УДК 621.822.5

О. Н. Дементьев, В. А. Махова

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ

Численно решается задача о движении вращающегося твердого неуравновешенного цилиндра в неподвижной круговой цилиндрической камере, которая имеет конечную длину и заполнена вязким газом. На внутренний цилиндр действуют внешние периодически меняющиеся во времени силы. Рассчитаны орбиты установившегося движения ротора для различных значений скорости его вращения, величины дисбаланса, амплитуды и частоты внешних сил. Определены условия бесконтактного движения вращающегося цилиндра в камере.

1. Рассмотрим два коаксиальных круговых цилиндра длины L и радиусов R_1 и R_2 (рис. 1). Пространство между цилиндрами заполнено вязким газом. Центр масс внутреннего жесткого сплошного цилиндра (ротора) расположен вне его оси вращения (статическая неуравновешенность). Ротор вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω. Внешний цилиндр (камера) неподвижен. Зазор между цилиндрами значительно меньше их радиусов, поэтому для нахождения распределения давления в тонком слое газа можно использовать уравнения Рейнольдса. В цилиндрической системе координат (r, φ, z), ось z которой направлена вдоль оси внешнего цилиндра, уравнение для давления p имеет вид [1]

$$(1.1)\qquad \frac{1}{12\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\frac{1}{12\mu R_1^2}\left(h^3\rho\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\frac{\omega}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho h),$$

где ρ — плотность газа; $h=h(\varphi)$ — местная толщина зазора между цилиндрическими поверхностями ($R_1\leqslant r\leqslant R_1+h$); μ — коэффициент динамической вязкости газа.

Граничные условия:

$$(1.2)\qquad \text{при } z=\pm L/2\; p=p_0$$

(p_0 — давление в окружающей слой среде).

По найденному из задачи (1.1), (1.2) полю давления в слое газа определим силу, приложенную к вращающемуся цилиндру длины L со стороны газа:

$$(1.3)\qquad F_x=-2\int_0^{L/2}\int_0^{2\pi}pR_1\cos\varphi\,dz\,d\varphi,\quad F_y=-2\int_0^{L/2}\int_0^{2\pi}pR_1\sin\varphi\,dz\,d\varphi.$$

При вычислении реакции слоя газа были учтены лишь силы давления, которые в принятом при выводе уравнения для давления (1.1) приближении много больше сил трения [2].

Движение в поле тяжести вращающегося цилиндра под действием внешних периодически меняющихся во времени сил описывается уравнениями (в системе координат, связанной с центром неподвижной камеры)

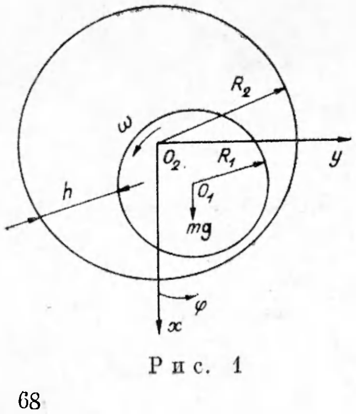

Рис. 1

$$(1.4)\qquad m\ddot{x}=F_x+m\delta\omega^2\cos\omega t+mg(1+a_1\cos\omega_1 t),$$
$$m\ddot{y}=F_y+m\delta\omega^2\sin\omega t+mga_2\sin\omega_1 t.$$

Здесь m — масса ротора; δ — величина смещения центра масс от оси вращения ротора; g — ускорение свободного падения; a_1, a_2 — амплитуды внешних периодических воздействий (например, случай движения металлического цилиндра в переменном электромагнитном поле); ω_1 — частота внешних воздействий. В начальный момент времени ось вращения ротора совпадает с осью камеры.

2. Задачу о движении ротора будем решать методом прямого численного интегрирования системы уравнений, описывающих движение цилиндра и распределение давления в слое газа. Перепишем уравнение (1.1) в виде закона сохранения для объема $R_1\Delta\varphi\Delta z h_j$, охватывающего узел i, j сетки в цилиндрической системе координат [3] ($\Delta\varphi$ — размер шага по углу, а Δz — по координате):

$$(2.1)\quad R_1\Delta\varphi\Delta z\frac{\partial}{\partial t}(h_j\rho_{i,j}) - \frac{h_j^3\Delta\varphi R_1}{12\mu\Delta z}[\rho_{i+1/2,j}(-p_{i,j}+p_{i+1,j}) - \rho_{i-1/2,j}(p_{i,j} - p_{i-1,j})] - \frac{\Delta z}{12\mu R_1\Delta\varphi}\left[\rho_{i,j+1/2}h_{j+1/2}^3(p_{i,j+1}-p_{i,j}) - \rho_{i,j-1/2}h_{j-1/2}^3(p_{i,j} - p_{i,j-1})\right] + \frac{\omega R_1\Delta z}{2}(\rho_{i,j+1/2}h_{j+1/2} - \rho_{i,j-1/2}h_{j-1/2}) = 0$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ I-1,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ J).$$

Здесь $\Delta\varphi = 2\pi/J$; $\Delta z = L/2I$; $\varphi_j = j\Delta\varphi$; $h_j = C - x\cos\varphi_j - y\sin\varphi_j$; C — среднее значение радиального зазора; I, J — числа узлов сетки в осевом и окружном направлениях. Связь между давлением и плотностью газа задается соотношением $p/\rho = \mathrm{const}$.

Граничные условия (1.2) в конечно-разностной форме имеют вид

$$(2.2)\quad p_{I,j} = p_0,\ p_{-1,j} = p_{1,j},\ p_{i,0} = p_{0,J},\ p_{i,J+1} = p_{i,1}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ I,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ J).$$

При записи соотношений (2.2) использованы условия периодичности $p(z,\ \varphi) = p(z,\ \varphi + 2\pi)$ и гладкости $(\partial p/\partial z)_{z=0} = 0$.

Запишем уравнения (2.1) в безразмерном виде, используя следующие единицы измерения: расстояния поперек слоя C, расстояния вдоль слоя R_1, времени $1/\omega$, давления p_0:

$$(2.3)\quad 2\Lambda\Delta\varphi\Delta z\frac{\partial}{\partial t}(h_j\rho_{i,j}) - h_j^3\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}[\rho_{i+1/2,j}(p_{i+1,j} - p_{i,j}) - \rho_{i-1/2,j}(p_{i,j} - p_{i-1,j})] - \frac{\Delta z}{\Delta\varphi}\left[\rho_{i,j+1/2}h_{j+1/2}^3(p_{i,j+1} - p_{i,j}) - h_{j-1/2}^3\rho_{i,j-1/2}(p_{i,j} - p_{i,j-1})\right] + \Lambda\Delta z(\rho_{i,j+1/2}h_{j+1/2} - \rho_{i,j-1/2}h_{j-1/2}) = 0$$
$$(h_j = 1 - x\cos\varphi_j - y\sin\varphi_j).$$

В уравнениях (2.3) для безразмерных величин сохранены те же обозначения, что и для размерных.

Применяя метод переменных направлений [4], сведем поставленную задачу расчета поля давления в слое к последовательности одномерных задач, причем коэффициенты, нелинейные члены и массовые расходы газа в осевом направлении отнесем к моменту времени $t_{k+1/2}$ (k — номер шага по времени), а остальные величины — к t_k. Производную $\partial p/\partial t$ аппроксимируем разностной формулой второго порядка, центрированной относительно $t_{k+1/4}$. Полученную нелинейную разностную систему уравнений решаем вдоль строк сетки, рассматривая индекс j в качестве параметра, методом прогонки. Начальное приближение $p_{i,j}^0$ на каждом шаге по времени определяем с помощью линейной экстраполяции

$$(p_{i,j}^{k+1/2})^0 = 1{,}5p_{i,j}^k - 0{,}5p_{i,j}^{k-1}\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем на первом шаге по времени $(p_{i,j}^{1/2})^0 = p_{i,j}^0$.

На следующем этапе метода переменных направлений в уравнениях (2.3) отнесем линейные составляющие массовых расходов в окружном направлении к t_{k+1}, а коэффициенты и остальные члены уравнений — к $t_{k+1/2}$, производную $\partial p/\partial t$ центрируем относительно $t_{k+3/4}$. Далее, следуя методу циклической прогонки [5], находим давление во всех узлах сетки и силу, действующую на ротор со стороны газового слоя в момент времени t_{k+1}.

Численное интегрирование уравнений движения ротора (1.4) проводим по следующей схеме:

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &x_{k+1/2} = x_{k-1/2} + \dot{x}_k\Delta t,\ y_{k+1/2} = y_{k-1/2} + \dot{y}_k\Delta t,\\ &\dot{x}_{k+1/2} = \dot{x}_{k-1/2} + f_{xk}\Delta t,\ \dot{y}_{k+1/2} = \dot{y}_{k-1/2} + f_{yk}\Delta t,\\ &x_{k+1} = x_k + \dot{x}_{k+1/2}\Delta t,\ y_{k+1} = y_k + \dot{y}_{k+1/2}\Delta t,\\ &\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + f_{xk+1/2}\Delta t,\ \dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + f_{yk+1/2}\Delta t.\end{aligned}$$

Здесь

$$f_x = \frac{1}{M\Lambda^2}\left[\frac{mg\,(1 + a_1\cos\omega' t)}{p_0 R_1^2} - \frac{2}{9}\,\Delta\varphi\Delta z\sum_{i,j=0}^{I,J} S_{i,j}\sqrt{p_{i,j}}\cos\varphi_j\right] + \delta'\cos t;$$

$$f_y = \frac{1}{M\Lambda^2}\left[\frac{mga_2\sin\omega' t}{p_0 R_1^2} - \frac{2}{9}\,\Delta\varphi\Delta z\sum_{i,j=0}^{I,J} S_{i,j}\sqrt{p_{i,j}}\sin\varphi_j\right] + \delta'\sin t;$$

$$M = \frac{mp_0}{36\mu^2 R_1}\left(\frac{C}{R_1}\right)^5;\ \delta' = \frac{\varepsilon}{C};\ \omega' = \frac{\omega_1}{\omega};$$

$S_{i,j}$ — коэффициент кубатурной формулы Симпсона.

Систему уравнений (2.4) решаем с однородными начальными условиями:

$$(2.5)\qquad \text{при } t = 0\quad x_0 = y_0 = 0,\ \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0,$$

причем $p_{i,j}^0 = 1$.

В начале счета использована аппроксимация $x_{1/2} = x_0 + \dot{x}_0\Delta t/2$, $y_{1/2} = y_0 + \dot{y}_0\Delta t/2$, $\dot{x}_{1/2} = \dot{x}_0 + f_{x0}\Delta t/2$, $\dot{y}_{1/2} = \dot{y}_0 + f_{y0}\Delta t/2$.

3. Рассмотрим движение вращающегося неуравновешенного ротора в поле тяжести без периодических воздействий ($a_1 = a_2 = 0$). Ротор, находящийся в начальный момент времени в центре камеры, начинает в дальнейшем двигаться. На рис. 2 показано формирование установившейся траектории движения ротора при скорости вращения $n = 100$ об/с и $\delta' = 0{,}3$ — кривая *1*. Кривые *2*, *3* отвечают установившемуся движению ротора с $n = 140$ и 150 об/с. Орбиты установившегося движения ротора, показанные на рис. 2, 3, близки к круговым.

Перейдем к изучению движения ротора при наличии заданных внешних периодических возмущений конечной амплитуды. Зададим возмущения лишь по вертикали, т. е. положим $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, а также $\omega_1 = \omega$

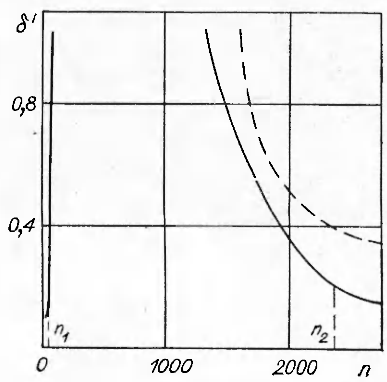

Рис. 3

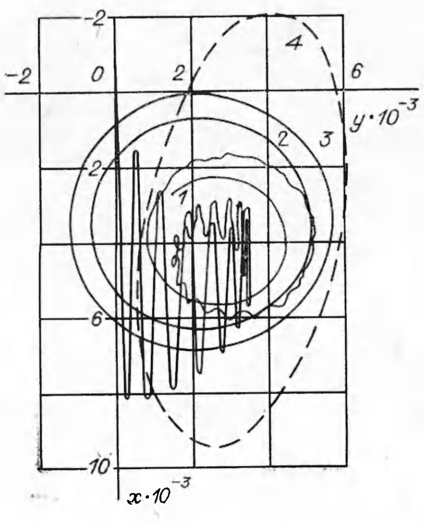

Рис. 2

(частоты вращения ротора и внешних возмущений совпадают). Расчеты траекторий движения ротора проведены для значений скорости его вращения n в интервале от 60 до 2500 об/с при изменении относительного дисбаланса δ' от 0,1 до 1 (на рис. 2 траектория *4* соответствует $n = 100$ об/с, $\delta' = 0{,}3$). Установившиеся орбиты движения ротора близки к эллиптическим. Оказывается, что при малых ($n < n_1$) и больших ($n > n_2$) скоростях вращения движение цилиндра неустойчиво: стационарные замкнутые траектории оси вращения не формируются, происходит соприкосновение ротора с камерой. Как следует из рис. 3, существует ограниченная зона скоростей вращения ротора $[n_1, n_2]$ для фиксированного значения дисбаланса, где возможно движение ротора без возникновения контакта с камерой. Левая граница ($n = n_1$) зоны формирования установившихся орбит практически не зависит от относительного дисбаланса, правая же отодвигается в область больших скоростей вращения с уменьшением дисбаланса.

Малая эллиптичность камеры (функция зазора в этом случае имела вид $h_j = 1{,}066—0{,}133 \cos^2 \varphi_j - x \cos \varphi_j - y \sin \varphi_j$) приводит к расширению зоны формирования устойчивых эллиптических траекторий за счет увеличения наибольшей критической скорости вращения n_2. Это иллюстрирует штриховая линия на рис. 3.

Зависимость наибольшего размаха орбиты a от скорости вращения ротора показана на рис. 4 ($\delta' = 0{,}3$, кривая *1*). При увеличении скорости вращения в 10 раз (от 10^2 до 10^3 об/с) a возрастает в 33 раза.

Влияние горизонтальных периодических возмущений показано на рис. 5, где кривая *1* отвечает $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\omega_1 = \omega = 2\pi\ 150\ с^{-1}$, кривые *2* и *3* — $a_1 = 0$, $a_2 = 0{,}1$, $\omega_1 = 1\ с^{-1}$, $n = 150$ и 100 об/с ($\delta' = 0{,}3$). Практически совпадает с линией *2* орбита ротора со скоростью вращения $n = 150$ об/с и $\omega_1 = \omega$. Увеличение амплитуды горизонтальных возмущений a_2 до 10 при низкочастотных возмущениях ($\omega_1 = 1\ с^{-1}$) практически не искажает установившихся круговых траекторий движения ротора и не приводит к их разрушению. Этот вывод подтверждают расчеты, проведенные для скоростей вращения цилиндра в интервале от 100 до 500 об/с. При амплитуде внешних воздействий $a_2 = 100$ ($a_1 = 0$, $\omega_1 = 1\ с^{-1}$, $n = 150$ об/с) ротор очень быстро приходит в соприкосновение с камерой.

Исследование влияния степени неуравновешенности ротора на формирование установившихся орбит при наличии горизонтальных периодических воздействий проводилось для $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\omega_1 = \omega = 200\pi\ с^{-1}$. Относительный дисбаланс δ' изменялся в пределах от 0,1 до 1. Размах установившихся эллиптических орбит возрастает почти в 2 раза при изменении δ' от 0,2 до 1 (рис. 4, кривая *2*).

Изменение дисбаланса от 0,1 до 0,5 при наличии вертикальных возмущений с частотой, равной половине частоты вращения ротора ($\omega = 200\pi\ с^{-1}$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$) не оказывает существенного влияния на форму и ориентацию установившихся траекторий ротора. Воздействие вертикальных возмущений конечной амплитуды по сравнению со случаем отсутствия возмущений (см. рис. 2) приводит к увеличению размаха уста-

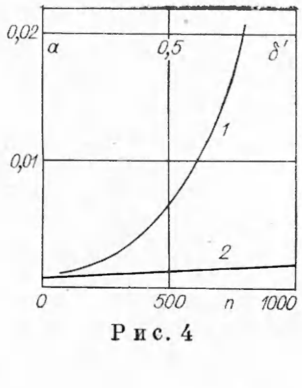

Рис. 4

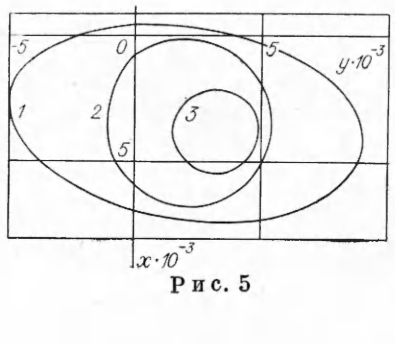

Рис. 5

новившейся траектории в 8—9 раз, смещению центра орбиты из первой четверти в третью на плоскости (x, y) и превращению круговой орбиты в эллиптическую. В расчетах на ЭВМ ЕС-1033 в основном использовались сетки 16×40 и 24×60.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Константинеску В. Н.** Газовая смазка.— М.: Машиностроение, 1968.
2. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1978.
3. **Агишев Г. Г.** Метод исследования динамики ротора, вращающегося в радиальных газовых подшипниках // Машиноведение.— 1984.— № 2.
4. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.
5. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.

г. Челябинск *Поступила 21/III 1988 г., в окончательном варианте — 20/IV 1990 г.*

УДК 532.543

П. Г. Петров

ДВИЖЕНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В ПРИДОННОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Задача состоит в математическом моделировании тонкого движущегося слоя двухфазной смеси, ограниченного снизу неподвижной сыпучей средой, сверху — потоком жидкости. Положение верхней границы движущегося слоя предполагается заданным, на ней заданы нормальные и касательные напряжения. Эти характеристики могут быть получены из решения уравнений гидродинамики.

Движущаяся смесь предполагается однородной, ускорение смеси — малым (и не учитывается). Как принято в уравнениях мелкой воды [1], вклад касательных напряжений на площадках, нормальных поверхности, мал и не учитывается, давление распределяется по гидростатическому закону.

Постановка задачи. В соответствии с принятыми допущениями уравнения движения запишутся в виде

$$\partial p/\partial s + \rho g \partial \xi/\partial s + \partial \tau_s/\partial m = 0, \tag{1}$$

$$\partial p/\partial l + \rho g \partial \xi/\partial l + \partial \tau_l/\partial m = 0, \ \partial p/\partial m = \rho g \cos \gamma,$$

где $\xi = \xi(x, y)$— уравнение поверхности смеси; x и y — декартовы горизонтальные координаты; s и l — ортогональные криволинейные координаты, лежащие на поверхности смеси; m — ось, направленная по нормали к поверхности смеси вниз ($m = 0$ на поверхности $\xi = \xi(x, y)$); p — давление в смеси; τ_s и τ_l — проекции касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}$ на площадках, параллельных поверхности смеси; ρ — плотность смеси ($\rho = f\rho_r + (1 - f)\rho_b$); ρ_r и ρ_b — плотность частиц и воды; f — концентрация, значение которой определено ниже; γ — острый угол между нормалью к поверхности смеси и вертикальной линией.

Реологическое соотношение для касательного напряжения включает в себя закон Кулона для сыпучей среды и закон Прандтля для жидкости:

$$\boldsymbol{\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m}\bigg/\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m}\right|\right)(p_s \operatorname{tg} \varphi + \tau_b). \tag{2}$$

Здесь p_s — дополнительное давление в смеси, возникающее за счет частиц: $p_s = \rho_s g m \cos \gamma$; $\rho_s = \rho - \rho_b = f(\rho_r - \rho_b)$; φ — угол внутреннего трения (принимается, как для покоящейся смеси, равным 28°); $\tau_b = \rho_b L^2 |\partial \mathbf{u}/\partial m|^2$; L — длина пути смещения ($L = \varkappa(a - m)$); a — толщина слоя движущейся смеси; $\varkappa$ — постоянная Кармана, согласно опытам Никурадзе для чистой воды, равная 0,4, для смеси в [2] в зависимости от концентрации $\varkappa$ имеет меньшие значения, например, при $f = 0{,}2 \div 0{,}3$ $\varkappa = 0{,}2$.

В движущемся слое смеси ($m \leqslant a$) из (2) следует $|\boldsymbol{\tau}| = \rho_s \operatorname{tg} \varphi + \tau_b$, в неподвижном слое смеси (нижнем) ($m \geqslant a$) $|\boldsymbol{\tau}| \leqslant p_s \operatorname{tg} \varphi$. Таким обра-