УДК 539.37

ОБРАТНАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИН

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуется обратная упругопластическая задача об определении в пластине остаточных напряжений, зоны пластичности и внешних воздействий по известным остаточным прогибам после снятия этих воздействий и упругой разгрузки. В предположении справедливости деформационной теории пластичности (на активном участке деформирования) доказана теорема единственности решения. Предложен итерационный метод решения, дана вариационная формулировка задачи. Рассмотрены некоторые простые примеры.

В отличие от аналогичных задач для вязкоупругопластических пластин [1–3] в обратной упругопластической задаче неупругие деформации являются мгновенными пластическими (вязкие составляющие, развивающиеся во времени, отсутствуют) и зона неупругого деформирования (зона пластичности), вообще говоря, не совпадает с областью, занятой пластиной.

1. Постановка задачи. Предположим, что достаточно толстая предварительно недеформированная пластина после приложения и снятия неизвестных внешних воздействий получила остаточные прогибы $\tilde{w} = \tilde{w}(x_1, x_2)$, малые по сравнению с ее толщиной $h = h(x_1, x_2)$. В своей срединной плоскости Ox_1x_2 пластина занимает область S, ограниченную контуром γ, ось z перпендикулярна этой плоскости. Поскольку $|\tilde{w}| \ll h$, остаточные деформации $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ известны [1–3]:

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = -z\tilde{w}_{,kl}, \qquad |z| \leqslant h/2, \tag{1.1}$$

причем [1–3] при $\rho_{kl}\rho_{kl} \neq 0$

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = a_{klmn}\rho_{mn} + \varepsilon^p_{kl}, \qquad a_{klmn}\rho_{kl}\rho_{mn} > 0, \tag{1.2}$$

где a_{klmn}, ρ_{kl}, ε^p_{kl} — компоненты тензоров упругих податливостей, остаточных напряжений и пластических деформаций; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2; здесь и ниже $k, l = 1, 2$.

Напряжения σ_{kl} до разгрузки представим в виде [1–3]

$$\sigma_{kl} = \sigma^e_{kl} + \rho_{kl}, \qquad \sigma^e_{kl} = -zb_{klmn}w^e_{,mn}, \tag{1.3}$$

где σ^e_{kl} и w^e — упругие напряжения и прогиб, являющиеся решением чисто упругой задачи с теми же внешними нагрузками $q = q(x_1, x_2)$ (перед их снятием) и соответствующими граничными условиями; b_{klmn} — компоненты тензора, обратного a_{klmn}. При этом для прогиба w и деформаций ε_{kl} перед разгрузкой имеем

$$w = w^e + \tilde{w}, \qquad \varepsilon_{kl} = -zw_{,kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon^p_{kl}, \tag{1.4}$$

а уравнения равновесия принимают вид

$$Q_k = M_{kl,l}, \qquad Q_{k,k} = -q, \qquad Q_k = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3k}\, dz, \qquad M_{kl} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} z\, dz. \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01645).

Для любых полей ε_{kl} и w, связанных равенствами вида (1.1), и σ_{kl} из (1.5) имеет место уравнение виртуальных работ [1–3]

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2}\int\limits_{S}\sigma_{kl}\varepsilon_{kl}\,dS\,dz=\int\limits_{S}qw\,dS+\int\limits_{\gamma}\Big[\Big(Q+\frac{\partial H}{\partial s}\Big)w-G\frac{\partial w}{\partial n}\Big]\,ds,$$
$$Q=Q_kn_k,\qquad H=M_{kl}n_kt_l,\qquad G=M_{kl}n_kn_l \tag{1.6}$$

(n_k и t_l — компоненты единичных векторов нормали и касательной к контуру γ, s — длина его дуги).

Предположим, что в процессе активного деформирования прогиб монотонно возрастал от нуля до искомой величины $w=w(x_1,x_2)$. Согласно деформационной теории пластичности

$$\varepsilon_{kl}^p=\begin{cases}0, & \Sigma<\sigma_T,\\ \lambda\partial\Sigma/\partial\sigma_{kl}, & \Sigma\geqslant\sigma_T,\end{cases} \tag{1.7}$$

где $\Sigma=\Sigma(\sigma_{kl})$ — однородная первой степени выпуклая функция (например, интенсивность напряжений σ_i); σ_T — предел текучести; $\lambda=\lambda(\Sigma)>0$ — заданная функция, $\lambda'(\Sigma)>0$ для упрочняющегося материала; $\lambda>0$ — неопределенный множитель для идеально пластического материала (в последнем случае вместо второго неравенства в (1.7) следует записать равенство $\Sigma=\sigma_T$).

Из (1.7) и неравенства для выпуклой функции [1]

$$\Delta\Sigma\geqslant\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma_{kl}}\Big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(2)}}\Delta\sigma_{kl}, \tag{1.8}$$

где $\Delta\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(1)}-\sigma_{kl}^{(2)}$, $\Delta\Sigma=\Sigma_1-\Sigma_2=\Sigma(\sigma_{kl}^{(1)})-\Sigma(\sigma_{kl}^{(2)})$, следует условие устойчивости для пластических деформаций

$$\Delta\varepsilon_{kl}^p\Delta\sigma_{kl}\geqslant0\qquad(\Delta\varepsilon_{kl}^p=\varepsilon_{kl}^{p(1)}-\varepsilon_{kl}^{p(2)}), \tag{1.9}$$

справедливое для любых двух напряженных состояний как в пластической, так и в упругой областях, причем для идеально пластической среды имеют место более сильные, чем (1.9), условия

$$\varepsilon_{kl}^{p(1)}\Delta\sigma_{kl}\geqslant0,\qquad\varepsilon_{kl}^{p(2)}\Delta\sigma_{kl}\leqslant0. \tag{1.10}$$

Заметим, что равенство в (1.9) и (1.10) имеет место при $\varepsilon_{kl}^{p(1)}\neq0$ и $\varepsilon_{kl}^{p(2)}\neq0$, только если $\Delta\sigma_{kl}=0$, либо при $\varepsilon_{kl}^{p(1)}=\varepsilon_{kl}^{p(2)}=0$, если $\Sigma_i<\sigma_T$ $(i=1,2)$. Действительно, для идеально пластического материала это является известным следствием соотношений (1.7) и выпуклости поверхности $\Sigma=\sigma_T$. Для упрочняющегося материала из (1.7) и (1.8) вытекает $0=\Delta\varepsilon_{kl}^p\Delta\sigma_{kl}\geqslant\Delta\lambda\Delta\Sigma=\lambda'(\Sigma_0)(\Delta\Sigma)^2\geqslant0$ (Σ_0 лежит между Σ_1 и Σ_2), что возможно только при $\Delta\Sigma=0$ и $\Delta(\partial\Sigma/\partial\sigma_{kl})\Delta\sigma_{kl}=0$, откуда $\Delta\sigma_{kl}=0$ в силу выпуклости поверхности $\Sigma=\mathrm{const}$ и ортогональности к ней вектора $\partial\Sigma/\partial\sigma_{kl}$ [1].

Отметим, что ситуация, когда $\varepsilon_{kl}^{p(1)}\neq0$, $\varepsilon_{kl}^{p(2)}=0$ (т. е. $\Sigma_1\geqslant\sigma_T>\Sigma_2$) и $\varepsilon_{kl}^{p(1)}\Delta\sigma_{kl}=0$, невозможна, поскольку из (1.8) следует, что $0=\partial\Sigma/\partial\sigma_{kl}\big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(1)}}\Delta\sigma_{kl}\geqslant\Sigma_1-\Sigma_2$ (т. е. $\Sigma_2\geqslant\Sigma_1$).

Аналогично [1–3] считаем, что при разгрузке на контуре γ выполняется одно из условий

$$w^e=\frac{\partial w^e}{\partial n}=0; \tag{1.11a}$$

$$w^e = \tilde{G} = 0; \tag{1.11б}$$

$$\tilde{G} = \tilde{Q} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = 0; \tag{1.11в}$$

$$\frac{\partial w^e}{\partial n} = \tilde{Q} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = 0 \tag{1.11г}$$

(знак «~» относится к величинам, характеризующим силовое воздействие после разгрузки). Условия (1.11а)–(1.11в) означают соответственно, что при разгрузке контур γ защемлен, свободно оперт и свободен от нагрузок.

Таким образом, обратная упругопластическая задача сводится к нахождению прогиба $w = w(x_1, x_2)$ (или $w^e = w^e(x_1, x_2)$) и включает систему уравнений (1.1)–(1.5), (1.7), в которой $\tilde{w} = \tilde{w}(x_1, x_2)$ — заданная функция, и одно из граничных условий (1.11).

2. Теорема единственности. В рассматриваемой задаче при сделанных предположениях зона пластичности и напряжения σ_{kl} в ней, а также остаточные напряжения ρ_{kl} во всей пластине определяются однозначно, решение для прогиба w будет единственным при некоторых дополнительных условиях. Докажем это.

Обозначим через V цилиндрическую область пространства, занятую пластиной, т. е. $V = \{x | x = (x_1, x_2, z) \in R^3, (x_1, x_2) \in S, \ |z| \leqslant h/2\}$. Предположим, что существует два решения данной задачи, разности соответствующих величин будем обозначать с помощью символа Δ (см. п. **1**). Поскольку $\Delta\tilde{\varepsilon}_{kl} = 0$, имеем

$$\int\limits_V \Delta\tilde{\varepsilon}_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dV = 0.$$

Отсюда с учетом (1.2), (1.3) и равенства [1–3]

$$\int\limits_V a_{klmn}\Delta\sigma^e_{kl}\Delta\rho_{mn}\,dV = 0, \tag{2.1}$$

вытекающего из (1.6) и (1.11), получим

$$I \equiv \int\limits_V (a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn} + \Delta\varepsilon^p_{kl}\Delta\sigma_{kl})\,dV = 0. \tag{2.2}$$

Предположим, что в V существует две зоны пластичности, соответствующих решениям задачи: $V_1 \cup V_{12}$ и $V_2 \cup V_{12}$, пересекающихся по области V_{12}, т. е. $\varepsilon^{p(1)}_{kl} = 0$ в V_2, $\varepsilon^{p(2)}_{kl} = 0$ в V_1, $\varepsilon^{p(1)}_{kl} \neq 0$ и $\varepsilon^{p(2)}_{kl} \neq 0$ в V_{12}. Тогда (2.2) примет вид

$$\int\limits_V a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn}\,dV + \int\limits_{V_1} \varepsilon^{p(1)}_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dV - \int\limits_{V_2} \varepsilon^{p(2)}_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dV + \int\limits_{V_{12}} \Delta\varepsilon^p_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dV = 0,$$

что согласно неравенствам (1.2) и (1.9) (или (1.10)) и замечанию о знаке равенства в (1.9) (или (1.10)) возможно только в случае обращения каждого из четырех интегралов в нуль. Отсюда $\Delta\rho_{kl} = 0$ в V, $\varepsilon^{p(i)}_{kl} = 0$ в V_i, т. е. $V_i = \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $\Delta\sigma_{kl} = 0$ в V_{12}. Таким образом, остаточные напряжения ρ_{kl} всюду в V, зона пластичности $V_p \equiv V_{12}$ и напряжения σ_{kl} (а значит, и σ^e_{kl}) в V_p определяются однозначно.

Для области V_p имеем $V_p = \{x | x = (x_1, x_2, z) \in R^3, (x_1, x_2) \in S_p, \xi h/2 \leqslant |z| \leqslant h/2\}$. Здесь $\xi = \xi(x_1, x_2)$ $(0 < \xi \leqslant 1)$ — безразмерное расстояние от срединной плоскости до зоны пластичности, отнесенное к $h/2$; $S_p \subset S$. Из (1.3) следует, что при $(x_1, x_2) \in S_p$ прогиб w^e определяется с точностью до линейной функции x_1 и x_2. Если область S_p примыкает к непрямолинейной части контура γ, на которой заданы граничные условия

(1.11а) или (1.11б), то прогиб w^e определяется однозначно. Таким образом, если $S_p = S$, то прогиб w^e (а значит, и w) будет определен (в указанном смысле) для всей пластины, в противном случае — только в области $S_p \subset S$. Однако, если $w^e = w^e(x_1, x_2)$ является аналитической в S_p функцией, то w^e, как известно, может быть продолжена на всю область S. Отсюда следует, что по крайней мере в двух указанных случаях (при $S_p \subset S$ в классе аналитических функций и при $S_p = S$) решение для w^e будет единственным в S (для условий (1.11а) или (1.11б)) либо определяться с точностью до соответствующей жесткому смещению линейной функции x_1 и x_2 (для (1.11в)) или до произвольной постоянной (для (1.11г)). Теорема доказана.

3. Примеры. Рассмотрим пластину постоянной толщины h из изотропного материала, для которого функция Σ из (1.7) совпадает с интенсивностью напряжений σ_i, коэффициент Пуассона в законе Гука примем равным 0,5. Тогда согласно (1.4) и (1.7) связь между напряжениями и деформациями можно представить в виде

$$\sigma_{kl} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{nn}\delta_{kl}) = -\frac{2}{3}z\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(w_{,kl} + w_{,nn}\delta_{kl}),$$

$$\sigma_i = \left(\frac{3}{2}\sigma_{kl}\sigma_{kl} - \frac{1}{2}\sigma_{kk}\sigma_{ll}\right)^{1/2} = (\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_i = \left[\frac{2}{3}(\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll})\right]^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}|z|(w_{,11}^2 + w_{,22}^2 + w_{,11}w_{,22} + w_{,12}^2)^{1/2},$$

где ε_i — интенсивность деформаций; δ_{kl} — компоненты единичного (плоского) тензора. Связь между σ_i и ε_i такая же, как и между напряжением и осевой деформацией при одноосном растяжении, т. е.

$$\sigma_i = \begin{cases} E\varepsilon_i, & \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_T, \\ f(\varepsilon_i), & \varepsilon_i > \varepsilon_T, \end{cases} \tag{3.2}$$

где E — модуль Юнга; $\varepsilon_T = \sigma_T/E$; $f(\varepsilon_i)$ — функция, обратная к $\varepsilon_i = \sigma_i/E + \lambda(\sigma_i)$, для упрочняющегося материала ($f = f(\varepsilon_i)$ существует и однозначна, поскольку $\varepsilon_i' = 1/E + \lambda'(\sigma_i) > 0$, откуда следует, что $0 < f'(\varepsilon_i) < E$); $f \equiv \sigma_T$ для идеально пластического материала.

Для линейно упрочняющейся среды функция f имеет вид

$$f(\varepsilon_i) = \mu\varepsilon_i + (E - \mu)\varepsilon_T, \qquad \mu = (\sigma_B - \sigma_T)/(\varepsilon_B - \varepsilon_T) < E, \tag{3.3}$$

где σ_B — предел прочности; ε_B — соответствующая σ_B деформация к моменту разрушения (на одноосной диаграмме $\sigma - \varepsilon$).

Пусть ξ — безразмерное расстояние от срединной плоскости до зоны пластичности (см. п. **2**). Тогда из (3.1) и (3.2) по аналогии с [4] получим выражения для моментов

$$M_{kl} = 2\left(\int_0^{\xi h/2} \sigma_{kl} z\,dz + \int_{\xi h/2}^{h/2} \sigma_{kl} z\,dz\right) = -D\xi^3(w_{,kl} + w_{,nn}\delta_{kl})/2 + M_{kl}^p,$$

$$M_{kl}^p = -\frac{4}{3}(w_{,kl} + w_{,nn}\delta_{kl})I_1, \qquad I_1 = \int_{\xi h/2}^{h/2} \frac{f(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} z^2\,dz, \qquad D = \frac{Eh^3}{9}. \tag{3.4}$$

Величину ξ можно выразить через комбинацию вторых производных от прогиба w из условия $\varepsilon_i = \varepsilon_T$ при $|z| = \xi h/2$, откуда согласно (3.1) найдем

$$\xi = \sqrt{3}\varepsilon_T h^{-1}(w_{,11}^2 + w_{,22}^2 + w_{,11}w_{,22} + w_{,12}^2)^{-1/2}. \tag{3.5}$$

Для моментов M^e_{kl}, соответствующих упругому «распружиниванию» w^e, имеем

$$M^e_{kl} = -D(w^e_{,kl} + w^e_{,nn}\delta_{kl})/2. \tag{3.6}$$

Заметим, что $M^e_{kl.kl} = -D\Delta\Delta w^e$ ($\Delta\Delta$ — бигармонический оператор). Отсюда с учетом вытекающего из (1.5) равенства $M_{kl.kl} = M^e_{kl.kl}$ получим нелинейное уравнение четвертого порядка для нахождения неизвестного прогиба w^e:

$$D\Delta\Delta w^e = -M_{kl,kl}, \tag{3.7}$$

где M_{kl} определяются по формулам (3.4) и (3.5), в которых согласно (1.4) w надо заменить на $w^e + \tilde{w}$. К уравнению (3.7) следует добавить одно из граничных условий (1.11).

Рассмотрим простой пример, когда остаточный прогиб является квадратичной функцией координат x_1 и x_2, т. е. $\tilde{w} = -\alpha_{kl}x_kx_l/2$ ($\alpha_{kl} = \mathrm{const}$), и после разгрузки контур γ свободен (выполняются условия (1.11в)).

Из (1.1) следует, что $\tilde{\varepsilon}_{kl} = z\alpha_{kl}$, т. е. остаточные деформации не зависят от x_1 и x_2. Решение ищем в виде $w = -\beta_{kl}x_kx_l/2$ ($\beta_{kl} = \mathrm{const}$), т. е. согласно (1.4) $\varepsilon_{kl} = z\beta_{kl}$. Тогда, как видно из (3.4)–(3.6), моменты M_{kl} и M^e_{kl} будут постоянными во всей области S, занятой пластиной, и уравнение (3.7) выполняется тождественно. Для удовлетворения граничным условиям (1.11в) достаточно положить $M_{kl} = M^e_{kl}$. Тогда из (3.4)–(3.6) следует, что $\beta_{kl} = \Theta\alpha_{kl}$ (т. е. $w = \Theta\tilde{w}$, $\Theta = \mathrm{const}$), причем

$$1 - \xi^3 - \frac{8I_1}{3D} = \Theta^{-1} = \frac{h(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}^2)^{1/2}\xi}{\sqrt{3}\varepsilon_T}. \tag{3.8}$$

Пусть функция $f(\varepsilon_i)$ имеет вид (3.3). Согласно (3.1) и (3.8) $\varepsilon_i = 2\varepsilon_T z/(h\xi)$ при $0 < z \leqslant h/2$. Тогда для интеграла I_1, входящего в (3.4) и (3.8), имеем равенство

$$I_1 = \Big(\frac{h}{2}\Big)^3\Big[\frac{\mu}{3}(1-\xi^3) + \frac{E-\mu}{2}\xi(1-\xi^2)\Big],$$

подставляя которое в (3.3), получим уравнение для нахождения величины ξ

$$\xi^3 - (2y+3)\xi + 2 = 0, \qquad y = \frac{h(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}^2)^{1/2}}{\sqrt{3}\varepsilon_T(1-\mu/E)}. \tag{3.9}$$

Легко видеть, что при любом $y > 0$ в интервале (0, 1) существует единственный корень ξ уравнения (3.9), причем $(y+3/2)^{-1} < \xi < (y+1)^{-1}$. При известном ξ из (3.8) находится величина Θ, а следовательно, и прогиб $w = \Theta\tilde{w}$.

Заметим, что при $\mu = 0$ функция (3.8) и полученное решение соответствуют пластине из идеального упругопластического материала.

Если участок упругопластической диаграммы, расположенный между точками $(\varepsilon_T, \sigma_T)$ и $(\varepsilon_B, \sigma_B)$, аппроксимировать степенной функцией, то для $f(\varepsilon_i)$ из (3.2) имеем $f(\varepsilon_i) = \sigma_T(\varepsilon_i/\varepsilon_T)^m = \sigma_T[2z/(h\xi)]^m$, где $m = \ln(\sigma_B/\sigma_T)/\ln(\varepsilon_B/\varepsilon_T) < 1$. Подставляя эту функцию в (3.8), получим

$$\varphi(\xi) \equiv (1-m)\xi^3 - (m+2)y_1\xi - 3\xi^{1-m} + (m+2) = 0, \tag{3.10}$$

где $y_1 = (1-\mu/E)y$, а постоянная y определена в (3.9). Поскольку $0 < m < 1$, $\varphi'(\xi) = 3(1-m)(\xi^2 - \xi^{-m}) - (m+2)y_1 < 0$ при $0 < \xi < 1$, $\varphi(0) > 0$, $\varphi(1) < 0$, в указанном интервале при любом $y_1 > 0$ существует единственный корень ξ уравнения (3.10). Ввиду того что $\xi^3 < \xi < \xi^{1-m} < m + (1-m)\xi$ при $0 < \xi < 1$ и $0 < m < 1$ [5], с учетом (3.10) можно уточнить границы корня:

$$\frac{2(1-m)}{3(1-m) + (m+2)y_1} < \xi < \frac{1}{1+y_1}.$$

4. Итерационный метод решения. Аналогично [2, 3] рассматриваемую задачу можно свести к нахождению прогиба w из функционального уравнения

$$w = F(w), \qquad F(w) = w^e(w) + \tilde{w}. \tag{4.1}$$

Для решения (4.1) применяем итерационный метод, согласно которому

$$w^{n+1} = F(w^n) = w^{en} + \tilde{w} \tag{4.2}$$

($w^{en} = w^e(w^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), в качестве нулевого приближения полагаем, например, $w^0 = \tilde{w}$.

Таким образом, на каждой итерации имеем прямую задачу о нахождении по известной функции $w = w(x_1, x_2)$ и одному из граничных условий (1.11) упругого «распружинивания» $w^e = w^e(x_1, x_2)$. Решение этой задачи единственно (в том же смысле, что и в п. **2**), так как для разностей двух возможных решений с учетом (1.3), (1.4) и (2.1) получим

$$0 = \int\limits_V \Delta\varepsilon_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dV = \int\limits_S (h^3/12) b_{klmn} \Delta w^e_{,kl} \Delta w^e_{,mn}\,dS + I$$

(величина I определена в (2.2)), что справедливо только при $\Delta w^e_{,kl} = 0$. Например, в случае изотропной пластины постоянной толщины задача нахождения w^e сводится к бигармоническому уравнению (3.7) с известной правой частью и одному из условий (1.11).

Утверждение. *Последовательность* (4.2) *сходится к искомому прогибу* w.

Введем порожденную скалярным произведением $(w_1, w_2) = \int\limits_S (h^3/24) b_{klmn} w^{(1)}_{,kl} w^{(2)}_{,mn}\,dS$ полунорму $\|w\| = (w, w)^{1/2}$. Если в трех не лежащих на одной прямой точках пластины прогиб $w = 0$, то $\|w\|$ является нормой, эквивалентной $\|w\|_{H^2(S)}$ [2, 3].

Обозначим разность точных и приближенных (т. е. полученных на n-й итерации) значений соответствующей функции u через $\Delta u^n = u^n - u$. Тогда из (4.1) и (4.2) найдем

$$\Delta w^n = \Delta w^{e(n-1)}. \tag{4.3}$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\|\Delta w^{en}\| \leqslant \|\Delta w^n\|. \tag{4.4}$$

Действительно, из (1.3), (1.4) и (2.1) получим

$$\begin{gathered} J^n \equiv \int\limits_V \Delta\varepsilon^n_{kl}\Delta\sigma^n_{kl}\,dV = 2\|\Delta w^{en}\|^2 + I^n \geqslant 2\|\Delta w^{en}\|^2, \\ I^n \equiv \int\limits_V (a_{klij}\Delta\rho^n_{kl}\Delta\rho^n_{ij} + \Delta\varepsilon^{pn}_{kl}\Delta\sigma^n_{kl})\,dV. \end{gathered} \tag{4.5}$$

В то же время имеем

$$J^n = \int\limits_V \Delta\varepsilon^n_{kl}\Delta\sigma^{en}_{kl}\,dV = 2(\Delta w^n, \Delta w^{en}) \leqslant 2\|\Delta w^n\|\,\|\Delta w^{en}\|, \tag{4.6}$$

поскольку ввиду (4.3) и (2.1)

$$\int\limits_V \Delta\varepsilon^n_{kl}\Delta\rho_{kl}\,dV = \int\limits_V \Delta\varepsilon^{e(n-1)}_{kl}\Delta\rho_{kl}\,dV = 0,$$

где $\Delta\varepsilon^{e(n-1)}_{kl} = -z\Delta w^{e(n-1)}_{,kl} = a_{klij}\Delta\sigma^{e(n-1)}_{ij}$.

Из (4.5) и (4.6) следует (4.4), причем равенство в (4.4) возможно только одновременно с равенством в (4.5) и (4.6), т. е. при $I^n = 0$ и $(\Delta w^n, \Delta w^{en}) = \|\Delta w^n\| \|\Delta w^{en}\|$. Последнее равенство имеет место в случае, когда функции $\Delta w^n_{,kl}$ и $\Delta w^{en}_{,kl}$ отличаются только положительным постоянным во всей области S множителем (см. [5]), который согласно (4.4) равен единице, т. е. $\Delta w^n_{,kl} = \Delta w^{en}_{,kl}$.

Из (4.3) и (4.4) следует, что $\|\Delta w^{en}\| \leqslant \|\Delta w^{e(n-1)}\|$, поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta w^{en}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta w^n\|$ [1], а значит, $I^n \to 0$ и $\Delta w^n_{,kl} \to \Delta w^{en}_{,kl}$. Повторяя рассуждения п. **2** и исключая жесткие смещения, имеем $\Delta\rho^n_{kl} \to 0$ в V; $V^n_p \to V_p$, $\Delta\sigma^n_{kl} \to 0$ в V_p и $\Delta w^n \to \Delta w^{en}$ в S. Учитывая, что $w^n = w^{en} + \tilde{w}^n$, из (4.1) найдем $\Delta\tilde{w}^n = \Delta w^n - \Delta w^{en} \to 0$ в S. Таким образом, последовательность (4.2) сходится к прогибу w, обеспечивающему заданный остаточный прогиб $\tilde{w}$, а остаточные напряжения ρ^n_{kl}, пластическая зона V^n_p и напряжения σ^n_{kl} в ней — к соответствующим функциям, являющимся решением обратной упругопластической задачи. Утверждение доказано.

5. Вариационная формулировка задачи. Рассмотренный выше итерационный процесс (4.2) можно использовать для нахождения приближенных решений обратной упругопластической задачи. Для этой же цели служит вариационный принцип, который сформулируем в данном пункте. Вычислим работу остаточных напряжений ρ_{kl} на вариациях деформаций $\delta\varepsilon_{kl}$ во всей пластине:

$$-\delta I_2 = \int\limits_V \rho_{kl}\delta\varepsilon_{kl}\,dV = -\int\limits_S \tilde{M}_{kl}\delta w^e_{,kl}\,dS.$$

(Последнее равенство следует из того, что $\delta\varepsilon_{kl} = \delta\varepsilon^e_{kl} = -z\delta w^e_{,kl}$, так как $\delta\tilde{\varepsilon}_{kl} = 0$, функция $\tilde{w} = \tilde{w}(x_1, x_2)$ является заданной.) После несложных преобразований, аналогичных [1], получим

$$-\delta I_2 = -\int\limits_S \tilde{M}_{kl,kl}\delta w^e\,dS + \int\limits_\gamma \Big[\Big(\tilde{Q} + \frac{\partial\tilde{H}}{\partial s}\Big)\delta w^e - \tilde{G}\delta\Big(\frac{\partial w^e}{\partial n}\Big)\Big]ds. \qquad (5.1)$$

Из (5.1) следует, что выполнение равенства $\delta I_2 = 0$ при произвольной функции δw^e эквивалентно выполнению после разгрузки уравнения равновесия $\tilde{M}_{kl.kl} = 0$ и граничных условий (1.11в). Если $w^e = 0$ и/или $\partial w^e/\partial n = 0$ на γ, то этим же условиям должна удовлетворять и варьируемая функция w^e из (5.1). Тогда недостающие условия из (1.11) также следуют из $\delta I_2 = 0$.

Формулировка вариационного принципа возможна лишь в том случае, если выражение $-\rho_{kl}\delta\varepsilon_{kl}$ является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi = \Phi(\varepsilon_{kl})$, т. е.

$$\rho_{kl} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{kl}}. \qquad (5.2)$$

Определим, когда функция Φ существует. Из (1.2) и (1.4) найдем

$$\rho_{kl} = \sigma_{kl} + b_{klmn}(\tilde{\varepsilon}_{mn} - \varepsilon_{mn}). \qquad (5.3)$$

Отсюда следует, что (5.2) имеет место при наличии потенциала напряжений U_σ или деформаций U_ε (т. е. $\sigma_{kl} = \partial U_\sigma/\partial\varepsilon_{kl}$ или $\varepsilon_{kl} = \partial U_\varepsilon/\partial\sigma_{kl}$), поскольку эти потенциалы связаны равенством $U_\sigma(\varepsilon_{kl}) + U_\varepsilon(\sigma_{kl}) = \sigma_{kl}\varepsilon_{kl}$ и существование одного из них обеспечивает существование другого. Из (5.3) получим

$$\Phi = b_{klmn}\varepsilon_{kl}(\varepsilon_{mn}/2 - \tilde{\varepsilon}_{mn}) - U_\sigma(\varepsilon_{kl}). \qquad (5.4)$$

Например, из (1.4) и (1.7) вытекает существование функции Φ для упрочняющейся упругопластической среды, так как в этом случае

$$U_\varepsilon(\sigma_{kl}) = \frac{1}{2}a_{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \int\limits_0^{\sigma_{kl}} \varepsilon^p_{kl}\,d\sigma_{kl}.$$

Рассмотрим более подробно изотропную пластину постоянной толщины h, определяемую уравнениями (3.1) и (3.2), согласно которым

$$U_\sigma(\varepsilon_{kl}) = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = \begin{cases} E\varepsilon_i^2/2, & \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_T, \\ E\varepsilon_i^2/2 + I_3, & \varepsilon_i > \varepsilon_T, \end{cases} \qquad I_3 = \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon_i} f(\varepsilon_i)\, d\varepsilon_i.$$

Тогда из (5.4) найдем

$$\Phi(\varepsilon_{kl}) = \begin{cases} -F_1, & \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_T, \\ E(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_T^2)/2 - F_1 - I_3, & \varepsilon_i > \varepsilon_T, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$F_1 = (2/3)E(\tilde{\varepsilon}_{kl}\varepsilon_{kl} + \tilde{\varepsilon}_{kk}\varepsilon_{ll}).$$

Легко видеть, что $\Phi = \Phi(\varepsilon_{kl})$ является непрерывно дифференцируемой выпуклой функцией, для которой справедливо неравенство вида (1.8). Отсюда следует, что минимум функционала $I_2(w^e) = \int_V \Phi(\varepsilon_{kl})\, dV$ достигается на истинных прогибах $w = w^e + \tilde{w}$, являющихся решением обратной упругопластической задачи, поскольку для любого другого поля $\bar{w} = \bar{w}^e + \tilde{w}$, удовлетворяющего кинематическим граничным условиям (1.11) (если таковые фигурируют в формулировке задачи), в силу (1.8) имеем

$$I_2(w^e) - I_2(w^e) = \int_V [\Phi(\bar{\varepsilon}_{kl}) - \Phi(\varepsilon_{kl})]\, dV \geqslant \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} (\bar{\varepsilon}_{kl} - \varepsilon_{kl})\, dV = \int_V \rho_{kl}(\bar{\varepsilon}_{kl}^e - \varepsilon_{kl}^e)\, dV = 0$$

(последнее равенство вытекает из (1.6) и (1.11)).

Таким образом, обратная упругопластическая задача сводится к поиску минимума функционала $I_2 = I_2(w^e)$, что открывает возможности для построения приближенных решений. В качестве примера рассмотрим линейно упрочняющуюся среду, для которой функция $f(\varepsilon_i)$ определена в (3.3). Тогда из (5.5) получим

$$\Phi = \begin{cases} -F_1, & \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_T, \\ -F_1 + (E - \mu)(\varepsilon_i - \varepsilon_T)^2/2, & \varepsilon_i > \varepsilon_T. \end{cases} \tag{5.6}$$

В первом приближении выражение для прогиба w ищем в виде $w = \Theta\tilde{w}$ (Θ — неизвестная постоянная). Обозначив, как и прежде, через ξ безразмерное расстояние от плоскости $z = 0$ до зоны пластичности, из (5.6) с учетом (3.5) найдем

$$I_2(\Theta) = \int_S \Big[-2 \int_0^{h/2} F_1\, dz + (E - \mu) \int_{\xi h/2}^{h/2} (\varepsilon_i - \varepsilon_T)^2\, dz \Big]\, dS =$$

$$= \frac{Eh^3}{24} [(\alpha\Theta^2 - 2\Theta)I_4 - 3æ\alpha\Theta I_5 - \alpha æ^3 \Theta^{-1} I_6 + 3æ^2 \alpha S_1], \tag{5.7}$$

$$\alpha = 1 - \frac{\mu}{E}, \quad æ = \frac{2\varepsilon_T}{h}, \quad I_4 = \int_S \tilde{\gamma}_i^2\, dS, \quad I_5 = \int_S \tilde{\gamma}_i\, dS, \quad I_6 = \int_S \tilde{\gamma}_i^{-1}\, dS,$$

$$\tilde{\gamma}_i = [(2/3)(\tilde{w}_{,kl}\tilde{w}_{,kl} + \tilde{w}_{,kk}\tilde{w}_{,ll})]^{1/2}$$

(в (5.7) и ниже через S_1 обозначена площадь области S).

Приравнивая производную $I_2'(\Theta)$ к нулю, из (5.7) получим

$$\eta^3 - p\eta + 2 = 0, \qquad \eta = \frac{æ}{\Theta}\Big(\frac{I_6}{I_4}\Big)^{1/3}, \qquad p = \frac{2}{æ}\Big(\frac{I_4}{I_6}\Big)^{1/3}\Big(\frac{1}{\alpha} + \frac{3æ}{2}\frac{I_5}{I_4}\Big). \tag{5.8}$$

Поскольку $w = \Theta\tilde{w}$, то согласно (3.5) $\tilde{\gamma}_i = æ/(\xi\Theta)$, причем $0 < \xi \leqslant 1$. Отсюда следует, что $I_4 \geqslant æ^2\Theta^{-2}S_1$ и $I_6 \leqslant \Theta æ^{-1}S_1$, т. е. $\eta \leqslant 1$.

Несложный анализ показал, что уравнение (5.8) при $p > 3$, т. е. при $(3æ/2)[I_5/I_4 - (I_6/I_4)^{1/3}] + 1/\alpha > 0$, имеет единственный корень в интервале (0, 1). Соответствующий этому решению прогиб можно взять в качестве нулевого приближения в итерационном процессе (4.2), т. е. положить $w^0 = \Theta\tilde{w}$. По-видимому, при таком выборе w^0 последовательность (4.2) будет сходиться к точному решению обратной упругопластической задачи быстрее, чем при $w^0 = \tilde{w}$.

Заметим, что если $\tilde{\gamma}_i = \text{const}$, то $\eta = \xi$, а уравнение (5.8) совпадет с (3.9), т. е. в этом случае полученное выше решение точное и соответствует рассмотренному в п. **3**.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
2. **Цвелодуб И. Ю.** Обратные задачи формоизменения неупругих пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 1. С. 96–106.
3. **Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю.** Об одном классе обратных задач формоизменения вязкоупругих пластин // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 122–131.
4. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
5. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства. М.: Мир, 1965.

Поступила в редакцию 30/VII 1997 г.