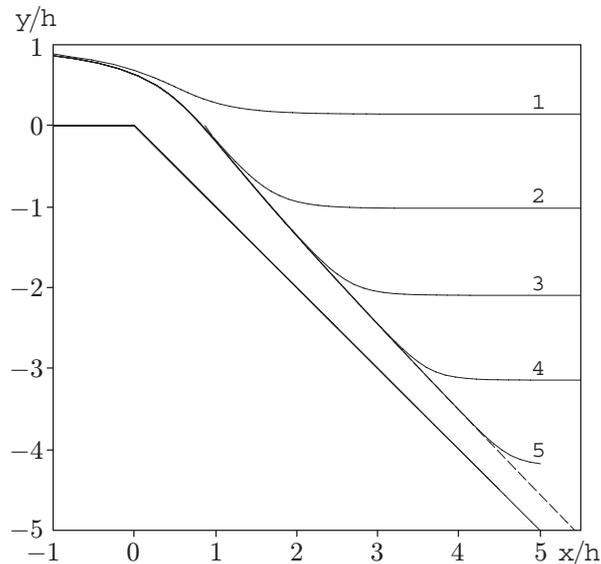


Рис. 7. Формы свободной поверхности в случае сверхкритического течения ($Fr = 1,1$) при $\beta = -1/4$ для $H/h = -0,5$ (1), $-1,5$ (2), $-2,5$ (3), $-3,5$ (4), $-4,5$ (5)

заранее. Расчеты сверхкритического обтекания вертикальной ступени, повышающей уровень дна, проведены в [7]. Численные решения были найдены для любых $H/h > 0$, удовлетворяющих неравенству (1). Видимо, неравенство (1) является необходимым и достаточным условием существования решения, для которого сверхкритическое течение слева переходит в сверхкритическое справа. Вычисления, проведенные в данной работе, подтверждают этот вывод и для наклонной ступени. При этом $0 < H/h < 0,6188$. Отметим, что при

$$H/h = (2 + Fr^2 - 3Fr^3)/2$$

поток становится критическим справа ($Fr(\infty) = 1$), что и препятствует дальнейшему увеличению высоты ступени. Случай $H/h < 0$ ($\beta < 0$) в работе [7] рассмотрен не был. Наши вычисления показали, что решение задачи может быть найдено для любых $H/h < 0$.

Свободные границы при больших значениях H/h (течение типа водопада) продемонстрированы на рис. 7. В этом случае участок свободной границы вдоль ступени становится протяженным и можно получить приближенную формулу для определения формы свободной поверхности. В самом деле, из уравнения Бернулли найдем, что скорость на свободной поверхности в произвольной точке $B(x, y)$ вычисляется по формуле

$$V(y) = V_0 h/H(y),$$

где $H(y)$ — ширина слоя. Легко вывести, что

$$x = y \sin \beta\pi + H(y) / \sin \beta\pi.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{h} \sin \beta\pi + \frac{\text{Fr}}{\sin \beta\pi \sqrt{\text{Fr}^2 + 2(1 - y/h)}}.$$

Результаты расчетов по этой приближенной формуле показаны на рис. 7 штриховой линией. Как видно из рисунка, эта линия хорошо аппроксимирует форму свободной поверхности, если высота ступени является достаточно большой.

Известно, что для сверхкритического обтекания выступа на горизонтальном дне задача в некотором диапазоне чисел Фруда может иметь два решения [12, 13] и большее число решений [14]. Одно из них ответвляется от решения для равномерного потока, остальные — от уединенной волны. Наличие трех и большего числа решений, видимо, связано с осциллирующим характером поведения параметров крутых волн, который был впервые обнаружен в работах [15, 16] на основе асимптотического анализа. В точной нелинейной постановке почти предельные гравитационные волны изучались в [11]. Из результатов [11] следует, например, что всегда можно указать диапазон чисел Фруда, в котором задача об уединенной волне будет иметь любое наперед заданное количество решений. Возникает вопрос, будет ли подобная неединственность иметь место в задаче об обтекании ступени. Для ответа на него был проведен следующий численный эксперимент. В уравнении (27) полагалось, что $d = 0$, и находилась функция $\lambda(\xi)$, соответствующая уединенной волне. Затем задавался малый параметр d , полученная для случая $d = 0$ функция $\lambda(\xi)$ выбиралась за нулевое приближение и к уравнению (27) применялся метод Ньютона. Итерационный процесс расходился при любом сколь угодно малом d . Таким образом, авторы пришли к выводу, что в задаче об обтекании ступени безволнового решения, ответвляющегося от решения для уединенной волны, не существует. Видимо, это связано с разными уровнями дна слева и справа на бесконечности для ступени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Селезов И. Т. Распространение и трансформация поверхностных гравитационных волн в жидкости конечной глубины // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1990. Т. 24. С. 3–76.
2. Стурова И. В. Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн. Красноярск, 1990. (Препр. / СО АН СССР. Вычисл. центр; № 5).
3. Yeung R. W. Numerical methods in free-surface flows // Ann. Rev. Fluid. Mech. 1982. V. 14. P. 395–442.
4. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
6. Маклаков Д. В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. М.: Изд-во “Янус-К”, 1997.
7. King A. C., Bloor M. I. G. Free-surface flow over a step // J. Fluid Mech. 1987. V. 182. P. 193–208.
8. Чугаев Р. Р. Гидравлика. Л.: Энергоиздат, 1982.
9. Киселев О. М., Котляр Л. М. Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978.

10. **Махлаков Д. В.** A note on the optimum profile of a sprayless planing surface // J. Fluid Mech. 1999. V. 284. P. 281–292.
11. **Махлаков Д. В.** Almost-highest gravity waves on water of finite depth // Europ. J. Appl. Math. 2003. V. 13. P. 67–93.
12. **Гузевский Л. Г.** Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины // Динамика сплошной среды с границами раздела. Чебоксары: Изд-во Чебоксар. гос. ун-та, 1982. С. 61–69.
13. **Dias F., Vanden-Broeck J.-M.** Open channel flow with submerged obstruction // J. Fluid Mech. 1989. V. 206. P. 155–170.
14. **Афанасьев К. Е., Стуколов С. В.** Циркуляционное обтекание профилей стационарным плоскопараллельным потоком тяжелой жидкости конечной глубины со свободной поверхностью // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 101–110.
15. **Longuet-Higgins M. S., Fox M. J. H.** Theory of the almost-highest wave: the inner solution // J. Fluid Mech. 1977. V. 80. P. 721–741.
16. **Longuet-Higgins M. S., Fox M. J. H.** Theory of the almost-highest wave. Pt 2: Matching and analytical extension // J. Fluid Mech. 1978. V. 85. P. 769–786.

*Поступила в редакцию 30/IV 2003 г.,
в окончательном варианте — 5/IX 2003 г.*
