гивающее напряжение $\sigma^R_{1,2} = \sigma^{ITRT}_{1221}$ (см. табл. 4). По сравнению с однородной пластиной с $Z = Z_1$, в которой импульс растяжения с $\sigma^{IIR}_{11} = -\sigma^I_1$ формируется у правой свободной поверхности пластины, в двухслойной пластине импульс растяжения с $\sigma^{\Sigma R}_1$ формируется в первом слое близ контактной поверхности K_1, и здесь же возможно образование откольного разрушения. Это важное обстоятельство дает возможность применять защитные слои не только с тыльной стороны нагружаемого образца [13], но и со стороны нагружения, при этом передний буферный слой должен иметь большую жесткость. Этот вывод соответствует данным, полученным в [1], при рассмотрении влияния расположения жесткой и мягкой прокладок на разрушение мишени. Отметим здесь также очень интересный экспериментальный факт разрушения близ контактной поверхности для контейнера из двух пластин из одинакового материала равной толщины, который приведен и обсуждается в [14]. Полное восстановление импульса растяжения с $\sigma^{\Sigma R}_1 = -\sigma^I_1$ в первом слое возможно только для двухслойной пластины; пользуясь соотношениями (2.7)—(2.11) и схемой формирования волн напряжений (см. фиг. 3), нетрудно найти $\sigma^{\Sigma R}_1$ для многослойной пластины при $n > 2$.

Акустический анализ, приведенный в данной работе, удобен (ввиду его достаточной простоты) для понимания и оперативного прогнозирования формирующейся волновой картины при ударном или взрывном нагружении многослойных пластин. Для более полного описания волновых процессов, происходящих в слоистых средах, необходимо привлекать упругопластические модели с использованием уравнений состояния материалов слоев, справедливых в широком диапазоне интенсивности ударных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Качан М. С., Тришин Ю. А.** Растягивающие напряжения в мишени при соударении твердых тел.— ПМТФ, 1977, № 4.
2. **Качан М. С., Киселев Ю. В., Тришин Ю. А.** Взаимодействие ударных волн с контактной границей соударяющихся тел.— ФГВ, 1975, № 5.
3. **Лаптев В. И., Тришин Ю. А.** Увеличение начальной скорости и давления при ударе по неоднородной преграде.— ПМТФ, 1974, № 6.
4. **Забабахин Е. И.** Ударные волны в слоистых системах.— ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 2.
5. **Козырев А. С., Костылева В. Е., Рязанов В. Т.** Кумуляция ударных волн в слоистых средах.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 2.
6. **Нестеренко В. Ф., Фомин В. М., Ческидов П. А.** Затухание сильных ударных волн в слоистых материалах.— ПМТФ, 1983, № 4.
7. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
8. **Ахмадеев Н. Х., Нигматулин Р. И.** Моделирование откольного разрушения при ударном деформировании. Анализ схемы мгновенного откола.— ПМТФ, 1981, № 3.
9. **Ахмадеев Н. Х.** Исследование откольного разрушения при ударном деформировании. Модель повреждаемой среды.— ПМТФ, 1983, № 4.
10. **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.
11. **Балчан, Коуэн.** Метод разгона плоских пластин до большой скорости.— Приб. для науч. исследований, 1964, № 8.
12. **Энфинсен.** Оптимальное проектирование многослойных конструкций.— ПМ, 1967, № 3.
13. **Высокоскоростные** ударные явления. М.: Мир, 1973.
14. **Дерибас А. А., Захаренко И. Д. и др.** Плоское соударение металлических пластин равной толщины.— ФГВ, 1983, № 5.

Поступила 7/XII 1983 г.

УДК 624.073

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ

В. И. АВИЛКИН, Е. В. КОВАЛЕНКО

(Москва)

Приведен асимптотический анализ плоской контактной задачи теории упругости для двухслойного основания, позволяющий выбирать ту или иную модель верхнего, относительно тонкого слоя (покрытия), в зависимости от соотношения физико-механических и геометрических величин покрытия и ложемента (упругая полуплоскость).

1. Рассмотрим упругую полуплоскость ($y \leqslant 0$) с коэффициентом Пуассона ν_2 и модулем сдвига G_2. Предположим, что на поверхности полуплоскости лежит относительно тонкий* слой $0 \leqslant y \leqslant h$ (ν_1, G_1), жестко соединенный с нею. Пусть в верхнюю

* Слой будем называть тонким, если безразмерный параметр $\lambda = ha^{-1} \ll 1$, где $2a$ — участок загружения полосы.

границу такой составной среды вдавливается без трения силой P жесткий штамп, форма основания которого описывается четной по x функцией $f(x)$. Граничные условия поставленной задачи запишутся в виде (слою соответствует индекс 1, полуплоскости — 2):

$$y = h: \ v^{(1)} = v_+(x) = -\delta + f(x), \quad \sigma_y^{(1)} = -\sigma_+(x) \quad (|x| \leqslant a), \tag{1.1}$$

$$\sigma_y^{(1)} = 0 \quad (|x| > a), \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_+(x) = 0 \quad (|x| < \infty);$$

$$y = 0: \ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad v^{(1)} = v_-(x) = v^{(2)}, \quad u^{(1)} = u_-(x) = u^{(2)}.$$

Напряжения и деформации на бесконечности исчезают. Здесь δ — жесткое перемещение штампа под действием приложенной к нему силы P; $\sigma_\pm(x)$, $\tau_\pm(x)$ — нормальные и касательные усилия на верхней (знак плюс) и нижней (знак минус) гранях слоя соответственно; $v_\pm$, $u_\pm$ — вертикальные и горизонтальные перемещения граней слоя.

Методами интегральных преобразований [1] поставленная задача сводится к определению контактных давлений $\sigma_+(x)$ из интегрального уравнения первого рода типа свертки на конечном интервале [2]:

$$\int_{-a}^{a} \sigma_+(\xi)\, d\xi \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{L(\alpha)}{|\alpha|} \exp\left[-i\frac{\alpha}{h}(\xi - x)\right] d\alpha = 2\pi\theta_1 [\delta - f(x)] \quad (|x| \leqslant a); \tag{1.2}$$

$$L(u) = \frac{M + 4|u|\,e^{-2|u|} - Ne^{-4|u|}}{M - (1 + 4u^2 + NM)\,e^{-2|u|} + Ne^{-4|u|}}, \tag{1.3}$$

$$\mu_i = 1 - \nu_i, \quad \varkappa_i = 3 - 4\nu_i, \quad \theta_i = G_i\mu_i^{-1} \quad (i = 1, 2), \quad n = \theta_1\theta_2^{-1},$$

$$M = (n\mu_1 + \mu_2\varkappa_1)(n\mu_1 - \mu_2)^{-1}, \quad N = (n\mu_1\varkappa_2 - \mu_2\varkappa_1)(n\mu_1\varkappa_2 + \mu_2)^{-1}.$$

С учетом обозначений

$$u = \alpha h, \quad x = x'a, \quad \xi = \xi'a, \quad \lambda = ha^{-1}, \tag{1.4}$$

$$\sigma_+(x)\,\theta_1^{-1} = q(x'), \quad \delta = \Delta a, \quad f(x) = r(x')\,a$$

представим уравнение (1.2) в форме (штрихи опущены)

$$\int_{-1}^{1} q(\xi)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = 2\pi[\Delta - r(x)] \quad (|x| \leqslant 1), \tag{1.5}$$

$$k(z) = \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{L(u)}{|u|} e^{-iuz} du \quad \left(z = \frac{\xi - x}{\lambda}\right).$$

Здесь функция $L(u)$ непрерывна, вещественна и четна на действительной оси, а также

$$L(t) = 1 + O(e^{-2|t|}) \ (t \to \infty), \quad L(t) = n + A|t| + O(t^2) \ (t \to 0),$$

$$A = -\frac{(1 - 2\nu_2)^2}{2\mu_2^2}\left[n^2 + 2n\frac{\nu_1\mu_2}{\mu_1(1 - 2\nu_2)} - \frac{(1 - 2\nu_1)^2\mu_2^2}{(1 - 2\nu_2)^2\mu_1^2}\right], \quad u = t + i\tau.$$

Будем описывать физико-механические свойства тонкого слоя при помощи уточненных уравнений пластинок. Для их вывода воспользуемся решением первой краевой задачи теории упругости для полосы, т. е. найдем решение уравнений теории упругости в перемещениях (уравнений Ламэ) при следующих краевых условиях на ее гранях:

$$y = h: \ \sigma_y^{(1)} = \sigma_+(x), \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_+(x); \qquad y = 0: \ \sigma_y^{(1)} = \sigma_-(x), \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_-(x).$$

Применяя, как и выше, интегральное преобразование Фурье по x, получим

$$u_x'(x, y) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [c_1(\alpha)\,\mathrm{ch}\,\alpha y + c_2(\alpha)\,\alpha y\,\mathrm{sh}\,\alpha y + d_1(\alpha)\,\mathrm{sh}\,\alpha y + \tag{1.6}$$

$$+ d_2(\alpha)\,\alpha y\,\mathrm{ch}\,\alpha y]\,\alpha e^{-i\alpha x} d\alpha;$$

$$v_x''(x, y) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{[d_1(\alpha) - \varkappa_1 d_2(\alpha)]\,\mathrm{ch}\,\alpha y + d_2(\alpha)\,\alpha y\,\mathrm{sh}\,\alpha y + \tag{1.7}$$

$$+ [c_1(\alpha) - \varkappa_1 c_2(\alpha)]\,\mathrm{sh}\,\alpha y + c_2(\alpha)\,\alpha y\,\mathrm{ch}\,\alpha y\}\,\alpha^2 e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$c_j(\alpha) = [2iG_1\alpha D_+(\alpha)]^{-1}\{[\Sigma_+(\alpha) + \Sigma_-(\alpha)]\, S_j(\alpha) + i\,[T_+(\alpha) - T_-(\alpha)]\, C_j(\alpha)\},$$

$$d_j(\alpha) = [2iG_1\alpha D_-(\alpha)]^{-1}\{[\Sigma_+(\alpha) - \Sigma_-(\alpha)]\, S_j^*(\alpha) + i\,[T_+(\alpha) + T_-(\alpha)]\, C_j^*(\alpha)\},$$

$$D_\pm(\alpha) = \operatorname{sh}\alpha h \pm \alpha h, \quad S_1(\alpha) = (\alpha h/2)\operatorname{ch}(\alpha h/2) - (1 - 2\nu_1)\operatorname{sh}(\alpha h/2),$$

$$S_2(\alpha) = -\operatorname{sh}(\alpha h/2), \quad C_1(\alpha) = 2\mu_1\operatorname{ch}(\alpha h/2) - (\alpha h/2)\operatorname{sh}(\alpha h/2),$$

$$C_2(\alpha) = \operatorname{ch}(\alpha h/2), \quad S_1^*(\alpha) = (\alpha h/2)\operatorname{sh}(\alpha h/2) - (1 - 2\nu_1)\operatorname{ch}(\alpha h/2),$$

$$S_2^*(\alpha) = -\operatorname{ch}(\alpha h/2), \quad C_1^*(\alpha) = 2\mu_1\operatorname{sh}(\alpha h/2) - (\alpha h/2)\operatorname{ch}(\alpha h/2), \quad C_2^*(\alpha) = \operatorname{sh}(\alpha h/2).$$

Здесь $\Sigma_+(\alpha)$ и $T_+(\alpha)$ — соответственно трансформанты Фурье функций $\sigma_\pm(x)$ и $\tau_+(x)$.

При $\lambda \to 0$, упрощая выражения (1.6), (1.7), записанные в символах образов Фурье, и возвращаясь затем к оригиналам, с учетом того, что в контактных задачах $u \sim \tau h$, $v \sim \sigma h$ (см., например, вырожденные решения для слоя малой толщины [1]), запишем

$$G_1 h^2 u''_\pm = -\nu_1\frac{h^2}{4}\left(\sigma''_+ + \sigma''_-\right) - \mu_1\frac{h}{2}\left[\tau'_+ - \tau'_- - \frac{3h^2}{10}\left(\tau'''_+ - \tau'''_-\right)\right] \mp \tag{1.8}$$

$$+ 3\mu_1(\sigma_+ - \sigma_-) \pm (2 - 3\nu_1)\frac{h^2}{4}\left(\sigma''_+ - \sigma''_-\right) \mp 3\mu_1\frac{h}{2}\left[\tau'_+ + \tau'_- - \frac{h^2}{6}\left(\tau'''_+ + \tau'''_-\right)\right];$$

$$G_1 h^3 v^{(4)}_\pm = 6\mu_1\left[\sigma_+ - \sigma_- - \frac{h^2}{3}\left(\sigma''_+ - \sigma''_-\right) + \frac{11h^4}{240}\left(\sigma^{(4)}_+ - \sigma^{(4)}_-\right)\right] + \tag{1.9}$$

$$+ 3\mu_1 h\left(\tau'_+ + \tau'_-\right) - (2 - 3\nu_1)\frac{h^3}{4}\left(\tau'''_+ + \tau'''_-\right) \pm \mu_1\frac{h^4}{8}\left(\sigma^{(4)}_+ + \sigma^{(4)}_-\right) \pm \nu_1\frac{h^3}{4}\left(\tau'''_+ - \tau'''_-\right).$$

Заметим, что уравнения (1.8), (1.9) позволяют учесть как деформации продольного растяжения и поперечного изгиба, так и деформации продольного сдвига и поперечного сжатия упругого покрытия (пластинки). Кроме того, использование уравнений (1.8), (1.9) при решении контактных задач не приводит, как и при использовании уравнений теории упругости, а также уравнений (1.10), (1.11), к появлению на границах сопряжения участков сосредоточенных усилий. Этот недостаток, как известно [3—6], присущ дифференциальным уравнениям изгиба тонкостенных упругих элементов, полученных на основе гипотез Кирхгофа — Лява, Рейсснера либо их модификаций.

Если при выводе уравнений (1.8), (1.9) в силу малости параметра $\lambda = ha^{-1}$ провести усреднение перемещений по толщине, то придем к следующим упрощенным уравнениям деформирования пластинок:

$$4G_1 h u''_* = -2\mu_1(\tau_+ - \tau_-) - \nu_1 h\left(\sigma'_+ + \sigma'_-\right) + (1 - 2\nu_1)\left(h^2/6\right)\left(\tau''_+ - \tau''_-\right); \tag{1.10}$$

$$4G_1 h^3 v^{(4)}_* = 12\mu_1 h\left(\tau'_+ + \tau'_-\right) - \mu_1 h^3\left(\tau'''_+ + \tau'''_-\right) + 24\mu_1(\sigma_+ - \sigma_-) - \tag{1.11}$$

$$- 2(3 - 2\nu_1)h^2\left(\sigma''_+ - \sigma''_-\right) + (3 - 2\nu_1)\left(h^4/10\right)\left(\sigma^{(4)}_+ - \sigma^{(4)}_-\right),$$

которые в отличие от (1.8), (1.9) учитывают лишь деформации продольного растяжения и поперечного изгиба последних *.

2. Рассмотрим поставленную в п. 1 задачу, используя различные варианты механических моделей упругого слоя. Предположим, что напряженно-деформированное состояние его характеризуется уравнениями (1.8), (1.9). Применяя преобразование Фурье по координате x к уравнениям Ламэ, при помощи которых описывается деформация упругой полуплоскости, и к уравнениям (1.8), (1.9), с учетом условий (1.1) и обозначений (1.4) получим интегральное уравнение вида (1.5) относительно неизвестных под штампом контактных давлений, где

$$L(u) = \left[n + \sum_{k=1}^{5} a_{k1}|u|^k\right]\left[1 + \sum_{k=1}^{4} b_{k1}|u|^l\right]^{-1},$$

$$a_{11} = (1 - 2\nu_1)\left(2\mu_1^2\right)^{-1} - n\nu_1(1 - 2\nu_2)(\mu_1\mu_2)^{-1} + n^2\varkappa_2\left(2\mu_2^2\right)^{-1}, \quad a_{21} = 32n/15,$$

$$a_{31} = \left(34 - 53\nu_1 + 9\nu_1^2\right)\left(60\mu_1^2\right)^{-1} + n(3 - 7\nu_1)(1 - 2\nu_2)(12\mu_1\mu_2)^{-1} + n^2\varkappa_2\left(6\mu_2^2\right)^{-1},$$

$$a_{41} = 47n/60, \quad a_{51} = \left(22 - 39\nu_1 + 13\nu_1^2\right)\left(120\mu_1^2\right)^{-1} + n(5 - 13\nu_1)(1 - 2\nu_2) \times$$

$$\times (120\mu_1\mu_2)^{-1} + n^2\varkappa_2\left(30\mu_2^2\right)^{-1}, \quad b_{11} = 2n,$$

$$b_{21} = (17 - 2\nu_1)(15\mu_1)^{-1} + n(1 - 2\nu_2)\mu_2^{-1}, \quad b_{31} = 4n/3,$$

$$b_{41} = \left(27 - 44\nu_1 + 12\nu_1^2\right)\left(60\mu_1^2\right)^{-1} + n(1 - 2\nu_1)(1 - 2\nu_2)(6\mu_1\mu_2)^{-1} + n^2\varkappa_2\left(12\mu_2^2\right)^{-1}.$$

---

* Уравнения (1.8)—(1.11) получены совместно с В. М. Александровым.

Возьмем теперь в качестве механической модели покрытия дифференциальное уравнение изгиба пластинки типа Рейсснера [3], которое получается из (1.11), если пренебречь в его правой части третьим слагаемым:

$$G_1 h^3 v_*^{(4)} = 6\mu_1 (\sigma_+ - \sigma_-) + 3\mu_1 h\tau'_- - \frac{3-2\nu_1}{2} h^2 \left(\sigma''_+ - \sigma''_-\right) - \mu_1 \frac{h^3}{4} \tau'''_-. \tag{2.1}$$

Кроме того, считаем, что горизонтальные перемещения в тонком слое описываются уравнением одноосного растяжения накладки, т. е. дифференциальным уравнением (1.10), в котором исключено из его правой части слагаемое порядка λ^2:

$$4G_1 h u''_* = 2\mu_1 \tau_- - \nu_1 h \left(\sigma'_+ + \sigma'_-\right). \tag{2.2}$$

В (2.1), (2.2) учтено, что $\tau_+ = 0$. Полагая в (1.1)

$$v_+ = v_- = v_*, \quad u_+ = u_- = u_*, \tag{2.3}$$

придем к интегральному уравнению (1.5), причем

$$L(u) = \left[n + \sum_{k=1}^{4} a_{k2} |u|^k\right] \left[1 + \sum_{k=1}^{4} b_{k2} |u|^k\right]^{-1},$$

$$a_{12} = n^2 \varkappa_2 \left(2\mu_2^2\right)^{-1} - n(1-2\nu_2)\nu_1 (2\mu_1\mu_2)^{-1}, \quad a_{22} = n(3-5\nu_1)(12\mu_1)^{-1},$$

$$a_{32} = n(3-2\nu_1)(24\mu_1\mu_2)^{-1}\left[n\varkappa_2\mu_2^{-1} - (1-2\nu_2)\nu_1\mu_1^{-1}\right], \quad a_{42} = -n\nu_1 (8\mu_1)^{-1},$$

$$b_{12} = 2n, \quad b_{22} = (3+\nu_1)(12\mu_1)^{-1} + n(1-2\nu_2)(2\mu_2)^{-1}, \quad b_{32} = n(4-3\nu_1)(6\mu_1)^{-1},$$

$$b_{42} = n^2\varkappa_2\left(12\mu_2^2\right)^{-1} + n(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)(24\mu_1\mu_2)^{-1} + \nu_1 (48\mu_1)^{-1}.$$

Пусть, далее, физико-механические свойства покрытия описываются уравнениями пластинки Кирхгофа — Лява [3], получаемыми из (1.11) отбрасыванием в его правой части слагаемых порядка λ^2 и выше:

$$G_1 h^3 v_*^{(4)} = 6\mu_1 (\sigma_+ - \sigma_-) + 3\mu_1 h \tau'_-$$

и накладки (2.2). В согласии с (1.1), (2.3) задача приводится к нахождению неизвестных под штампом контактных давлений из интегрального уравнения (1.5), причем

$$L(u) = \left[n + \sum_{k=1}^{2} a_{k3} |u|^k\right] \left[1 + \sum_{k=1}^{4} b_{k3} |u|^k\right]^{-1}, \tag{2.4}$$

$$a_{13} = n^2\varkappa_2\left(2\mu_2^2\right)^{-1}, \quad a_{23} = -n\nu_1 (8\mu_1)^{-1}, \quad b_{13} = 2n,$$

$$b_{23} = n(1-2\nu_1)(2\mu_2)^{-1} + \nu_1 (4\mu_1)^{-1}, \quad b_{33} = n/6,$$

$$b_{43} = n^2\varkappa_2\left(12\mu_2^2\right)^{-1} - n(1-2\nu_2)\nu_1 (24\mu_2)^{-1}.$$

Рассмотрим еще следующий упрощенный вариант уравнений (1.10), (1.11). Пренебрегая в них членами порядка λ^2 и выше, получим

$$4G_1 h u''_* = 2\mu_1 \tau_- - \nu_1 h \left(\sigma'_+ + \sigma'_-\right), \quad \sigma_+ = \sigma_- - (1/2) h \tau'_-.$$

Аналогично изложенному ранее приходим к интегральному уравнению вида (1.5), где

$$L(u) = \left[n + \sum_{k=1}^{2} a_{k4} |u|^k\right] \left[1 + \sum_{k=1}^{2} b_{k4} |u|^k\right]^{-1}, \tag{2.5}$$

$$a_{14} = n(2\mu_2)^{-1}\left[n\varkappa_2\mu_2^{-1} - (1-2\nu_2)\nu_1\mu_1^{-1}\right], \quad a_{24} = n^2(1-2\nu_2)(2\mu_2)^{-1} + n\nu_1 (4\mu_1)^{-1},$$

$$b_{14} = 2n, \quad b_{24} = n(1-2\nu_2)(2\mu_2)^{-1} + \nu_1 (4\mu_1)^{-1}.$$

Пусть слой, напряженно-деформированное состояние которого описывается уравнениями (1.8), (1.9), лежит на жестком основании, т. е. в (1.1) нужно положить

$$y = 0: \; v^{(1)} = 0, \; u^{(1)} = 0. \tag{2.6}$$

Тогда краевая задача (1.8), (1.9), (1.1), (2.6) эквивалентна, как нетрудно установить при помощи изложенного метода, интегральному уравнению (1.5), ядро которого имеет вид

$$k(z) = 2\int_0^\infty L(u) \cos uz \, du \tag{2.7}$$

$$L(u) = \sum_{k=0}^{2} a_{k5} u^{2k} \left(\sum_{k=0}^{2} b_{k5} u^{2k}\right)^{-1}, \tag{2.8}$$

$$a_{05}=\frac{1-2\nu_1}{2\mu_1^2},\quad a_{15}=\frac{34-53\nu_1+9\nu_1^2}{60\mu_1^2},\quad a_{25}=\frac{22-39\nu_1+13\nu_1^2}{120\mu_1^2},$$

$$b_{05}=1;\quad b_{15}=(17-2\nu_1)(15\mu_1)^{-1},\quad b_{25}=(27-44\nu_1+12\nu_1^2)(60\mu_1^2)^{-1}.$$

Учитывая поведение трансформанты Фурье (2.8) на бесконечности и используя свойства дельта-функции Дирака [7], уравнения (1.5), (2.7) можно записать в форме

$$n_1 q(x)+\int_{-1}^{1} q(\xi)\, l\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\,[\Delta-r(x)]\quad (|x|\leqslant 1), \tag{2.9}$$

$$l(z)=\int_0^\infty L(u)\cos uz\,du,\quad L(u)=\left(a_{06}+a_{16}u^2\right)\left(\sum_{k=0}^{2} b_{k5}u^{2k}\right)^{-1},$$

$$n_1=\pi\lambda a_{25}b_{25}^{-1},\quad a_{06}=a_{05}+a_{25}b_{25}^{-1},\quad a_{16}=a_{15}-a_{25}b_{15}b_{25}^{-1}.$$

Здесь еще следует иметь в виду, что если $\tau_+=0$, $u_-=v_-=0$, то из (1.8), (1.9) с точностью до членов $O(\lambda)$ получается уравнение основания Фусса — Винклера, описывающее деформацию поперечного сжатия покрытия:

$$2G_1\mu_1 v_+=(1-2\nu_1)h\sigma_+,\quad \sigma_+=\sigma_-. \tag{2.10}$$

Если теперь физико-механические свойства тонкого слоя характеризовать уравнениями (2.10), то поставленную в п. 1 контактную задачу для двухслойного основания можно привести методом интегрального преобразования Фурье к интегральному уравнению смешанной задачи для основания [9]

$$\lambda\frac{1-2\nu_1}{2\mu_1^2}q(x)+\frac{n}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\xi)\,[-\ln|\xi-x|+D]\,d\xi=\Delta-r(x)\quad (|x|\leqslant 1), \tag{2.11}$$

где D — произвольная постоянная. Она будет определенной, если считать полуплоскость слоем большой толщины H. Тогда $D=\ln Ha^{-1}+a_0$, где $a_0=-0{,}352$, когда слой лежит без трения на жестком основании, и $a_0=-0{,}527$, когда слой жестко защемлен по основанию ($\nu_2=0{,}3$) [1].

Наконец, в случае, когда слой (2.10) лежит на жестком основании, приходим к интегральному уравнению вида (1.5), где

$$L(u)=(1-2\nu_1)\left(2\mu_1^2\right)^{-1}|u|, \tag{2.12}$$

откуда выражение для контактных давлений будет даваться формулой

$$q(x)=2\mu_1^2\lambda^{-1}(1-2\nu_1)^{-1}[\Delta-r(x)]\quad (|x|\leqslant 1).$$

Кроме того, к полученным интегральным уравнениям контактной задачи о вдавливании штампа в составное основание (1.5), (2.9), (2.11) следует добавить условие статики, служащее для установления связи между величинами P и δ:

$$P(\theta_1 a)^{-1}=\int_{-1}^{1} q(x)\,dx.$$

Заметим, что если зона контакта штампа с покрытием a заранее неизвестна (штамп не имеет угловых точек), необходимо поставить дополнительные условия для ее определения.

Для покрытия, моделируемого пластинкой Кирхгофа — Лява, дополнительными условиями будут [8]

$$v_*''(\pm 1)=-r''(\pm 1).$$

Для остальных моделей необходимо учесть условия непрерывности напряжений $\sigma_+(x)$ при переходе через точки $x=\pm a$: $q(\pm 1)=0$.

3. Рассмотрим теперь частные случаи поставленной задачи для уравнения (1.5), считая

$$n\sim\lambda^m\quad (\lambda\to 0). \tag{3.1}$$

Здесь при $m>0$ жесткость упругой полуплоскости больше жесткости покрытия, а при $m<0$ — наоборот.

Пусть $m=0$. Подставляя (3.1) в (1.3), получим с точностью до членов порядка $O(\lambda^3)$ выражение (2.1), что соответствует случаю контактной задачи для двухслойного основания, когда физико-механические свойства покрытия описываются уравнениями (1.8), (1.9).

При $m = 1$ из выражения (1.3) с учетом (3.1) с точностью до членов порядка $O(\lambda^2)$ имеем

$$L(u) = (1 - 2\nu_1)\left(2\mu_1^2\right)^{-1} |u| + n.$$

Как видно из (2.10), покрытие в этом случае работает по типу основания Фусса — Винклера.

Для $m \geqslant 2$, отбрасывая в (1.3) члены порядка $O(\lambda^2)$, получим выражение вида (2.12), т. е. уже весь двухслойный пакет работает по типу основания Фусса — Винклера с коэффициентом постели $2G_1\mu_1h^{-1}(1 - 2\nu_1)^{-1}$.

Допустим теперь, что $m \geqslant 6$. Подставляя (3.1) в (1.3), с точностью до членов порядка $O(\lambda^3)$ приходим к контактной задаче для жестко защемленного по нижней границе слоя, физико-механические свойства которого описываются уравнениями (1.8), (1.9).

Рассмотрим далее случаи, когда жесткость покрытия больше, чем жесткость основания.

Полагая $m = -1$, согласно (3.1), (1.3), получим с точностью до членов $O(\lambda)$ выражение вида (2.5), т. е. покрытие будет работать по типу накладки. При $m \leqslant -2$, подставляя (3.1) в (1.3) и оставляя члены порядка до $O(\lambda^2)$, будем иметь

$$L(u) = n\left(1 + n\frac{\varkappa_2}{2\mu_2^2}|u|\right)\left[1 + 2n\left(|u| + \frac{1 - 2\nu_2}{2\mu_2}u^2\right) + n^2\frac{\varkappa_2}{12\mu_2^2}u^4\right]^{-1}. \tag{3.2}$$

Разложение (3.2) совпадает с точностью до членов $O(\lambda^2)$ с соответствующим выражением (2.4). Таким образом, при заданной точности физико-механические свойства покрытия можно моделировать уравнениями изгиба пластинок Кирхгофа — Лява. Аналогично, пренебрегая членами порядка $O(\lambda^2)$ при $m = -2$, $O(\lambda^3)$ при $m = -3$ и т. д., получим ядро интегрального уравнения контактной задачи о взаимодействии штампа с упругой полуплоскостью через пластинку типа Рейсснера.

Заметим, что когда физико-механические свойства покрытия описываются уравнениями (1.8), (1.9), функция (2.1) будет совпадать с разложением (1.3) при $m = -2$ с точностью до членов $O(\lambda^2)$ включительно, при $m = -3$ до $O(\lambda^3)$ и т. д.

Наконец, при $m = -7$ с точностью до членов $O(\lambda^4)$ выражение (1.3) примет вид, соответствующий задаче о взаимодействии штампа со слоем, нижняя грань которого свободна от усилий (для корректной постановки такой задачи необходимо предположить наличие соответствующей пригрузки слоя вне штампа).

Итак, в зависимости от соотношений жесткостей покрытия и основания и порядка удерживаемых в трансформантах Фурье ядра (1.3) членов по λ были получены функции $L(u)$, соответствующие контактным задачам о взаимодействии штампа с упругой полуплоскостью через: пластинку, описываемую уравнениями (1.8), (1.9); пластинку типа Рейсснера; пластинку Кирхгофа — Лява; покрытие, работающее по типу накладки; слой винклеровских пружин. Кроме того, возможен переход к предельному случаю вдавливания штампа в покрытие, подстилаемое жестким основанием.

В заключение отметим, что приведенный асимптотический анализ позволяет выбирать ту или иную модель покрытия в зависимости от соотношения физико-механических и геометрических характеристик относительно тонкого слоя и полуплоскости, что в большинстве случаев предпочтительней, чем использование уравнений теории упругости. В результате анализа видно, что уточненная модель пластинки, описываемая уравнениями (1.8), (1.9), на всем диапазоне изменения параметра m достаточно хорошо соответствует точному решению задачи.

Авторы благодарят В. М. Александрова за советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
2. **Петришин В. И., Приварников А. К., Шевляков Ю. А.** К решению задач для многослойных оснований.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2.
3. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1966.
4. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Движение штампа по границе упругой полуплоскости с тонким усиливающим покрытием.— В кн.: Механика сплошной среды. Ростов н/Д: Ростов. ун-т, 1981.
5. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Движение штампа по поверхности тонкого покрытия, лежащего на гидравлическом основании.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4.
6. **Попов Г. Я., Толкачев В. М.** Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами.— МТТ, 1980, № 4.
7. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
8. **Александров В. М.** Некоторые контактные задачи для балок, пластин и оболочек.— Инж. журн., 1965, т. 5, вып. 4.
9. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1949.

Поступила 19/V 1983 г.