УДК 539.3+517.97

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ

В. А. Ковтуненко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается модельная задача для уравнения Пуассона в области, содержащей трещину или набор трещин, при ее произвольном линейном возмущении. На основе вариационной формулировки задачи с помощью гладкого отображения областей получено полное асимптотическое разложение решения по параметру возмущения, представляющее собой процедуру обобщенного дифференцирования по форме. С использованием полученного глобального асимптотического разложения решения выведены представления производных произвольного порядка для функции потенциальной энергии, коэффициентов интенсивности напряжений, а также инвариантные интегралы энергии как в общем виде, так и для базисных возмущений области (сдвига, растяжения, поворота). Сформулированы задача о локальном росте ветвящейся трещины по критерию разрушения Гриффитса и линеаризованная задача оптимального расположения прямолинейной трещины в теле с функцией энергии в качестве функционала стоимости.

ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении областей с негладкими границами, в частности трещин, обычно используется теория сингулярных возмущений (см., например, [1–3]). Приемы обоснования асимптотических представлений изложены в [4]. С использованием техники отображения области, содержащей трещину, при помощи гладкой координатной трансформации задача сводится к регулярным возмущениям несмотря на негладкость границы. При этом используется вариационная постановка задачи о трещине, что позволяет применять данный подход к задаче в общей формулировке, в том числе к нелинейной задаче о трещине при условии непроникания берегов [5–7]. Данный подход обобщает методы оптимизации формы для гладких областей [8, 9] на области с негладкими границами из-за наличия трещин. Предлагаемые методы позволяют получить инвариантные интегралы энергии (интеграл Черепанова — Райса и др. [10–13]) как частный случай общего возмущения области с трещиной. Численное решение задачи о росте трещины на основе полученных формул выполнено в [14].

1. ЛИНЕЙНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ОБЛАСТИ С ТРЕЩИНОЙ

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой непрерывной границей $\partial\Omega$ и некоторой ее частью $\Gamma_{\mathcal{D}} \subseteq \partial\Omega$ с $\operatorname{meas}\Gamma_{\mathcal{D}} > 0$. Пусть внутри Ω расположена трещина, которая определяется конечным набором липшицевых непрерывных кривых Γ_0. Зададим касательный вектор $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ и нормальный вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ к Γ_0, при этом считаем, что направление $\boldsymbol{\nu}$ соответствует берегу Γ_0^+ трещины, направление $-\boldsymbol{\nu}$ — берегу Γ_0^-. Определим область с трещиной как область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_0$ с границей $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \overline{\Gamma}_0^+ \cup \overline{\Gamma}_0^-$. Будем предполагать, что Ω_0 — открытое связное множество в $\mathbb{R}^2$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00842) и Министерства образования Российской Федерации (код проекта 2000.4.19).

и кривые, составляющие Γ_0, могут быть продолжены до пересечения с частью внешней границы $\Gamma_{\mathcal{D}}$ под конечным углом, не пересекаясь друг с другом. Первое условие исключает самопересечение кривых и позволяет определять стандартные пространства Соболева на Ω_0, второе условие обеспечивает выполнение неравенства Корна в Ω_0. Данное построение моделирует следующие геометрии трещины в теле: одна трещина (возможно, содержащая углы или выходящая на границу); семейство непересекающихся трещин; ветвящаяся трещина (т. е. набор кривых, пересекающихся только в одной точке под ненулевым углом); комбинация перечисленных геометрий.

Пусть внешняя нагрузка задана гладкой функцией $f \in C^\infty([-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times \mathbb{R}^2)$. Введем пространство Соболева $\tilde{H}^1(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0),\ v = 0 \text{ п.в. } \Gamma_{\mathcal{D}}\}$, которое содержит однородное условие Дирихле на части внешней границы $\Gamma_{\mathcal{D}}$. Рассматривается следующая модельная задача для уравнения Пуассона в области с трещиной в вариационной формулировке:

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla u^0 \cdot \nabla v = \int\limits_{\Omega_0} f(0) v \qquad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega_0). \tag{1}$$

Согласно общей теории разрешимости вариационных задач и в силу неравенства Корна существует единственное решение $u^0 \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ задачи (1), которое характеризуется следующими соотношениями, справедливыми в области Ω_0 и на трещине:

$$-\Delta u^0 = f(0) \qquad \text{в} \quad \Omega_0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_0^\pm. \tag{3}$$

В силу предположения о гладкости f из (2) следует, что решение u^0 будет гладким внутри области Ω_0 и вплоть до регулярной части границы $\partial\Omega_0$. Можно определить значение потенциальной энергии для задачи (1) как $\mathcal{P}(0) = \dfrac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |\nabla u^0|^2 - \int\limits_{\Omega_0} f(0) u^0$ или, используя равенство (1) с $v = u^0$, в эквивалентном виде

$$\mathcal{P}(0) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} f(0) u^0. \tag{4}$$

Для фиксированного малого параметра $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ рассмотрим возмущение $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ области Ω_0 с трещиной Γ_0, которое определяет возмущенную область $\Omega_\varepsilon = \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\Omega_0)$ с возмущенной трещиной $\Gamma_\varepsilon = \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\Gamma_0)$. При этом предполагается, что Ω_ε, Γ_ε обладают теми же свойствами, что Ω_0, Γ_0, и $\operatorname{meas} \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\Gamma_{\mathcal{D}}) > 0$. Используем линейное возмущение в виде $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ с заданной функцией $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2)$, где $\Phi_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, $i = 1, 2$, или в координатной форме

$$y_1 = x_1 + \varepsilon \Phi_1(\boldsymbol{x}), \quad y_2 = x_2 + \varepsilon \Phi_2(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_0, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \Omega_\varepsilon. \tag{5}$$

Сформулируем вариационную задачу для уравнения Пуассона в возмущенной области Ω_ε:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon) v \qquad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon). \tag{6}$$

Здесь $\tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon) = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon),\ v = 0 \text{ п.в. } \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\Gamma_{\mathcal{D}})\}$. Так же как для задачи (1), для задачи (6) существует единственное решение $u^\varepsilon \in \tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon)$. Таким образом, получаем однопараметрическое семейство задач (6), зависящих от параметра возмущения области ε, и (1) является частным случаем (6) при $\varepsilon = 0$. Соответствующая функция потенциальной энергии $\mathcal{P}\colon (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \mapsto \mathbb{R}$ имеет вид, аналогичный (4):

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon)u^\varepsilon. \tag{7}$$

1.2. Глобальное асимптотическое разложение решения. Вычислим функциональную матрицу трансформации (5):

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon\Phi_{1,1} & \varepsilon\Phi_{1,2} \\ \varepsilon\Phi_{2,1} & 1 + \varepsilon\Phi_{2,2} \end{pmatrix},$$

определитель которой равен

$$J(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} + \varepsilon^2 \Big|\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|. \tag{8}$$

Здесь $\operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} = \Phi_{1,1} + \Phi_{2,2}$; $|\partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{x}| = \Phi_{1,1}\Phi_{2,2} - \Phi_{1,2}\Phi_{2,1}$. При достаточно малых ε $J(\varepsilon) > 0$ почти всюду в Ω_0, отображение $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ взаимно однозначное, и существует его обратное отображение $(\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon)^{-1}$. При этом $(\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon)^{-1}(\Omega_\varepsilon) = \Omega_0$, $(\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon)^{-1}(\Gamma_\varepsilon) = \Gamma_0$. Для произвольной функции $v \in \tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ имеем $v \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$, где

$$(v \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon)(\boldsymbol{x}) \equiv v(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega_0, \tag{9}$$

в силу взаимной однозначности отображения $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ и наложенного условия ограниченности первых производных $\boldsymbol{\Phi}$. Также верно и обратное утверждение: из $v \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ следует $v \circ (\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon)^{-1} \in \tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon)$. Обратную функциональную матрицу запишем в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon\Phi_{1,1}/J(\varepsilon) - \varepsilon^2|\partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{x}|/J(\varepsilon) & -\varepsilon\Phi_{1,2}/J(\varepsilon) \\ -\varepsilon\Phi_{2,1}/J(\varepsilon) & 1 - \varepsilon\Phi_{2,2}/J(\varepsilon) - \varepsilon^2|\partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{x}|/J(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

откуда следует преобразование градиента

$$\nabla \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon = \nabla : \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}} = \nabla - \frac{\varepsilon}{J(\varepsilon)}\nabla : \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\varepsilon^2}{J(\varepsilon)}\Big|\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|\nabla. \tag{10}$$

Здесь $\nabla : \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\Phi}_{,1} \cdot \nabla, \boldsymbol{\Phi}_{,2} \cdot \nabla)$. Применяя координатную трансформацию $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ к интегралам в задаче (6) и используя (10), получим

$$\int\limits_{\Omega_0} J(\varepsilon)\Big(\nabla(u^\varepsilon \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{J(\varepsilon)}\nabla(u^\varepsilon \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon) : \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\varepsilon^2}{J(\varepsilon)}\Big|\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|\nabla(u^\varepsilon \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon)\Big) \cdot$$

$$\cdot \Big(\nabla v - \frac{\varepsilon}{J(\varepsilon)}\nabla v : \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\varepsilon^2}{J(\varepsilon)}\Big|\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|\nabla v\Big) = \int\limits_{\Omega_0} J(\varepsilon)(f(\varepsilon) \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon)v \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega_0). \tag{11}$$

Используя неравенства Гёльдера и Корна в уравнении (11) с $v = u^\varepsilon \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$, при достаточно малых ε можно доказать равномерную оценку

$$\|u^\varepsilon \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant \mathrm{const}. \tag{12}$$

Поэтому справедлива

Теорема 1. *При достаточно малых ε решение задачи (6), отображенное с помощью $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ из (5) на фиксированную область Ω_0, является единственным решением задачи (11).*

Воспользуемся представлением (8), чтобы получить разложение в ряд

$$\frac{1}{J(\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n J_n(\mathbf{\Phi}), \qquad J_n(\mathbf{\Phi}) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{k!(n-2k)!} (\operatorname{div} \mathbf{\Phi})^{n-2k} \Big|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|^k. \tag{13}$$

Тогда в соответствии с (8) и (13) оператор в левой части (11) допускает асимптотическое разложение

$$J(\varepsilon)\Big(\nabla u - \frac{\varepsilon}{J(\varepsilon)} \nabla u : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\varepsilon^2}{J(\varepsilon)} \Big|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| \nabla u\Big) \cdot$$

$$\cdot \Big(\nabla v - \frac{\varepsilon}{J(\varepsilon)} \nabla v : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\varepsilon^2}{J(\varepsilon)} \Big|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| \nabla v\Big) = \nabla u \cdot \nabla v + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n A_n(\mathbf{\Phi}; u, v), \tag{14}$$

где билинейные и симметричные относительно u, v формы A_n имеют вид

$$A_1(\mathbf{\Phi}; u, v) = \operatorname{div} \mathbf{\Phi} \nabla u \cdot \nabla v - \Big(\nabla u : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) \cdot \nabla v - \nabla u \cdot \Big(\nabla v : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big); \tag{15}$$

$$A_2(\mathbf{\Phi}; u, v) = -\Big|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| \nabla u \cdot \nabla v + \Big(\nabla u : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) \cdot \Big(\nabla v : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) \tag{16}$$

или при $n = 3, 4, \ldots$

$$A_n(\mathbf{\Phi}; u, v) = J_{n-2}(\mathbf{\Phi})\Big(\nabla u : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) \cdot \Big(\nabla v : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) +$$

$$+ J_{n-3}(\mathbf{\Phi})\Big|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| \Big[\Big(\nabla u : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) \cdot \nabla v + \nabla u \cdot \Big(\nabla v : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)\Big] + J_{n-4}(\mathbf{\Phi})\Big|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|^2 \nabla u \cdot \nabla v,$$

если положить формально $J_{-1}(\mathbf{\Phi}) = 0$. Формы A_n представляют собой комбинации произведения первых производных u, v и коэффициентов, включающих степени первых производных $\mathbf{\Phi}$, поэтому они корректно определены для $u, v \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ и $\mathbf{\Phi} \in [W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^2$.

Из представления (9) и гладкости f следует очевидное разложение в ряд

$$f(\varepsilon) \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(\mathbf{\Phi}), \qquad f_n(\mathbf{\Phi}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\partial^{n-k}}{\partial \mathbf{\Phi}^{n-k}} \Big(\frac{\partial^k f}{\partial \varepsilon^k}(0)\Big), \tag{17}$$

где $\partial/\partial\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi} \cdot \nabla$; $\partial^m/\partial\mathbf{\Phi}^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \Phi_1^k \Phi_2^{m-k} \partial^m/\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}$; $m = 2, 3, \ldots$. Перемножая (17) и (8), получим асимптотическое разложение функции в правой части уравнения (11) в виде

$$J(\varepsilon)(f(\varepsilon) \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_n(\mathbf{\Phi}), \qquad F_0(\mathbf{\Phi}) = f(0) \tag{18}$$

с коэффициентами разложения

$$F_1(\mathbf{\Phi}) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0) + \operatorname{div}(\mathbf{\Phi} f(0)); \tag{19}$$

$$F_2(\mathbf{\Phi}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(0) + 2 \operatorname{div}\Big(\mathbf{\Phi} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0)\Big) + 2\Big|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| f(0) + 2 \operatorname{div} \mathbf{\Phi} \frac{\partial f(0)}{\partial \mathbf{\Phi}} + \frac{\partial^2 f(0)}{\partial \mathbf{\Phi}^2} \tag{20}$$

или при $n = 2, 3, \ldots$

$$F_n(\mathbf{\Phi}) = f_n(\mathbf{\Phi}) + n \operatorname{div} \mathbf{\Phi} f_{n-1}(\mathbf{\Phi}) + n(n-1)\Big|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| f_{n-2}(\mathbf{\Phi}).$$

Следуя [9], будем строить асимптотическое разложение по ε решения задачи (11) в виде ряда

$$u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi}), \qquad \overset{(0)}{u}(\mathbf{\Phi}) = u^0 \quad \text{в} \quad \tilde{H}^1(\Omega_0) \tag{21}$$

с соответствующими производными $\overset{(1)}{u}(\mathbf{\Phi}) \equiv \dot{u}(\mathbf{\Phi})$, $\overset{(2)}{u}(\mathbf{\Phi}) \equiv \ddot{u}(\mathbf{\Phi})$ и т. д. Назовем эти производные глобальными производными решения соответствующего порядка, поскольку разложение (21) ищется во всей исходной области Ω_0, в отличие от локального разложения внутри Ω_0, которое определено ниже. Можно также интерпретировать их как полные производные возмущенного решения $u^\varepsilon(\boldsymbol{x} + \varepsilon\mathbf{\Phi})$ по ε в обобщенном смысле. Используя терминологию оптимизации формы в гладких областях [8], приходим к заключению, что при f, не зависящем от ε, первая глобальная производная $\dot{u}(\mathbf{\Phi})$ является сильной материальной производной от решения в направлении поля скоростей $\mathbf{\Phi}$.

Подставим формально ряд (21) в уравнение (11) и воспользуемся разложениями (14) и (18). Тогда, собирая множители при одинаковых степенях ε, устанавливаем, что глобальные производные определяются из задач

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla\dot{u}(\mathbf{\Phi}) \cdot \nabla v = \int\limits_{\Omega_0} [F_1(\mathbf{\Phi})v - A_1(\mathbf{\Phi}; u^0, v)] \qquad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega_0); \tag{22}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla\ddot{u}(\mathbf{\Phi}) \cdot \nabla v = \int\limits_{\Omega_0} [F_2(\mathbf{\Phi})v - 2A_1(\mathbf{\Phi}; \dot{u}(\mathbf{\Phi}), v) - 2A_2(\mathbf{\Phi}; u^0, v)] \tag{23}$$

или при $n = 3, 4, \ldots$ — из задачи

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla \overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi}) \cdot \nabla v = \int\limits_{\Omega_0} \Big(F_n(\mathbf{\Phi})v - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} A_k(\mathbf{\Phi}; \overset{(n-k)}{u}(\mathbf{\Phi}), v) \Big). \tag{24}$$

Задачи (22)–(24) вместе с задачей (1) представляют собой итерационную схему для последовательного нахождения функций $\overset{(0)}{u}(\mathbf{\Phi}) = u^0$, $\overset{(1)}{u}(\mathbf{\Phi})$ и т. д. (Формулы (22), (23) следуют из (24) при $n = 1, 2$.) Правая часть (24) представляет собой линейный непрерывный функционал над $\tilde{H}^1(\Omega_0)$, поэтому в силу неравенства Корна существует единственное решение $\overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi}) \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ задачи (24) при $n = 1, 2, \ldots$. Задача (24) аналогична исходной задаче (1) и отличается от нее фиктивными данными в области и на границе, которые находятся итерациями. Таким образом, определена процедура обобщенного дифференцирования решения относительно возмущения области.

Для доказательства справедливости разложения (21) получим соответствующие оценки. Вычитая уравнение (1) из (11), с учетом (14) и (18) имеем

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla(u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon - u^0) \cdot \nabla v = \varepsilon \int\limits_{\Omega_0} [\bar{F}_1(\mathbf{\Phi})v - \bar{A}_1(\mathbf{\Phi}; u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon, v)],$$

где чертой отмечены остаточные члены в соответствующих разложениях (14) и (18). Если положить здесь $v = u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon - u^0$ и использовать неравенства Гёльдера и Корна, то в силу оценки (12) очевидно, что $\|u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c\,\varepsilon$. Далее воспользуемся индукцией. Пусть выполнено неравенство

$$\Big\| u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon - \sum_{k=0}^{m} \frac{\varepsilon^k}{k!} \overset{(k)}{u}(\mathbf{\Phi}) \Big\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c\,\varepsilon^{m+1}, \qquad m = 0, \ldots, n-1. \tag{25}$$

Составив из уравнений (1), (11), (24) частичную сумму порядка n и используя разложения (14), (18), получим

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla\Big(u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon^k}{k!} \overset{(k)}{u}(\mathbf{\Phi})\Big) \cdot \nabla v = -\sum_{m=1}^{n} \varepsilon^m \int\limits_{\Omega_0} A_m\Big(\mathbf{\Phi}; u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon - \sum_{k=0}^{n-m} \frac{\varepsilon^k}{k!} \overset{(k)}{u}(\mathbf{\Phi}), v\Big) + \\ + \varepsilon^{n+1} \int\limits_{\Omega_0} \Big[\frac{1}{(n+1)!} \bar{F}_{n+1}(\mathbf{\Phi}) v - \bar{A}_{n+1}(\mathbf{\Phi}; u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon, v)\Big].$$

Вновь подставляя $v = u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon - \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon^k \overset{(k)}{u}(\mathbf{\Phi})/k!$ и применяя неравенства Гёльдера и Корна, из оценок (12), (25) имеем

$$\Big\| u^\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^\varepsilon - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon^k}{k!} \overset{(k)}{u}(\mathbf{\Phi}) \Big\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c\, \varepsilon^{n+1}. \tag{26}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *При достаточно малом ε существуют глобальные производные решения $\overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi}) \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ произвольного порядка n относительно линейного возмущения области как единственные решения задачи* (1) *при $n = 0$ и задачи* (24) *при $n = 1, 2, \ldots$, при этом справедливо глобальное асимптотическое разложение* (21) *решения задачи* (11) *с оценкой* (26) *для произвольного n.*

1.3. Локальное асимптотическое разложение решения. Можно применить обратную координатную трансформацию $(\mathbf{\Phi}^\varepsilon)^{-1}$ к равенству (21), откуда следует представление

$$u^\varepsilon = u^0 \circ (\mathbf{\Phi}^\varepsilon)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi}) \circ (\mathbf{\Phi}^\varepsilon)^{-1} \qquad \text{в} \quad \tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon). \tag{27}$$

Рассмотрим относительно компактное в Ω_0 множество $\overline{K}$. При достаточно малых ε выполнено условие $\overline{K} \subset \Omega_\varepsilon$, поэтому (27) справедливо также в $H^1_{loc}(\Omega_0)$. В то же время из уравнения равновесия (2) следует, что решение u^0 задачи (1) гладкое внутри Ω_0, поэтому $u^0 \circ (\mathbf{\Phi}^\varepsilon)^{-1}$ в $\overline{K}$ можно разложить в ряд по ε следующим образом. Предположим, что функция возмущения $\mathbf{\Phi}$ гладкая, т. е. $\mathbf{\Phi} \in [C^\infty(\mathbb{R}^2)]^2$. Дифференцируя (5) как неявную функцию, можно определить обратную функцию $\boldsymbol{x}(\varepsilon, \boldsymbol{y})$ как решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения по ε первого порядка

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\varepsilon} = -\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}) : \Big(\frac{\partial(\boldsymbol{x} + \varepsilon\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)^{-1}, \qquad \boldsymbol{x}\big|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{y}. \tag{28}$$

В силу предположения о гладкости $\mathbf{\Phi}$ существует гладкое решение задачи (28), которое представимо в виде

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{X}^1(\boldsymbol{y}) = -\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{y}). \tag{29}$$

Здесь функции $\boldsymbol{X}^2, \boldsymbol{X}^3, \ldots$ можно искать последовательным дифференцированием уравнения (28) по ε, полагая затем $\varepsilon = 0$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Например, $\boldsymbol{X}^2(\boldsymbol{y}) = \big[\mathbf{\Phi} \operatorname{div} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi} : (\partial\mathbf{\Phi}/\partial\boldsymbol{x} - |\partial\mathbf{\Phi}/\partial\boldsymbol{x}|(\partial\mathbf{\Phi}/\partial\boldsymbol{x})^{-1})\big]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}}$ и т. д. С помощью (29) разложим $u^0 \circ (\mathbf{\Phi}^\varepsilon)^{-1}$ как гладкую функцию в $\overline{K}$ в ряд по ε, в результате получим

$$u^0 \circ (\mathbf{\Phi}^\varepsilon)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \overset{(0n)}{u}(\mathbf{\Phi}) \qquad \text{в} \quad H^1_{loc}(\Omega_0), \tag{30}$$

где $\overset{(00)}{u}(\mathbf{\Phi}) = u^0$, $\overset{(01)}{u}(\mathbf{\Phi}) = -\partial u^0/\partial\mathbf{\Phi}$, $\overset{(02)}{u}(\mathbf{\Phi}) = \partial^2 u^0/\partial\mathbf{\Phi}^2 + \boldsymbol{X}^2\cdot\nabla u^0$ и т. д. Эту процедуру можно применить к следующим функциям в представлении (27). Полагая в (22) $v\in C_0^\infty(\Omega_0)$ и интегрируя по частям, получим уравнение

$$-\Delta\dot{u}(\mathbf{\Phi}) = \frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(0) + \mathbf{\Phi}\cdot\nabla f(0) - 2\sum_{i=1}^{2}\nabla u^0_{,i}\cdot\mathbf{\Phi}_{,i} + \nabla u^0\cdot\Delta\mathbf{\Phi} \qquad \text{в} \quad \Omega_0.$$

Поэтому в силу предположения о гладкости f, $\mathbf{\Phi}$ и локальной гладкости u^0 функция $\dot{u}(\mathbf{\Phi})$ также будет гладкой внутри Ω_0. Повторяя эти рассуждения последовательно для решений $\overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi})$ задачи (24) при $n = 2,3,\ldots$, приходим к выводу о локальной гладкости всех $\overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi})$ внутри области Ω_0. Следовательно, аналогично (30) получаем разложения

$$\overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi})\circ(\mathbf{\Phi}^\varepsilon)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\overset{(nk)}{u}(\mathbf{\Phi}), \qquad n = 0,1,\ldots \quad \text{в} \quad H^1_{loc}(\Omega_0), \tag{31}$$

где $\overset{(n0)}{u}(\mathbf{\Phi}) = \overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi})$, $\overset{(n1)}{u}(\mathbf{\Phi}) = -\partial\overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi})/\partial\mathbf{\Phi}$, $\overset{(n2)}{u}(\mathbf{\Phi}) = \partial^2\overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi})/\partial\mathbf{\Phi}^2 + \boldsymbol{X}^2\cdot\nabla\overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi})$ и т. д. Подставив (31) в (27) и собрав слагаемые при одинаковых степенях ε, получим локальное асимптотическое разложение по ε (ср. с (21)) возмущенного решения

$$u^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}u^{(n)}(\mathbf{\Phi}), \quad u^{(0)}(\mathbf{\Phi}) = u^0 \qquad \text{в} \quad H^1_{loc}(\Omega_0) \tag{32}$$

с локальными производными решения $u^{(n)}(\mathbf{\Phi})$ порядка n, которые определены как распределения в Ω_0 в виде

$$\begin{gathered} u^{(1)}(\mathbf{\Phi}) \equiv u'(\mathbf{\Phi}) = \dot{u}(\mathbf{\Phi}) - \mathbf{\Phi}\cdot\nabla u^0, \\ u^{(2)}(\mathbf{\Phi}) \equiv u''(\mathbf{\Phi}) = \ddot{u}(\mathbf{\Phi}) - 2\,\frac{\partial\dot{u}(\mathbf{\Phi})}{\partial\mathbf{\Phi}} + \boldsymbol{X}^2\cdot\nabla u^0 + \frac{\partial^2 u^0}{\partial\mathbf{\Phi}^2} \end{gathered} \tag{33}$$

или в общем виде при $n = 0,1,\ldots$

$$u^{(n)}(\mathbf{\Phi}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,u^{(k(n-k))}(\mathbf{\Phi}).$$

При этом первая локальная производная в (33) определена в $L^2(\Omega_0)$. Данные производные можно также интерпретировать как частные производные возмущенного решения u^ε по параметру ε. Согласно теории оптимизации формы в гладких областях [8], если f не зависит от ε и первая локальная производная в (33) принадлежит классу $\tilde{H}^1(\Omega_0)$, то она является сильной производной по форме в направлении поля скоростей $\mathbf{\Phi}$. В общем случае для трещины это неверно, и поэтому невозможно определить производную по форме как решение какой-либо вариационной задачи. Таким образом, доказана

Теорема 3. *При малом ε и гладкой функции возмущения $\mathbf{\Phi}$ справедливо локальное асимптотическое разложение* (32) *возмущенного решения u^ε задачи* (6) *с локальными производными решения $u'(\mathbf{\Phi})$, $u''(\mathbf{\Phi})$, … относительно линейного возмущения области.*

Поскольку решение u^ε задачи (6) определяется в возмущенной области Ω_ε и поэтому не зависит от выбора возмущающей функции $\mathbf{\Phi}$, то и производные в разложении (32) в этом смысле не зависят от $\mathbf{\Phi}$.

1.4. Асимптотическое разложение потенциальной энергии. Согласно данному выше определению имеем интегральное представление потенциальной энергии (7), к которому применим координатное преобразование $\mathbf{\Phi}^\varepsilon$:

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} J(\varepsilon)(f(\varepsilon)\circ\mathbf{\Phi}^\varepsilon)(u^\varepsilon\circ\mathbf{\Phi}^\varepsilon).$$

Используя разложения (18) и (21), с учетом определения (4) получим асимптотическую формулу

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\,\mathcal{P}_0^{(n)}(\mathbf{\Phi}), \qquad \mathcal{P}_0^{(0)}(\mathbf{\Phi}) = \mathcal{P}(0) \tag{34}$$

с соответствующими производными функции энергии в виде

$$\mathcal{P}_0^{(1)}(\mathbf{\Phi}) \equiv \mathcal{P}_0'(\mathbf{\Phi}) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}[F_1(\mathbf{\Phi})u^0 + f(0)\dot{u}(\mathbf{\Phi})]; \tag{35}$$

$$\mathcal{P}_0^{(2)}(\mathbf{\Phi}) \equiv \mathcal{P}_0''(\mathbf{\Phi}) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}[F_2(\mathbf{\Phi})u^0 + 2F_1(\mathbf{\Phi})\dot{u}(\mathbf{\Phi}) + f(0)\ddot{u}(\mathbf{\Phi})] \tag{36}$$

или в общем виде

$$\mathcal{P}_0^{(n)}(\mathbf{\Phi}) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\int\limits_{\Omega_0} F_{n-k}(\mathbf{\Phi})\overset{(k)}{u}(\mathbf{\Phi}). \tag{37}$$

Из (18) и (37) следует

$$\mathcal{P}(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon^k}{k!}\mathcal{P}_0^{(k)}(\mathbf{\Phi}) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon^k}{k!}\int\limits_{\Omega_0} F_k(\mathbf{\Phi})\Big(u^\varepsilon\circ\mathbf{\Phi}^\varepsilon - \sum_{m=0}^{n-k}\frac{\varepsilon^m}{m!}\overset{(m)}{u}(\mathbf{\Phi})\Big) - {}$$
$$- \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}\int\limits_{\Omega_0}\bar{F}_{n+1}(\mathbf{\Phi})(u^\varepsilon\circ\mathbf{\Phi}^\varepsilon)$$

с остаточным членом $\bar{F}_{n+1}(\mathbf{\Phi})$ в разложении (18). Используя оценки (12) и (26), имеем

$$\Big|\mathcal{P}(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon^k}{k!}\,\mathcal{P}_0^{(k)}(\mathbf{\Phi})\Big| \leqslant c\,\varepsilon^{n+1}, \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{38}$$

Порядок глобальных производных решения, включенных в формулы (35)–(37), можно снизить на единицу. Возьмем $v = \dot{u}(\mathbf{\Phi})$ в (1) и $v = u^0$ в (22), тогда

$$\int\limits_{\Omega_0} f(0)\dot{u}(\mathbf{\Phi}) = \int\limits_{\Omega_0}\nabla u^0\cdot\nabla\dot{u}(\mathbf{\Phi}) = \int\limits_{\Omega_0}\nabla\dot{u}(\mathbf{\Phi})\cdot\nabla u^0 = \int\limits_{\Omega_0}[F_1(\mathbf{\Phi})u^0 - A_1(\mathbf{\Phi}; u^0, u^0)],$$

поэтому (35) принимает эквивалентный вид

$$\mathcal{P}_0'(\mathbf{\Phi}) = \int\limits_{\Omega_0}\Big[-F_1(\mathbf{\Phi})u^0 + \frac{1}{2}A_1(\mathbf{\Phi}; u^0, u^0)\Big]. \tag{39}$$

Полагая $v = \ddot{u}(\mathbf{\Phi})$ в (1), $v = \dot{u}(\mathbf{\Phi})$ в (22) и $v = u^0$ в (23), из (36) получим формулу

$$\mathcal{P}_0''(\mathbf{\Phi}) = \int\limits_{\Omega_0} \big[-F_2(\mathbf{\Phi})u^0 + A_2(\mathbf{\Phi}; u^0, u^0) - |\nabla \dot{u}(\mathbf{\Phi})|^2\big]. \tag{40}$$

Аналогично, подставив $v = \overset{(n)}{u}(\mathbf{\Phi})$ в (1), $v = \overset{(n-1)}{u}(\mathbf{\Phi})$ в (22), $v = u^0$ в (24), из (37) получим следующее соотношение для n-й производной:

$$\mathcal{P}_0^{(n)}(\mathbf{\Phi}) = \int\limits_{\Omega_0} \Big(- F_n(\mathbf{\Phi})u^0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} F_{n-k}(\mathbf{\Phi}) \overset{(k)}{u}(\mathbf{\Phi}) - \frac{n}{2} \nabla \overset{(n-2)}{u}(\mathbf{\Phi}) \cdot \nabla \dot{u}(\mathbf{\Phi}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} A_k(\mathbf{\Phi}; \overset{(n-k)}{u}(\mathbf{\Phi}), u^0)\Big), \qquad n = 2, 3, \dots . \tag{41}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *При малом ε существуют производные потенциальной энергии $\mathcal{P}_0^{(n)}(\mathbf{\Phi})$, $n = 1, 2, \dots$ относительно линейного возмущения области, определяемые формулами* (35)–(37) *или* (39)–(41), *которые дают асимптотическое разложение* (34) *по ε функции потенциальной энергии с оценкой* (38).

В дополнение к теореме 4 из определения потенциальной энергии следует

Лемма 1. *Если два различных возмущения $\mathbf{\Phi}^\varepsilon = \boldsymbol{I} + \varepsilon\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}^\varepsilon = \boldsymbol{I} + \varepsilon\mathbf{\Psi}$ переводят область с трещиной Ω_0 в одну и ту же возмущенную область Ω_ε для любого ε, то $\mathcal{P}_0^{(n)}(\mathbf{\Phi}) = \mathcal{P}_0^{(n)}(\mathbf{\Psi})$ при всех n.*

Действительно, в условиях леммы 1 для $\mathbf{\Phi}^\varepsilon$ и $\mathbf{\Psi}^\varepsilon$ имеем одну и ту же возмущенную задачу (6), поэтому в силу единственности ее решения получаем одну и ту же функцию потенциальной энергии $\mathcal{P}(\varepsilon)$ из (7). Следовательно, из соответствующих разложений (34), составленных для $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$, получаем утверждение, сформулированное в лемме 1.

Кроме того, если в условиях теоремы 3 справедливо локальное разложение решения (32) на некотором множестве $\overline{K} \subseteq \overline{\Omega}_0$ и $f(\varepsilon) \equiv 0$ в $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{K}$ для всех ε, то из определения (7) можно также получить производные энергии в форме

$$\mathcal{P}_0^{(n)}(\mathbf{\Phi}) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \int\limits_{K} \frac{\partial^k f}{\partial \varepsilon^k}(0)\, u^{(n-k)}(\mathbf{\Phi}), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Пусть $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = 0$. Тогда первая производная потенциальной энергии является линейным непрерывным функционалом $\mathcal{L}_1$ по $\mathbf{\Phi}$, который на основании формул (39), (19), (15) запишем в виде

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{\Phi}) = \int\limits_{\Omega_0} \Big[-\operatorname{div}(\mathbf{\Phi} f(0))u^0 + \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{\Phi}|\nabla u^0|^2 - \Big(\nabla u^0 : \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) \cdot \nabla u^0\Big], \tag{42}$$

и первая глобальная производная решения $\dot{u}(\mathbf{\Phi})$ как решение линейной по $\mathbf{\Phi}$ (в этом случае) задачи (22) также линейна по $\mathbf{\Phi}$. Пусть дополнительно $\partial^2 f/\partial\varepsilon^2\big|_{\varepsilon=0} = 0$. Тогда вторая производная функции энергии из представления (40) ассоциируется с квадратичным функционалом $\mathcal{L}_2$, который согласно (16) и (20) можно представить в симметричном виде:

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}) = \int\limits_{\Omega_0} \Big\{-\Big[\Big(\Big|\frac{\partial(\Phi_1, \Psi_2)}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| + \Big|\frac{\partial(\Psi_1, \Phi_2)}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|\Big) f(0) +$$

$$+ \operatorname{div} \mathbf{\Phi}(\mathbf{\Psi} \cdot \nabla f(0)) + \operatorname{div} \mathbf{\Psi}(\mathbf{\Phi} \cdot \nabla f(0)) + \sum_{i,j=1}^{2} \Phi_i \Psi_j \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_i \partial x_j}\Big] u^0 -$$

$$- \frac{1}{2}\Big(\Big|\frac{\partial(\Phi_1, \Psi_2)}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| + \Big|\frac{\partial(\Psi_1, \Phi_2)}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|\Big)|\nabla u^0|^2 + \sum_{i,j,k=1}^{2} \Phi_{i,k}\Psi_{j,k} u^0_{,i} u^0_{,j} - \nabla \dot{u}(\mathbf{\Phi}) \cdot \nabla \dot{u}(\mathbf{\Psi})\Big\}. \qquad (43)$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2. *Если $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = 0$, то первая производная потенциальной энергии $\mathcal{P}_0'(\mathbf{\Phi})$ ассоциируется с линейным непрерывным функционалом $\mathcal{L}_1(\mathbf{\Phi})$ из формулы* (42). *Если $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = \partial^2 f/\partial\varepsilon^2\big|_{\varepsilon=0} = 0$, то вторая производная потенциальной энергии $\mathcal{P}_0''(\mathbf{\Phi})$ ассоциируется с билинейным симметричным непрерывным функционалом $\mathcal{L}_2(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi})$ из* (43).

1.5. Инвариантный интеграл энергии. Пусть K — область с кусочно-гладкой границей ∂K и $\overline{K} \subseteq \overline{\Omega}_0$, в которой выполнены следующие условия:

а) решение $u^0 \in H^2$ в $\overline{K}$;

б) $f = 0$ или $\mathbf{\Phi} = 0$ в $\overline{\Omega} \setminus K$;

в) $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})$ такое, что выполняется соотношение $(1/2) \operatorname{div} \mathbf{\Phi}|\boldsymbol{q}|^2 - (\boldsymbol{q} : \partial\mathbf{\Phi}/\partial\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q} = 0$ для любого вектора $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ почти всюду в $\Omega \setminus \overline{K}$.

Условие "в" выполнено, например, для следующих векторов $\mathbf{\Phi}$: (c_1, c_2), $c(x_1, x_2)$, $c(-x_2, x_1)$ и их линейной комбинации (c, c_1, c_2 — произвольные постоянные). Пусть выполнены условия леммы 2. Рассмотрим первую производную потенциальной энергии, которая в этом случае равна $\mathcal{L}_1(\mathbf{\Phi})$ (см. (42)). В силу предположений "б", "в" интеграл из (42) по области $\Omega_0 \setminus \overline{K}$ равен нулю, поэтому остается только интеграл по K, который можно проинтегрировать по частям в силу предположения "а". В результате получаем выражение

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{\Phi}) = \int\limits_K \frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{\Phi}}(f(0) + \Delta u^0) + \int\limits_{\partial K} \Big[\frac{1}{2}(\mathbf{\Phi} \cdot \boldsymbol{\theta})|\nabla u^0|^2 - \frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{\Phi}} \frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big],$$

где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ — вектор внешней нормали к границе ∂K. Интеграл по области K обращается в нуль в силу уравнения равновесия (2). Таким образом, имеем интеграл только по контуру ∂K:

$$I(\mathbf{\Phi}) = \int\limits_{\partial K} \Big[\frac{1}{2}(\mathbf{\Phi} \cdot \boldsymbol{\theta})|\nabla u^0|^2 - \frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{\Phi}} \frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big]. \qquad (44)$$

Лемма 3. *Пусть $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = 0$. Если существует множество областей $\{K\}$, для которых выполнены условия "а"—"в", то первая производная потенциальной энергии $\mathcal{P}_0'(\mathbf{\Phi})$ относительно возмущения области имеет вид инвариантного интеграла $I(\mathbf{\Phi})$ из* (44) *по произвольному контуру ∂K, и этот интеграл определяется выбором возмущающей функции $\mathbf{\Phi}$.*

2. РОСТ ТРЕЩИНЫ

2.1. Возмущение локального сдвига вдоль трещины. Пусть трещина Γ_0 занимает прямолинейный отрезок длиной L с вершинами в точках $\boldsymbol{O} = (0, 0)$ и $\boldsymbol{C} = (L\tau_1, L\tau_2)$ ($\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ — направляющий касательный вектор), $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ — нормальный вектор к Γ_0. Выберем срезающую функцию $\chi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, финитную с носителем $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega$ и равную единице в некоторой окрестности $\overline{\mathcal{O}}$ вершины трещины $\boldsymbol{C}$, причем вторая вершина лежит вне $\operatorname{supp}\chi$. Например, если B_δ — круг радиуса δ с центром в точке $\boldsymbol{C}$, то можно выбрать $\chi(r) \equiv 1$ в $B_{\delta/2}$, $\chi(r) \equiv 0$ вне B_δ при $r = |\boldsymbol{x} - L\boldsymbol{\tau}|$.

Соотношениями (5) с $\mathbf{\Phi} = \boldsymbol{\tau}\chi$ определим трансформацию локального сдвига вдоль трещины, которая переводит Γ_0 в прямолинейную трещину Γ_ε длиной $L+\varepsilon$ с вершинами в точках $\boldsymbol{O}$ и $((L+\varepsilon)\tau_1, (L+\varepsilon)\tau_2)$. Вариацией параметра ε задается вариация длины трещины. В этом случае $\operatorname{div}\mathbf{\Phi} = \partial\chi/\partial\boldsymbol{\tau}$, $|\partial\mathbf{\Phi}/\partial\boldsymbol{x}| = 0$. Тогда согласно теореме 2 глобальные производные решения $\overset{(n)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi) \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$, $n = 1, 2, \ldots$ определяются из задач (22)–(24), которые в этом случае принимают более простой вид

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla\dot{u}(\boldsymbol{\tau}\chi)\cdot\nabla v = \int\limits_{\Omega_0} \Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(0) + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}\big(\chi f(0)\big)\Big)v - \\ - \frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\nabla u^0\cdot\nabla v + \nabla\chi\cdot\Big(\nabla u^0\,\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\tau}} + \nabla v\,\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big)\Big] \qquad \forall v\in\tilde{H}^1(\Omega_0); \tag{45}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla\overset{(n)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi)\cdot\nabla v = \int\limits_{\Omega_0} \Big\{F_n(\boldsymbol{\tau}\chi)v + n\Big[\nabla\chi\cdot\Big(\nabla\overset{(n-1)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi)\,\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\tau}} + \nabla v\,\frac{\partial\overset{(n-1)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big) - \\ - \frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\nabla\overset{(n-1)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi)\cdot\nabla v\Big] - |\nabla\chi|^2\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\Big(-\frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big)^{k-2}\frac{\partial\overset{(n-k)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\,\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big\}. \tag{46}$$

Если формально проинтегрировать по частям уравнение (45), то в силу (2), (3) получатся следующие соотношения в области Ω_0 и на трещине:

$$\begin{aligned} -\Delta\dot{u}(\boldsymbol{\tau}\chi) &= \frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(0) - \Delta\Big(\chi\,\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big) \qquad \text{в} \quad \Omega_0,\\ \frac{\partial\dot{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}\chi) &= \frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{на} \quad \Gamma_0. \end{aligned} \tag{47}$$

Аналогично из (46) для $n = 2, 3, \ldots$ можно вывести равенства

$$\begin{aligned} -\Delta\overset{(n)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi) &= F_n(\boldsymbol{\tau}\chi) + n\Big[\frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Delta\overset{(n-1)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi) - 2\nabla\chi\cdot\nabla\Big(\frac{\partial\overset{(n-1)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big) - \\ &- \Delta\chi\frac{\partial\overset{(n-1)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big] + \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big[|\nabla\chi|^2\Big(-\frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big)^{k-2}\frac{\partial\overset{(n-k)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big],\\ \frac{\partial\overset{(n)}{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}\chi) &= n\Big(\frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\frac{\partial\overset{(n-1)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi) - \frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,\frac{\partial\overset{(n-1)}{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big). \end{aligned} \tag{48}$$

Из представления (47) следует, что если $u^0\in H^2(\Omega_0)$, то решением задачи (45) является функция $\dot{u}(\boldsymbol{\tau}\chi) = \chi\partial u^0/\partial\boldsymbol{\tau} + u'$, где $u'\in\tilde{H}^1(\Omega_0)$ — решение вариационной задачи

$$\int\limits_{\Omega_0}\nabla u'\cdot\nabla v = \int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(0)v \qquad \forall v\in\tilde{H}^1(\Omega_0).$$

Согласно определению (33) в этом случае первая локальная производная $u'(\boldsymbol{\tau}\chi)$ совпадает с u', и при f, не зависящем от ε, существует сильная производная по форме, которая тождественно равна нулю.

Согласно лемме 1 производные функции потенциальной энергии для возмущающей функции $\boldsymbol{\tau}\chi$ относительно длины трещины в этом случае не зависят от выбора срезающей функции χ и определяются в соответствии с (39)–(41), при этом

$$\mathcal{P}_0'(\boldsymbol{\tau}\chi) = \int\limits_{\Omega_0} \Big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}\big(\chi f(0)\big)\Big) u^0 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \chi}{\partial \boldsymbol{\tau}}|\nabla u^0|^2 - \frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\tau}}\,\nabla\chi\cdot\nabla u^0 \Big]. \tag{49}$$

В таком же виде записываются следующие производные. Пусть $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = 0$. Выберем $K = (\Omega_0 \setminus \overline{\mathcal{O}}) \cap \operatorname{supp}\chi$. Легко показать, что в $\overline{K}$ решение u^0 задачи (1) обладает дополнительной H^2-гладкостью, т. е. выполняется условие "а" леммы 3. Вне $\operatorname{supp}\chi$ преобразование $\boldsymbol{\tau}\chi \equiv 0$, в $\overline{\mathcal{O}}$ $\boldsymbol{\tau}\chi \equiv \boldsymbol{\tau}$, и пусть $f(0) \equiv 0$. Тогда будут выполнены условия "б" в $\overline{\Omega} \setminus K$ и "в" в $\Omega \setminus \overline{K}$, поэтому имеет место равенство (44) на границе, состоящей из контура $\partial\mathcal{O}$ и внутренней части трещины $\Gamma_0 \cap \overline{K}$. Так как на трещине $\boldsymbol{\theta} = \mp\boldsymbol{\nu}$, то $\chi\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta} = 0$ и $\partial u^0/\partial\boldsymbol{\theta} = 0$ в силу краевого условия Неймана (3). Таким образом, при $f(0) \equiv 0$ в окрестности вершины трещины первая производная потенциальной энергии относительно возмущения локального сдвига вдоль трещины $\mathcal{P}_0'(\boldsymbol{\tau}\chi)$ (см. (49)) является инвариантным интегралом энергии (44), записанным в виде

$$I(\boldsymbol{\tau}\chi) = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} \Big[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta})|\nabla u^0|^2 - \frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Big], \tag{50}$$

где $\partial\mathcal{O}$ — любой замкнутый контур из этой окрестности, внутри которого, возможно, содержится часть трещины. Формула (50) известна в механике разрушения как независимый от пути интегрирования интеграл Черепанова — Райса.

2.2. Асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений. Используем глобальный асимптотический метод для определения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Пусть вершина трещины $\boldsymbol{O}$ выходит на внешнюю границу $\partial\Omega$, так что можно рассматривать только одну вершину трещины $\boldsymbol{C}$. Известна теорема (см. [15]) о представлении решения задачи (1) для прямолинейной трещины в виде суммы сингулярной и регулярной функций

$$u^0 = K(0)\chi(r)\sqrt{r}\sin(\varphi/2) + w^0, \tag{51}$$

где $w^0 \in H^2(\Omega_0)$ — регулярная функция; (r,φ) — полярная система координат в окрестности $\boldsymbol{C}$, т. е. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau} - L = r\cos\varphi$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu} = r\sin\varphi$, $|\varphi| \leqslant \pi$. При этом константа $K(0)$ в (51) определяется единственным образом и известна в механике разрушения как коэффициент интенсивности напряжений. Для определения $K(0)$ построим вспомогательную весовую функцию

$$\zeta = (\chi(r)/(2\sqrt{r}))\sin(\varphi/2) + V, \tag{52}$$

где $V \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ — единственное решение вариационной задачи (ср. с (22) и (45))

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla V\cdot\nabla v = -\int\limits_{\Omega_0} A_1\Big(\boldsymbol{\tau}\chi; \sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}, v\Big) \qquad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega_0). \tag{53}$$

Интегрируя по частям уравнение (53), в силу

$$\Delta\Big(\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big(\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big) = -\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{\partial\chi(r)}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0$$

получаем соотношения, аналогичные (47):

$$-\Delta V = \Delta\Big(\chi(r)\,\frac{1}{2\sqrt{r}}\,\sin\frac{\varphi}{2}\Big) \quad \text{в} \quad \Omega_0, \qquad \frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0.$$

Поэтому $\zeta \not\equiv 0$ является решением $\zeta \in L^2(\Omega_0)$ задачи

$$\Delta\zeta = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{54}$$

Пусть срезающая функция $\chi(r)$ такая, что $\chi(r) \equiv 1$ при $0 \leqslant r \leqslant \delta/2$, т. е. в круге $B_{\delta/2}$. Из представления (52) следует, что ζ является функцией из класса H^1 вне окрестности $B_{\delta/2}$ (вершины трещины), поэтому для области $\Omega_0 \setminus \overline{B}_{\delta/2}$ можно применить формулу Грина. Тогда с учетом (2), (3) и (54) имеем

$$\int\limits_{\Omega_0\setminus B_{\delta/2}} f(0)\zeta = -\int\limits_{\Omega_0\setminus B_{\delta/2}} \Delta u^0\zeta = \int\limits_{\partial B_{\delta/2}} \Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\boldsymbol{\theta}}\, u^0 - \frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\theta}}\,\zeta\Big),$$

где $\boldsymbol{\theta} = -(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — нормаль к границе области $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_{\delta/2}$. Подставляя в последнее равенство представления (51) и (52), можно вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Omega_0\setminus B_{\delta/2}} f(0)\zeta = \frac{K(0)}{2}\int\limits_{|\varphi|<\pi} \sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi + I_\delta = \frac{\pi}{2}\, K(0) + I_\delta, \tag{55}$$

где

$$I_\delta = \frac{\delta}{2}\int\limits_{|\varphi|<\pi} \Big[\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\theta}}\, w^0 - \frac{\partial w^0}{\partial\boldsymbol{\theta}}\, V + \frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\theta}}\, K(0)\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2} - V\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Big(K(0)\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big) +$$
$$+ w^0\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Big(\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\varphi}{2}\Big) - \frac{\partial w^0}{\partial\boldsymbol{\theta}}\,\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\varphi}{2}\Big]_{r=\delta/2} d\varphi.$$

Подынтегральная функция в I_δ имеет интегрируемую особенность при $r = 0$, поэтому $I_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Следовательно, в силу ограниченности $f(0)$ можно перейти к пределу в (55) при $\delta \to 0$, в результате получим формулу для определения КИНа

$$K(0) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\Omega_0} f(0)\zeta. \tag{56}$$

Для глобальных производных $\dot u(\boldsymbol{\tau}\chi), \dots, \overset{(n)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi)$ как решений задач (45), (46), аналогичных (1), также справедливо представление в виде (51)

$$\overset{(n)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi) = K^{(n)}\chi(r)\sqrt{r}\sin{(\varphi/2)} + w^n, \qquad w^n \in H^2(\Omega_0), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{57}$$

Потребуем дополнительную гладкость срезки $\chi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Тогда согласно (56) из соотношений (47), (48) с учетом $\partial\chi(r)/\partial\boldsymbol{\nu} = 0$ на Γ_0 получим соответствующие формулы для определения коэффициентов $K^{(n)}$:

$$K^{(1)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\Omega_0} \Big[\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(0) + \chi\,\frac{\partial f(0)}{\partial\boldsymbol{\tau}} - 2\nabla\chi\cdot\nabla\Big(\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big) - \Delta\chi\,\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big]\zeta,$$

$$K^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\Omega_0} \Big\{F_n(\boldsymbol{\tau}\chi) + n\Big[\frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,\Delta\overset{(n-1)}{u}(\boldsymbol{\tau}\chi) - 2\nabla\chi\cdot\nabla\Big(\frac{\partial\overset{(n-1)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big) - \tag{58}$$
$$-\Delta\chi\,\frac{\partial\overset{(n-1)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big] + \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big[|\nabla\chi|^2\Big(-\frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big)^{k-2}\frac{\partial\overset{(n-k)}{u}}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}\chi)\Big]\Big\}\zeta, \quad n \geqslant 2.$$

Интегралы в (58) определены корректно в силу того, что χ дважды дифференцируема, а также в силу гладкости f и того, что $\nabla\chi \equiv 0$ в окрестности вершины трещины $B_{\delta/2}$, где не определены вторые производные решений $u^0, \dot{u}(\boldsymbol{\tau}\chi), \ldots$. Суммируя представления (51) и (57), умноженные на $\varepsilon^n/n!$, по n, в силу теоремы 2 из (21) получаем представление отображенного решения возмущенной задачи (6) в виде

$$u^\varepsilon \circ \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon = K^\varepsilon \chi(r)\sqrt{r}\sin(\varphi/2) + w^\varepsilon, \qquad w^\varepsilon \in H^2(\Omega_0) \tag{59}$$

с коэффициентом

$$K^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} K^{(n)}, \qquad K^{(0)} = K(0). \tag{60}$$

В то же время u^ε как решение задачи (6) в Ω_ε также представляется в виде суммы

$$u^\varepsilon = K(\varepsilon)\chi(r_y)\sqrt{r_y}\sin(\varphi_y/2) + W^\varepsilon, \qquad W^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon), \tag{61}$$

где полярные координаты r_y, φ_y определены в окрестности вершины $\boldsymbol{C}^\varepsilon = ((L+\varepsilon)\tau_1, (L+\varepsilon)\tau_2)$ возмущенной трещины Γ_ε, т. е. $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\tau} - (L+\varepsilon) = r_y\cos\varphi_y$, $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\nu} = r_y\sin\varphi_y$, $|\varphi_y| \leqslant \pi$. Применяя преобразование $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{\tau}\chi(r)$, в окрестности $\mathcal{O}$, где $\chi \equiv 1$, получаем $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau} - L = r_y(x)\cos\varphi_y(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu} = r_y(x)\sin\varphi_y(\boldsymbol{x})$, откуда следует $r_y(\boldsymbol{x}) = r$, $\varphi_y(\boldsymbol{x}) = \varphi$ в $\mathcal{O}$. Поэтому из (61) вытекает локальное представление $u^\varepsilon\circ\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon = K(\varepsilon)\sqrt{r}\sin(\varphi/2) + W^\varepsilon(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{\tau})$ в $\mathcal{O}$. Сравнивая это представление с (59), получаем $K(\varepsilon) = K^\varepsilon$ в силу единственности решения u^ε. Таким образом, доказана

Теорема 5. *При условии справедливости представления* (51) *решения задачи* (1) *и аналогичного представления* (61) *решения возмущенной задачи* (6) КИН *допускает асимптотическое разложение* (60) *с производными, которые могут быть определены из соотношений* (56), (58) *для* $\chi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$.

2.3. Возмущение локального растяжения. В случае прямолинейной трещины Γ_0 длиной L с вершинами $\boldsymbol{O} = (0,0)$ и $\boldsymbol{C} = (L\tau_1, L\tau_2)$ рассмотрим возмущение локального растяжения с $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{x}\chi/L$, которое отображает Γ_0 на трещину Γ_ε длиной $L+\varepsilon$, как и сдвиг $\boldsymbol{\tau}\chi$ (см. п. **2.1**). Тогда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} = \operatorname{div}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{L}\,\chi\Big), \qquad \Big|\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{x}}\Big| = \frac{1}{2}\operatorname{div}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{L^2}\,\chi^2\Big).$$

Соответствующие растяжению глобальные производные $\overset{(n)}{u}(\boldsymbol{x}\chi/L) \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$, $n = 1, 2, \ldots$ находим как решения задач (22)–(24), а производные функции энергии $\mathcal{P}_0^{(n)}(\boldsymbol{x}\chi/L)$, $n = 1, 2, \ldots$ вычисляем по формулам (39)–(41) с $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{x}\chi/L$. При этом в силу леммы 1

$$\mathcal{P}_0^{(n)}(\boldsymbol{x}\chi/L) = \mathcal{P}_0^{(n)}(\boldsymbol{\tau}\chi), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{62}$$

Построим соответствующий возмущению $\boldsymbol{x}\chi/L$ инвариантный интеграл. Предположим, что $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = 0$ и $f \equiv 0$ в $\mathcal{O}$, где $\chi \equiv 1$. В $\mathcal{O}$ имеем

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{L}\Big) - \Big(\boldsymbol{q} : \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{L}\Big)\Big)\cdot\boldsymbol{q} = 0$$

для любого вектора $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$. Кроме того, χ — финитная функция в окрестности вершины трещины. Таким образом, согласно лемме 3 справедливо представление первой производной $\mathcal{P}_0'(\boldsymbol{x}\chi/L)$ в виде интеграла (44) по контуру, состоящему из $\partial\mathcal{O}$ и внутренней части трещины $\Theta = \Gamma_0 \cap (\operatorname{supp}\chi \setminus \mathcal{O})$. Подынтегральная функция на этой части трещины будет ограниченной в силу дополнительной локальной гладкости решения u^0 вне вершины трещины. В то же время в силу леммы 1 производная не зависит от срезающей функции χ, а значит, можно перейти к пределу при $\operatorname{meas}\Theta \to 0$ и получить

$$I\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{L}\,\chi\Big) = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{L}\cdot\boldsymbol{\theta}\Big)|\nabla u^0|^2 - \Big(\frac{\boldsymbol{x}}{L}\cdot\nabla u^0\Big)\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Big]. \tag{63}$$

Более того, в силу (62) имеем $I(\boldsymbol{x}\chi/L) = I(\boldsymbol{\tau}\chi)$.

2.4. Ветвящаяся трещина. Пусть ветвящаяся трещина Γ_0 состоит из N прямолинейных отрезков длиной $L_i > 0$, $i = 1,\dots,N$, которые пересекаются под ненулевым углом в вершине $\boldsymbol{O} = (0,0)$. Обозначим через $\boldsymbol{\tau}^i = (\tau_1^i, \tau_2^i)$ направляющие касательные векторы, через $\boldsymbol{C}^i = (L_i\tau_1^i, L_i\tau_2^i)$ $(i = 1,\dots,N)$ — вершины прямолинейных отрезков. Выберем финитные срезающие функции $\chi_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ с непересекающимися носителями вблизи соответствующих вершин $\boldsymbol{C}^i$, $i = 1,\dots,N$. Рассмотрим возмущение трещины в виде линейной комбинации $\boldsymbol{\Phi} = \sum\limits_{i=1}^N a_i\boldsymbol{\tau}^i\chi_i$ с некоторыми константами a_i, $i = 1,\dots,N$, которые заранее неизвестны. Тогда координатное преобразование (5) с малым параметром ε отобразит Γ_0 на ветвящуюся трещину Γ_ε, состоящую из N прямолинейных отрезков длиной $L_i + \varepsilon a_i$, $i = 1,\dots,N$. Соответствующая функция потенциальной энергии допускает асимптотическое разложение (34) по ε:

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \mathcal{P}(0) + \varepsilon\mathcal{P}_0'(\boldsymbol{\Phi}) + \varepsilon^2\mathcal{P}_0''(\boldsymbol{\Phi})/2 + o(\varepsilon^2). \tag{64}$$

Предположим, что $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = \partial^2 f/\partial\varepsilon^2\big|_{\varepsilon=0} = 0$, тогда согласно лемме 2 имеем представление первой производной потенциальной энергии $\mathcal{P}_0'(\boldsymbol{\Phi})$ в виде линейного непрерывного по $\boldsymbol{\Phi}$ функционала $\mathcal{L}_1(\boldsymbol{\Phi})$ из (42), и в этом случае $\mathcal{L}_1(\boldsymbol{\Phi}) = \sum\limits_{i=1}^N a_i\mathcal{L}_1(\boldsymbol{\tau}^i\chi_i)$, где

$$\mathcal{L}_1(\boldsymbol{\tau}^i\chi_i) = \int\limits_{\Omega_0}\Big(-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}^i}\,(\chi_i f(0))u^0 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\chi_i}{\partial\boldsymbol{\tau}^i}\,|\nabla u^0|^2 - \frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\tau}^i}\,\nabla\chi_i\cdot\nabla u^0\Big), \quad i = 1,\dots,N.$$

Аналогично получаем вторую производную $\mathcal{P}_0''(\boldsymbol{\Phi})$ как квадратичный функционал $\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi})$ (см. (43)), который для ветвящейся трещины запишется в виде

$$\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}) = \sum_{i,j=1}^N a_i a_j\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\tau}^i\chi_i, \boldsymbol{\tau}^j\chi_j).$$

В силу того, что носители $\operatorname{supp}\chi_i$ и $\operatorname{supp}\chi_j$ при $i \neq j$ не пересекаются, функционал $\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi})$ можно представить в виде

$$\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\tau}^i\chi_i, \boldsymbol{\tau}^j\chi_j) = \int\limits_{\Omega_0}\Big\{\Big[-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}^i}\Big(\chi_i^2\,\frac{\partial f(0)}{\partial\boldsymbol{\tau}^i}\Big)u^0 + |\nabla\chi_i|^2\Big|\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\tau}^i}\Big|^2\Big]\delta_{ij} - \nabla\dot{u}(\boldsymbol{\tau}^i\chi_i)\cdot\nabla\dot{u}(\boldsymbol{\tau}^j\chi_j)\Big\},$$

где $i,j = 1,\dots,N$; δ_{ij} — символ Кронекера. Таким образом, (64) принимает вид

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \mathcal{P}(0) + \varepsilon\sum_{i=1}^N a_i\mathcal{L}_1(\boldsymbol{\tau}^i\chi_i) + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i,j=1}^N a_i a_j\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\tau}^i\chi_i, \boldsymbol{\tau}^j\chi_j) + o(\varepsilon^2). \tag{65}$$

Определим величины $\varepsilon_i = \varepsilon a_i$ $(i = 1,\dots,N)$ — вариации длины трещины.

Для того чтобы описать рост трещины, используем энергетический критерий разрушения Гриффитса. Представим полную энергию E в виде суммы потенциальной энергии $\mathcal{P}$

и поверхностной энергии S, которая согласно гипотезе Гриффитса распределена равномерно по трещине с некоторой постоянной плотностью $\gamma > 0$:

$$S(\varepsilon) \equiv \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \gamma = S(0) + \gamma\varepsilon \sum_{i=1}^{N} a_i, \qquad S(0) \equiv \int\limits_{\Gamma_0} \gamma = \gamma \sum_{i=1}^{N} L_i. \tag{66}$$

Определим приближенную квадратичную функцию полной энергии T: $E(\varepsilon) = T(\varepsilon) + o(\varepsilon^2)$, которая согласно (65) и (66) зависит от N параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$:

$$T(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) = S(0) + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \big(\gamma + \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\tau}^i \chi_i)\big) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \varepsilon_i \varepsilon_j \mathcal{L}_2(\boldsymbol{\tau}^i \chi_i, \boldsymbol{\tau}^j \chi_j). \tag{67}$$

В соответствии с критерием Гриффитса трещина может только расти, т. е. необходимо потребовать выполнения условия $\varepsilon_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, N$. Используя метод Ньютона и минимизируя квадратичную функцию в (67) по неизвестным положительным параметрам $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$, получаем систему алгебраических вариационных неравенств

$$\varepsilon_i \geqslant 0, \quad \Big(\gamma + \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\tau}^i \chi_i) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \mathcal{L}_2(\boldsymbol{\tau}^i \chi_i, \boldsymbol{\tau}^j \chi_j)\Big)(\bar\varepsilon - \varepsilon_i) \geqslant 0 \quad \forall \bar\varepsilon \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{68}$$

описывающую локальный рост ветвящейся трещины. Если $\gamma + \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\tau}^i \chi_i) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$, то $\varepsilon_1 = 0, \ldots, \varepsilon_N = 0$ является решением (68). Следовательно, трещина стационарная. Поэтому из (68) следует условие роста трещины Γ_0: существует i такое, что $\gamma + \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\tau}^i \chi_i) < 0$. В этом случае, чтобы искать локальное приращение трещины из (68), необходимо, чтобы выполнялось условие разрешимости системы вариационных неравенств $\det\{\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\tau}^i \chi_i, \boldsymbol{\tau}^j \chi_j)\}_{i,j=1}^{n} > 0$, $n = 1, \ldots, N$. Как частный случай из (68) следует двухпараметрическая система для описания роста прямолинейной трещины (две вершины) и вариационное неравенство с одним параметром для прямолинейной трещины, одна из вершин которой выходит на внешнюю границу $\partial\Omega$.

3. РАСПОЛОЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ТЕЛЕ

3.1. Инвариантные интегралы энергии. Рассмотрим общий случай геометрии трещины Γ_0 (см. п. **1.1**). Выберем срезающую функцию $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, финитную в Ω, и положим $\eta \equiv 1$ в окрестности трещины D, т. е. $\overline{\Gamma}_0 \subset \overline{D} \subset \operatorname{supp}\eta \subset \Omega$. Предположим, что $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = 0$. Если предположить, что $f(0) \equiv 0$ в $\overline{D}$, то будет выполнено условие "б" леммы 3. Условие "а" выполнено в силу локальной гладкости u^0 вне окрестности сингулярных точек трещины (вершины, точки излома), а значит, в $\Omega \setminus D$. Рассмотрим возмущение сдвига трещины в произвольном направлении $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, т. е. $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{p}\eta$. Тогда $\partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{x} \equiv 0$ в D в силу $\eta \equiv 1$. Следовательно, выполнено условие "в". В соответствии с леммой 3, учитывая финитность η, из (44) получаем инвариантный интеграл

$$I(\boldsymbol{p}\eta) = \int\limits_{\partial D} \Big(\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\theta})|\nabla u^0|^2 - \frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{p}}\,\frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big) \tag{69}$$

по произвольному замкнутому контуру ∂D в окрестности всей трещины, где $f(0) \equiv 0$. Для возмущения растяжения трещины $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{x}\eta$ выполняется условие "в" в силу $\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} = 2$, $\boldsymbol{q} : \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}\ \ \forall \boldsymbol{q}$ в D и имеет место инвариантный интеграл

$$I(\boldsymbol{x}\eta) = \int\limits_{\partial D} \Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\theta})|\nabla u^0|^2 - (\boldsymbol{x} \cdot \nabla u^0)\frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big). \tag{70}$$

Аналогично для возмущения линеаризованного поворота трещины $\boldsymbol{\Phi} = (-x_2, x_1)\eta$ выполнено условие $\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} = 0$, $(\boldsymbol{q} : \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q} = (q_2, -q_1) \cdot (q_1, q_2) = 0 \quad \forall \boldsymbol{q}$ в D, откуда следует интеграл

$$I((-x_2, x_1)\eta) = \int\limits_{\partial D} \Big(\frac{1}{2}(x_1\theta_2 - x_2\theta_1)|\nabla u^0|^2 - (x_1 u^0_{,2} - x_2 u^0_{,1})\frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big). \tag{71}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Пусть* $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = 0$. *Для прямолинейной трещины первая производная потенциальной энергии по длине трещины представляется равными инвариантными интегралами для локального сдвига вдоль трещины* $I(\boldsymbol{\tau}\chi)$ (50) *и локального растяжения* $I(\boldsymbol{x}\chi/L)$ (63) *по любому замкнутому контуру в окрестности вершины трещины, где* $f(0) \equiv 0$. *В окрестности всей трещины, где* $f(0) \equiv 0$, *в случаях возмущений ее сдвигом в произвольном направлении, растяжением и линеаризованным поворотом справедливы инвариантные интегралы* $I(\boldsymbol{p}\eta)$, $I(\boldsymbol{x}\eta)$, $I((-x_2, x_1)\eta)$ (*см.* (69), (70), (71)) *соответственно.*

3.2. Задача оптимизации формы трещины. Рассмотрим прямолинейную трещину Γ_0 длиной L. Сформулируем линеаризованную задачу оптимизации положения трещины Γ_0 в области Ω с потенциальной энергией $\mathcal{P}$ в качестве функционала стоимости. Пусть, как и выше, η — срезающая функция, финитная в Ω, $\eta \equiv 1$ в $\overline{D}$ и $\overline{\Gamma}_0 \subset D$. Расположение трещины в D можно описать как линейную комбинацию сдвига и поворота. Вместо поворота можно использовать линеаризованный поворот и компенсировать изменение длины за счет растяжения. Таким образом, согласно теореме 6 возьмем четыре базовых возмущения трещины и рассмотрим их линейную комбинацию с неизвестными постоянными $a_1, \ldots, a_4$:

$$\boldsymbol{\Phi} = \sum_{i=1}^{4} a_i \boldsymbol{\Phi}^i, \quad \boldsymbol{\Phi}^1 = (1,0)\eta, \quad \boldsymbol{\Phi}^2 = (0,1)\eta, \quad \boldsymbol{\Phi}^3 = (-x_2, x_1)\eta, \quad \boldsymbol{\Phi}^4 = \boldsymbol{x}\eta. \tag{72}$$

При малом параметре ε используем (72) в качестве функции возмущения для линейной координатной трансформации (5) области Ω_0 с некоторой фиксированной прямолинейной трещиной Γ_0 длиной L в D. Эта трансформация переводит Γ_0 также в прямолинейную трещину Γ_ε длиной

$$|\Gamma_\varepsilon| = L\sqrt{(\varepsilon a_3)^2 + (1 + \varepsilon a_4)^2}. \tag{73}$$

Согласно теореме 4 имеем асимптотическое разложение по ε функции потенциальной энергии (64). Пусть $\partial f/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = \partial^2 f/\partial\varepsilon^2\big|_{\varepsilon=0} = 0$. Тогда в соответствии с леммой 2 в силу линейности возмущения (72) можно представить (64) в виде

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \mathcal{P}(0) + \varepsilon \sum_{i=1}^{4} a_i \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\Phi}^i) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{4} a_i a_j \mathcal{L}_2(\boldsymbol{\Phi}^i, \boldsymbol{\Phi}^j) + o(\varepsilon^2). \tag{74}$$

При этом нужно потребовать, чтобы исходная длина трещины L не менялась при любом ε, что с учетом равенства (73) приводит к следующему условию:

$$\varepsilon a_4 = \sqrt{1 - (\varepsilon a_3)^2} - 1 = -(\varepsilon a_3)^2/2 + o(\varepsilon^2). \tag{75}$$

Подставим (75) в (74) и отбросим слагаемые порядка $o(\varepsilon^2)$. В результате получим квадратичное по ε приближение P энергии $\mathcal{P}$, которое является функцией трех параметров $\varepsilon_i = \varepsilon a_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathcal{P}(0) + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\Phi}^i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_i \varepsilon_j \mathcal{L}_2(\boldsymbol{\Phi}^i, \boldsymbol{\Phi}^j) - \frac{\varepsilon_3^2}{2}\, \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\Phi}^4). \tag{76}$$

Согласно общему вариационному принципу для нахождения оптимального расположения трещины в теле можно минимизировать приближенную функцию потенциальной энергии (76) по $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3$. В результате минимизации получаем систему трех линейных уравнений для нахождения неизвестных параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{\Phi}^i) + \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j \mathcal{L}_2(\mathbf{\Phi}^i, \mathbf{\Phi}^j) - \delta_{i3}\varepsilon_3\, \mathcal{L}_1(\mathbf{\Phi}^4) = 0, \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{77}$$

Неравенство $\det\{\mathcal{L}_2(\mathbf{\Phi}^i, \mathbf{\Phi}^j) - \delta_{i3}\mathcal{L}_1(\mathbf{\Phi}^4)\}_{i,j=1}^n > 0$, $n = 1, 2, 3$ является условием разрешимости системы (77). Соотношения (77) являются линеаризованной моделью, которая справедлива только при малых значениях ε_1, ε_2, ε_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
2. **Mazja W. G., Nazarow S. A., Plamenewski B. A.** Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akad. Verlag, 1991.
3. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
4. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
5. **Соколовский Я., Хлуднев А. М.** О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 6. С. 776–779.
6. **Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
7. **Bach M., Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Derivatives of the energy functional for 2D-problems with a crack under Signorini and friction conditions // Math. Methods Appl. Sci. 2000. V. 23, N 6. P. 515–534.
8. **Sokolowski J., Zolesio J.-P.** Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 1992.
9. **Simon J.** Differentiation with respect to the domain in boundary value problems // Numer. Funct. Anal. Optim. 1980. V. 2. P. 649–687.
10. **Черепанов Г. П.** О распространении трещин в сплошной среде // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 3. С. 476–488.
11. **Rice J. R.** A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1968. V. 35, N 2. P. 379–386.
12. **Knowles J. K., Sternberg E.** On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 44, N 3. P. 187–211.
13. **Назаров С. А.** Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. М.: Б. и., 1990. С. 17–31.
14. **Bach M., Kovtunenko V. A., Sukhorukov I. V.** Numerical validation of the shape optimization approach to quasi-static crack propagation: Bericht / Stuttgart Univ. SFB404. N 29. Stuttgart, 2000.
15. **Grisvard P.** Singularities in boundary value problems. Masson: Springer Verlag, 1991.

Поступила в редакцию 18/II 2002 г.