ПМТФ, № 2, 1966

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ РЕГУЛЯРНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПУЧКА ПРИ ЭМИССИИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. Е. Кузнецов, В. А. Сыровой

(Москва)

Дано аналитическое решение уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности в режиме полного пространственного заряда. Предполагается, что эмиттер является координатной поверхностью $x^1 = \mathrm{const}$ в ортогональной системе $x^i (i = 1, 2, 3)$, а плотность тока эмиссии J — заданная функция $J(x^2, x^3)$. Решение представляется в виде рядов по x^1 с коэффициентами, зависящими от x^2, x^3, определяемыми из рекуррентных соотношений. При разложении по длине дуги криволинейной оси x^1, ортогональной к эмиттеру, первая поправка к закону $^3/_2$ Чайлда — Лэнгмюра определяется только полной кривизной (суммой главных кривизн) эмиттирующей поверхности. Решение задачи в рассмотренной постановке позволяет определить форму коллектора, обеспечивающего заданный закон распределения плотности тока эмиссии на заданной поверхности.

Регулярный [1] моноэнергетический нерелятивистский пучок заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η при отсутствии внешнего магнитного поля в стационарном случае описывается системой дифференциальных уравнений, которая в тензорной форме в произвольной криволинейной системе координат x^i $(i = 1, 2, 3)$ имеет вид

$$g^{ik}v_iv_k = 2\varphi, \qquad e^{ikl}\frac{\partial v_i}{\partial x^k} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\rho v_k\right) = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) = \rho \qquad (1)$$

Здесь v_i — ковариантные компоненты скорости, φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда, g_{ik} — ковариантный метрический тензор, $g = |g_{ik}|$ — его детерминант. Уравнения (1) записаны в безразмерных переменных r°, V°, φ°, ρ° (r, V — модули радиуса-вектора и вектора скорости)

$$r = ar^\circ, \qquad V = UV^\circ, \qquad \varphi = -\frac{U^2}{\eta}\varphi^\circ, \qquad \rho = \frac{U^2}{4\pi\eta a^2}\rho^\circ \qquad (2)$$

причем символ безразмерной величины опущен; a, U — постоянные. имеющие размерность длины и скорости, соответственно.

Первое уравнение (1) представляет собою интеграл энергии, второе выражает тот факт, что скорость — потенциальный вектор, третье и четвертое — уравнение сохранения тока и уравнение Пуассона для скалярного потенциала.

В дальнейшем будем полагать, что эмиттирующая поверхность совпадает с одной из поверхностей $x^1 = \mathrm{const}$ ортогональной системы координат x^i $(i = 1, 2, 3)$. Не ограничивая общности, константу можно считать

---

[1] Согласно [1], будем называть течение регулярным, если обобщенный импульс частицы является потенциальным вектором.

равной нулю. Как известно, наиболее интересными, с практической точки зрения, являются режимы с эмиссией, ограниченной пространственным зарядом: на эмиттере $x^1 = 0$

$$V = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \partial\varphi / \partial x^1 = 0, \qquad \rho v_{x^1} = J\,(x^2, x^3) \tag{3}$$

Здесь $J\,(x^2, x^3)$ — плотность тока эмиссии, а v_{x^i} — физические компоненты скорости.

Будем искать решение задачи (1), (3) в виде рядов по x^1 с коэффициентами, зависящими от x^2, x^3

$$v_1 = (x^1)^{2/3} \sum_{k=0}^{\infty} U_k\,(x^1)^k, \qquad v_2 = (x^1)^{\varkappa} \sum_{k=0}^{\infty} V_k\,(x^1)^k$$

$$v_3 = (x^1)^{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} W_k\,(x^1)^k, \qquad 2\varphi = (x^1)^{4/3} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k\,(x^1)^k \tag{4}$$

$$2\sqrt{g}\,\rho = (x^1)^{-2/3} \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k\,(x^1)^k$$

раскладывая в аналогичные ряды элементы метрического тензора g_{ik}, g^{ik}, $\sqrt{g}$ и комбинации $\sqrt{g}\,g^{ik}$

$$g_{11} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x^1)^k, \qquad g_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(x^1)^k, \qquad g_{33} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x^1)^k$$

$$g^{11} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\,(x^1)^k, \qquad g_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k\,(x^1)^k, \qquad g^{33} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,(x^1)^k \tag{5}$$

$$\sqrt{g} = \sum_{k=0}^{\infty} G_k\,(x^1)^k, \qquad \sqrt{g}\,g^{11} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\,(x^1)^k, \qquad \sqrt{g}\,g^{22} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\,(x^1)^k$$

$$\sqrt{g}\,g^{33} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k\,(x^1)^k$$

Коэффициенты G_k, α_k, β_k, γ_k могут быть выражены через A_k, B_k, C_k или через a_k, b_k, c_k.

Располагая разложениями для ковариантных компонент скорости v_i, легко перейти к физическим компонентам v_{x^i} (h — фиксирующий индекс)

$$v_{x^h} = \sqrt{g^{hh}}\,v_h$$

Рассмотрение условий регулярности течения показывает, что $\varkappa = \varepsilon = {}^5/_3$, и позволяет выразить коэффициенты разложений v_2 и v_3 через U_k

$$\left(\frac{5}{3} + k\right) V_k = \frac{\partial U_k}{\partial x^2} = U_{k2}', \qquad \left(\frac{5}{3} + k\right) W_k = \frac{\partial U_k}{\partial x^3} = U_{k3}' \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{6}$$

Таким образом, при выполнении (3) частицы оставляют эмиттер под прямым углом к нему [2].

Подставляя выражения для v_i в первое уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned}\varphi_s = \sum_{k=0} \Big[&\Big(U_k^2 + 2\sum_{l=1}^{k} U_{l-1}U_{2k-l+1}\Big) A_{s-2k} + \Big(2\sum_{l=0}^{k} U_l U_{2k-l+1}\Big) A_{s-2k-1} + \\ &+ \Big(V_k^2 + 2\sum_{l=1}^{k} V_{l-1}V_{2k-l+1}\Big) B_{s-2k-2} + \Big(2\sum_{l=0}^{k} V_l V_{2k-l+1}\Big) B_{s-2k-3} + \\ &+ \Big(W_k^2 + 2\sum_{l=1}^{k} W_{l-1}W_{2k-l+1}\Big) C_{s-2k-2} + \Big(2\sum_{l=0}^{k} W_l W_{2k-l+1}\Big) C_{s-2k-3}\Big]\end{aligned} \tag{7}$$

$$(s = 0, 1, \ldots)$$

Суммирование по k управляется индексами у A, B, C: для фиксированного s допустимы все значения k, дающие неотрицательные индексы. Коэффициенты с отрицательными индексами по определению равны нулю.

Пользуясь уравнением Пуассона, находим

$$\rho_t = \left(t + \frac{1}{3}\right) \sum_{s=0}^{t} \left(s + \frac{4}{3}\right) \varphi_s \alpha_{t-s} + \sum_{s=0}^{t-2} \left[(\varphi_{s2}' \beta_{t-s-2})_2' + (\varphi_{s3}' \gamma_{t-s-2})_3' \right] \tag{8}$$

$$(t = 0,\ 1,\ \ldots)$$

При этом следует иметь в виду, что сумма по s от a до b равна нулю, если $b < a$.

Для получения соотношений, определяющих коэффициенты разложений (4), остается воспользоваться последним условием (3), связывающим U_0 и J, и уравнением сохранения тока. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^1, имеем

$$p \sum_{t=0}^{p} \rho_t \sum_{l=0}^{p-t} A_l U_{p-t-l} + \sum_{t=0}^{p-2} \left[\left(\rho_t \sum_{l=0}^{p-t-2} B_l V_{p-t-l-2}\right)_2' + \left(\rho_t \sum_{l=0}^{p-t-2} C_l W_{p-t-l-2}\right)_3' \right] = 0$$

$$U_0 = \left({}^9/_2 a_0^{5/2} J\right)^{1/3} \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{9}$$

Поскольку между коэффициентами разложений (4) существует простая связь (6) — (8), то достаточно рассмотреть один из рядов (4), например, для потенциала. Используя (7) — (9), находим

$$\varphi_0 = \left(\frac{9J}{2A_0}\right)^{2/3}, \qquad \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = -\frac{3}{5}\frac{A_1}{A_0} - \frac{8}{15}\frac{G_1}{G_0}$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_0} = \frac{1}{36}\left(-\frac{A_2}{A_0} + \frac{U_1^2}{U_0^2} + \frac{B_0 V_0^2 + C_0 W_0^2}{\varphi_0}\right) - \frac{1}{18}\left(4\frac{\alpha_1}{\alpha_0} + 7\frac{\varphi_1}{\varphi_0}\right)\left(\frac{U_1}{U_0} + \frac{A_1}{A_0}\right) -$$

$$-\frac{7}{72}\left(4\frac{\alpha_2}{\alpha_0} + 7\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\frac{\varphi_1}{\varphi_0}\right) - \frac{(\beta_0 \varphi_{02}')_2' + (\gamma_0 \varphi_{03}')_3'}{8\alpha_0 \varphi_0} - \frac{(\alpha_0 B_0 V_0 \varphi_0)_2' + (\alpha_0 C_0 W_0 \varphi_0)_3'}{36\alpha_0 A_0 U_0 \varphi_0} \tag{10}$$

Как известно, поверхность $x^1 = \mathrm{const}$ в каждой точке характеризуется двумя своими главными кривизнами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ или полной кривизной $T = \varkappa_1 + \varkappa_2$ и гауссовой кривизной $K = \varkappa_1 \varkappa_2$. Согласно теореме Гаусса [3], K принадлежит к внутренней геометрии поверхности, т.е. полностью определяется заданием метрики на ней

$$K = \frac{1}{g_{22}g_{33} - (g_{23})^2}\left[\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^3)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{33}}{(\partial x^2)^2} + \Gamma_{23}^{i}\Gamma_{23}^{j} g_{ij} - \Gamma_{22}^{i}\Gamma_{33}^{j} g_{ij}\right]$$

Здесь Γ_{pk}^{i} — символ Кристоффеля второго рода. Выполняя свертку по i, j и учитывая, что рассмотрение ведется в ортогональной системе координат, получаем

$$K = \frac{1}{4g_{22}g_{33}}\left\{-2\left[\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^3)^3} + \frac{\partial^2 g_{33}}{(\partial x^2)^2}\right] + g^{22}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right] + \right.$$

$$\left. + g^{33}\left[\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right]\right\}$$

Используя теперь условия эвклидовости пространства, выражаемые равенством нулю тензора Римана — Кристоффеля (шесть тождеств Ляме), приходим к следующему выражению для гауссовой кривизны поверхности $x^1 = \mathrm{const}$ в ортогональных эвклидовых координатах x^i:

$$K = \frac{1}{4g_{11}}\frac{\partial \ln g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^1} \tag{11}$$

С другой стороны, для полной кривизны T имеем [4]

$$T = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial \ln g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^1}\right) \tag{12}$$

Из (11), (12) видно, что главные кривизны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ определяются выражениями

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \ln g_{22}}{\partial x^1}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^1} \tag{13}$$

Остановимся более подробно на двух первых членах разложения потенциала. Принимая во внимание, что

$$\frac{G_1}{G_0} = \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0} - a_0^{1/2}T$$

имеем

$$2\varphi = \left(\frac{9}{2}J\right)^{2/3} s^{4/3}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{8}{15}T\right)s + \ldots\right] \tag{14}$$

Здесь $s = a_0^{1/2}x^1$. Смысл s будет выяснен несколько позднее. Заметим только, что в то время как при возвращении к размерным величинам размерность криволинейной координаты x^1 может быть любой, s будет обладать размерностью длины.

Первый член разложения (14) представляет собой известный закон $^3/_2$ для плоского диода [5, 6] в локальной записи ($J = J(x^2, x^3)$). Поправка к нему, выражаемая вторым членом, зависит как от свойств самой поверхности (через ее полную кривизну), так и от смысла параметра, по которому происходит разложение. Чтобы пояснить сказанное, заметим, что в цилиндрическом диоде с эмиттером $R = 1$ и $J = \mathrm{const}$ в качестве x^1 можно, например, использовать

(1°) $x^1 = R - 1$, (2°) $x^1 = \ln R$ (3°) $x^1 = 1 - R^{-1}$

Построению разложений с x^1 в виде (2°), (3°) посвящены работы [7, 8] Для (1°) — (3°) имеем соответственно

(1°) $g_{11} = 1$, (2°) $g_{11} = \exp(2x^1)$, (3°) $g_{11} = (1 - x^1)^{-4}$

Формула (14) приобретает универсальный вид, если разложение производить по длине дуги S криволинейной оси x^1

$$S = \int \sqrt{g_{11}}\, dx^1 \tag{15}$$

Раскладывая подынтегральное выражение в ряд по x^1 и выполняя интегрирование, получим

$$S = a_0^{1/2}x^1 + \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{1/2}}(x^1)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{a_2}{a_0^{1/2}} - \frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_0^{3/2}}\right)(x^1)^3 + \ldots =$$
$$= s + \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}s^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{a_2}{a_0^2} - \frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_0^3}\right)s^3 + \ldots$$

Таким образом, s — главный член разложения длины дуги S по x^1. Выражая s через S

$$s = S - \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}S^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2}\right)S^3 + \ldots \tag{16}$$

и подставляя (16) в (14), имеем

$$2\varphi = (^9/_2 J)^{2/3} S^{4/3}(1 + {}^8/_{15}TS + \ldots) \tag{17}$$

При $S \to 0$ достаточно ограничиться первым членом разложения, изображающим решение Чайлда — Лэнгмюра в плоском случае (при $T = 0$ и $J = \text{const}$). Для цилиндрического и сферического диодов общее выражение (17) дает соответственно

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = S^{4/3}\left(1 - \frac{8}{15} S + \ldots\right), \qquad S = R - R_0, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = S^{4/3}\left(1 - \frac{16}{15} S + \ldots\right), \qquad S = r - r_0, \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Аналогичной обработке могут быть подвергнуты и следующие члены разложения. Так, исходя из определения G_2, получаем

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{G_2}{G_0} + \frac{G_1}{G_0}\frac{A_1}{A_0} + \frac{A_2}{A_0} = \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{1/2}} T + \frac{1}{2} a_0 T^2 - \frac{1}{2} a_0 T_S' - \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_0} + \frac{3}{8}\frac{a_1^2}{a_0^2}$$

Теперь для φ_2 / φ_0 в разложении (17) имеем

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_0} = \frac{157}{900} T^2 + \frac{7}{36} T_S' - \frac{15}{36}(k_1^2 + \delta_1^2) - \frac{7}{36}(k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2) +$$
$$+ \frac{7}{36}(k_{1P}' + \delta_{1Q}') + \frac{k_1 J_P' + \delta_1 J_Q'}{3J} + \frac{4}{45}\frac{k_2 J_P' + \delta_2 J_Q'}{J} +$$
$$+ \frac{13}{450}\frac{J_P'^2 + J_Q'^2}{J^2} - \frac{4}{45}\frac{J_P'' + J_Q''}{J} \qquad (18)$$

Здесь индексы S, P, Q указывают на дифференцирование по длинам дуг криволинейных осей x^1, x^2, x^3

$$P = \int \sqrt{g_{22}}\, dx^2, \qquad Q = \int \sqrt{g_{33}}\, dx^3$$

а k_1, k_2 и δ_1, δ_2 — главные кривизны поверхностей $x^2 = \text{const}$ и $x^3 = \text{const}$, соответственно, вычисленные при $x^1 = 0$

$$k_1 = -\frac{1}{2b_0^{1/2}}\frac{a_{02}'}{a_0}, \quad k_2 = -\frac{1}{2b_0^{1/2}}\frac{c_{02}'}{c_0}, \quad \delta_1 = -\frac{1}{2c_0^{1/2}}\frac{a_{03}'}{a_0}, \quad \delta_2 = -\frac{1}{2c_0^{1/2}}\frac{b_{03}'}{b_0}$$

Формулы (6)—(9) определяют аналитическое решение уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом. Каждый следующий член разложения находится из линейного алгебраического уравнения (9). Эти уравнения, однако, быстро становятся все более и более громоздкими. Поэтому представляется целесообразным обратиться к быстродействующим электронным машинам для получения решения с достаточно высокой точностью. Таким образом, может быть осуществлен расчет двумерных и пространственных течений с поверхности заданной формы и с заданной плотностью тока эмиссии и построены семейства эквипотенциальных поверхностей, каждая из которых может быть взята в качестве коллектора.

Поступила 25 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Gabor D. E. Dynamics of Electron Beams. Proc. IRE, 1945, vol. 33, No. 11.
2. Lucas A. R. The Relativistic Flow of Electrons in Parallel and Radial Straight Lines with no Externally Imposed Magnetic Field. J. Electr. Contr., 1958, vol. 5, No. 3.
3. Норден А. П. Теория поверхностей. Гостехиздат, 1956.
4. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. Изд. иностр. лит., 1958.
5. Child C. D. Discharge from Hot CaO. Phys. Rev., 1911, vol. 32, No. 5.
6. Langmuir I. The Effect of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum. Phys. Rev., 1913, vol. 2, No. 5.
7. Langmuir I., Blodgett K. B. Currents Limited by Space Charge Between Coaxial Cylinders. Phys. Rev., 1923, vol. 22, No. 4.
8. Bottenberg H., Zinke O. Über Potential und Perveanz der Zylinderdiode im Raumladungsgebiet. Arch. elektr. Übertrag., 1964, B. 18, H. 6.