для цилиндра

$$\frac{\bar{r}}{b} = \left[\frac{(g+2)(\lambda^{2/n}-1)}{\lambda^{(2g+4)/n}-1}\right]^{n/(2g+2)} (1 < n - g < 2). \tag{33}$$

Видно, что координаты (32), (33) незначительно отличаются от соответствующих координат пересечения эпюр упругого распределения с установившимся, а при $n \to \infty$ в точности совпадают с координатами пересечения упругого распределения интенсивности напряжений с распределением идеально пластическим. Этот результат совместно с (30), (31) дает возможность без привлечения ЭВМ (или с минимальным ее использованием) даже в случае $\beta \neq 1$ рассчитать по соотношениям (8), (9) напряженно-деформированное состояние сосудов высокого давления в качестве ориентировочной оценки при проектировании. Нижняя оценка времени разрушения определяется из (29) или из выражения $t_* \geqslant \bar{t}_*^0$, предложенного в работе [5]. Для случая $\beta = 1$ соотношения (8), (9) совместно с (30), (31) и (29) дают точное решение.

Поступила 19 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966.
2. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
3. **Работнов Ю. Н.** О разрушении вследствие ползучести.— ПМТФ, 1963, № 2.
4. **Соснин О. В.** О варианте теории ползучести с энергетическими параметрами упрочнения.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., Машиностроение, 1975.
5. **Leckie F. A., Hayhurst D. R.** Creep rupture of structures.— Proc. Royal Soc. Lond. 1974, A 340.

УДК 539.1

О ПРИНЦИПЕ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Ю. А. Боган

(*Новосибирск*)

Наличие сильной анизотропии у современных композиционных материалов (как следствие, в обобщенном законе Гука для осредненных напряжений присутствуют большие параметры) приводит к тому, что предельные модели [1] характеризуются явлением «распространения» напряженного состояния.

В связи с этим возникает вопрос, в какой мере принцип Сен-Венана остается справедливым для сред с нерастяжимыми волокнами? Как показано ниже, для сред с нерастяжимыми волокнами при определенных условиях имеет место экспоненциальность убывания потенциальной энергии деформации при удалении от области приложения самоуравновешенной нагрузки [2], однако отсюда, вообще говоря, нельзя сделать вывода об экспоненциальности затуханий при удалении от нагруженного участка.

Таким образом, при применении принципа Сен-Венана к средам с нерастяжимыми волокнами его необходимо формулировать в ослабленной, интегральной форме без локальных оценок напряженного состояния конструкции.

1. Не привязываясь к какой-либо конкретной модели линейно-упругого композиционного материала, соотношения обобщенного закона Гука возьмем в виде

$$\sigma_\xi = A_{11}\varepsilon_\xi + A_{12}\varepsilon_\eta, \quad \sigma_\eta = A_{12}\varepsilon_\xi + A_{22}\varepsilon_\eta, \quad \tau_{\xi\eta} = G\gamma_{\xi\eta}, \tag{1.1}$$

где $\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha$; $\eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$; $0 \leqslant \alpha < \pi$ — некоторый постоянный угол; (x, y) — декартовы ортогональные координаты. Положим

$$\varepsilon^{-2} = A_{11}G^{-1},\ d_{12} = A_{12}G^{-1},\ d = A_{22}G^{-1},$$
$$\bar\sigma_\xi = \sigma_\xi G^{-1},\ \bar\sigma_\eta = \sigma_\eta G^{-1},\ \bar\tau_{\xi\eta} = \tau_{\xi\eta} G^{-1}$$

и сохраним в дальнейшем для безразмерных напряжений прежние обозначения. Предположим, что $\varepsilon \ll 1$. Данный случай соответствует однонаправленному композиционному материалу с очень жесткими волокнами, параллельными оси ξ. Переходя в соотношениях (1.1) к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим определяющие соотношения

(1.2) $$\sigma_\xi = q_1 + d_{12}\varepsilon_\eta,\ \sigma_\eta = d\varepsilon_\eta,\ \tau_{\xi\eta} = \gamma_{\xi\eta},\ \varepsilon_\xi = 0.$$

В (1.2) $q_1 = q_1(\xi, \eta)$ — множитель Лагранжа, соответствующий кинематическому ограничению нерастяжимости вдоль оси ξ. При $\varepsilon \neq 0$ уравнение для функции напряжений $w(\xi, \eta)$ при отсутствии объемных сил имеет вид

(1.3) $$d\varepsilon^2\partial^4 w/\partial\eta^4 + (d - \varepsilon^2 c)\partial^4 w/\partial\xi^2\partial\eta^2 + \partial^4 w/\partial\xi^4 = 0,$$

где $c = d_{12}^2 + 2d_{12}$. В пределе при $\varepsilon \to +0$ уравнение (1.3) переходит в уравнение

(1.4) $$d^{-1}\partial^4 w/\partial\xi^4 + \partial^4 w/\partial\xi^2\partial\eta^2 = 0.$$

В отличие от уравнения (1.3) уравнение (1.4) уже не является эллиптическим, а имеет составной тип [3] с двойным семейством вещественных характеристик $\eta \equiv \mathrm{const}$.

2. Рассмотрим вопрос о влиянии сильной анизотропии на «скорость» затухания напряжений в ортотропной полуполосе. В [4] при помощи численного анализа было показано на некоторых примерах, что при очень жесткой арматуре, параллельной длинным сторонам, напряжения при удалении от торца затухают значительно медленнее, чем в изотропном случае. Задача о полуполосе представляет интерес в связи со следующими обстоятельствами: она является модельной для принципа Сен-Венана; решение задачи о полуполосе является погранслойной компонентой в асимптотике первой краевой задачи теории упругости для прямоугольной области при малости одного из измерений [5] и, таким образом, позволяет выяснить вопрос о влиянии размеров области на «скорость» затухания напряжений в пограничном слое при сильной анизотропии материала. Ответ на последний вопрос имеет практическое значение. Действительно, если необходимо измерить осредненные механические характеристики однонаправленного композиционного материала, то образец необходимо выбирать достаточно длинным для того, чтобы исключить влияние медленно затухающего пограничного слоя.

Пусть $Q = \{(x, y),\ |y| \leqslant h,\ 0 \leqslant x < +\infty\}$ — упругая полуполоса, оси ортотропии параллельны сторонам полуполосы. Поставим при $x = 0$ и $y = \pm h$ следующие граничные условия:

(2.1) $$\sigma_x|_{x=0} = p_1(y),\ \tau_{xy}|_{x=0} = p_2(y),\ \sigma_y|_{y=\pm h} = 0,\ \tau_{xy}|_{y=\pm h} = 0.$$

В предположении самоуравновешенности нагрузки и конечности потенциальной энергии деформации [6] краевая задача (1.3), (2.1) имеет единственное решение, экспоненциально убывающее на бесконечности. Решение краевой задачи (1.3), (2.1) представляется в виде [7]

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n x} w_n(y),$$

где $w_n(y)$ — собственные функции; λ_n — собственные числа следующей спектральной задачи:

$$d\varepsilon^2 \frac{d^4 w_n}{dy^4} + \lambda_n^2 (d - \varepsilon^2 c) \frac{d^2 w_n}{dy^2} + \lambda_n^4 w_n = 0; \tag{2.2}$$

$$w_n(\pm h) = 0, \quad \frac{dw_n}{dy}(\pm h) = 0. \tag{2.3}$$

Спектральная задача (2.2), (2.3) является сингулярно возмущенной (малый параметр входит множителем при старшей производной). Асимптотическое поведение при $\varepsilon \to +0$ спектральных задач этого рода хорошо изучено [8]. Из результатов [8] следует, что вблизи границ $y = \pm h$ возникает явление пограничного слоя, так как в пределе при $\varepsilon \to +0$ не удовлетворяется граничное условие $dw_n/dy(\pm h) = 0$. Укороченная задача имеет вид

$$d \frac{d^2 w_n}{dy^2} + \lambda_n^2 w_n = 0, \quad w_n(\pm h) = 0.$$

Собственные числа имеют асимптотику вида $\lambda_n(\varepsilon) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_n^{(k)} \varepsilon^k$, где $\lambda_n^{(0)} = 0$ или собственному числу укороченной задачи. Соответствующие собственные функции имеют асимптотику вида

$$w_n(y, \varepsilon) = \varepsilon G_1^{(n)}(y, \lambda_n(\varepsilon), \varepsilon) \exp\left[-\varepsilon^{-1}\lambda_n(\varepsilon)(h - y)\right] +$$
$$+ \varepsilon G_2^{(n)}(y, \lambda_n(\varepsilon), \varepsilon) \exp\left[-\varepsilon^{-1}\lambda_n(\varepsilon)(h + y)\right] + z_n(y, \varepsilon)$$

и в пределе $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} w_n(y, \varepsilon) = z_n(y, 0)$ или нуль, где $z_n(y, 0)$ — собственная функция укороченной задачи. Вблизи концов интервала $(-h, h)$ сходимость не является равномерной. В данном случае собственные числа и собственные функции укороченной задачи определяются в явном виде:

$$\lambda_n = + \frac{n\pi}{h} d^{1/2}, \quad z_n(y, 0) = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi y}{h}.$$

Таким образом, из предыдущих рассуждений можно сделать следующий вывод: при $\varepsilon \to +0$ решение краевой задачи (1.3), (2.1) теряет свойство экспоненциальности затухания. Действительно, в пределе при $\varepsilon \to +0$ для полуполосы, армированной нерастяжимыми нитями, параллельными оси x, получаем следующее представление решения:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \frac{hd^{-1/2}}{n\pi}\left(1 - \exp\left(-n\pi x d^{1/2} h^{-1}\right)\right) b_n\right] \sin \frac{n\pi y}{h} \tag{2.4}$$

(a_n и b_n определяются через значения σ_x и τ_{xy} при $x = 0$), из которого следует, что $w(x, y)$ будет экспоненциально затухать на бесконечности только при $\sigma_x(0, y) = 0$. Представляет интерес то обстоятельство, что хотя предельное решение (2.4) само не затухает на бесконечности экспоненциально, но для потенциальной энергии деформации имеет место оценка

$$E(z) \leqslant E(0) \exp\left[-2kz\right], \tag{2.5}$$

где

$$2E(z) = \iint\limits_{Q_z} \left(d^{-1}\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2\right) dxdy; \quad Q_z = \{(x, y) \in Q, \quad x > z\}.$$

Действительно,

$$2E(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{h} d^{-1/2} b_n^2 \exp\left[-2n\pi z d^{1/2} h^{-1}\right].$$

Так как $\exp[-2n\pi z d^{1/2} h^{-1}] \leqslant \exp[-2\pi z d^{1/2} h^{-1}]$ при $n \geqslant 1$, отсюда получаем оценку (2.5) с постоянной k, равной $\pi d^{1/2} h^{-1}$.

3. Исследуем теперь влияние сильной анизотропии на «скорость» затухания напряжений в пограничном слое в следующих двух случаях: а) прямоугольная область удлинена вдоль оси x; б) прямоугольная область удлинена вдоль оси y, а очень жесткая арматура параллельна оси x. Асимптотическое разложение первой краевой задачи теории упругости для очень длинного ортотропного прямоугольника построено в [5].

Рассмотрим сначала случай «а». Пусть $Q = \{(x, y),\ 0 \leqslant x \leqslant a, |y| \leqslant h\}$, $\gamma = h/a \ll 1$. В этом случае вблизи сторон $x = 0, a$, как показано в [5], возникает явление пограничного слоя при малом γ. При этом функции типа пограничного слоя являются решениями краевой задачи (1.3), (2.1) для упругой полуполосы. Решение типа пограничного слоя при малом γ имеет представление $w = \sum\limits_n w_n(\eta) \exp(-\lambda_n t)$, где $t = x/a\gamma$; $\eta = y/h$; $w_n(\eta)$ и λ_n определяются из решения спектральной задачи (2.3), (2.4). Как было показано выше, спектральная задача (2.3), (2.4) является сингулярно возмущенной относительно параметра ε. Следовательно, в решении типа пограничного слоя по γ присутствуют экспоненты двух типов: $\exp\left[-\frac{\lambda_n^{(1)}\varepsilon x}{a\gamma}\right]$ и $\exp\left[-\frac{\lambda_n^{(0)} x}{a\gamma}\right]$, так как или $\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_n^{(0)} + \varepsilon\lambda_n^{(1)} + \ldots$, или $\lambda_n(\varepsilon) = \varepsilon\lambda_n^{(1)} + \ldots$ Наличие экспонент первого типа показывает, что «скорость» убывания напряжений в пограничном слое по γ существенно зависит от отношения ε/γ, т. е. от взаимного влияния размеров области и степени анизотропии материала. Например, при $\varepsilon = o(\gamma^2)$ напряжения в пограничном слое будут затухать весьма медленно.

Рассмотрим случай «в». Пусть $Q = \{(x, y),\ |x| \leqslant h,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Можно показать непосредственно, что экспоненциальность затухания пограничного слоя по γ при $\varepsilon \to +0$ сохраняется. Действительно, в этом случае собственные значения спектральной задачи

$$\frac{d^4 w_n}{d\eta^4} + \lambda_n^2 (d - \varepsilon^2 c) \frac{d^2 w_n}{d\eta^2} + d\varepsilon^2 \lambda_n^4 w_n = 0, \tag{3.1}$$

$$w_n(\pm 1) = 0, \quad \frac{dw_n}{d\eta}(\pm 1) = 0, \quad \eta = x/h$$

определяются из системы уравнений [5]

$$\begin{gathered} v \sin\lambda_n v \cos\lambda_n u - u \sin\lambda_n u \cos\lambda_n v = 0, \\ v \cos\lambda_n v \sin\lambda_n u - u \cos\lambda_n u \sin\lambda_n v = 0, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$u^2 = (d - \varepsilon^2 c + D)/2;\ v^2 = (d - \varepsilon^2 c - D)/2;\ D = [(d - \varepsilon^2 c)^2 - 4d\varepsilon^2]^{1/2}.$$

При малом $\varepsilon > 0$ $u^2 \sim d - \varepsilon^2(1 + c) + o(\varepsilon^4)$, $v^2 \sim \varepsilon^2 + o(\varepsilon^4)$. Переходя в (3.2) к пределу при $\varepsilon \to +0$, для определения λ_n получим соотношения $\sin\lambda_n\sqrt{d} = 0$, $\operatorname{tg}\lambda_n\sqrt{d} = \lambda_n\sqrt{d}$, из которых следует, что при $\varepsilon = 0$ спектральная задача (3.1) имеет две серии отрицательных собственных значений.

Таким образом, качественное поведение решений типа пограничного слоя при малом γ в этих двух случаях существенно различно.

4. Необходимо отметить, что если характеристики предельных уравнений непараллельны границе полуполосы, то имеет место экспоненциальность затухания напряжений вдали от нагруженной стороны. Пусть, например, Q — упругая полуполоса, армированная двумя семействами нерастяжимых волокон, расположенных под углами $\pm\pi/4$ к оси x. При переходе в уравнении (1.4) к пределу при $d \to +\infty$ и замене координат (ξ, η), $\xi = 2^{-1/2}(x + y)$, $\eta = 2^{-1/2}(y - x)$ на координаты x, y уравнение для функции напряжений приобретает вид

$$\partial^4 w/\partial x^4 - 2\partial^4 w/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w/\partial y^4 = 0. \tag{4.1}$$

Так как граница не является характеристической, граничные условия берутся в виде (2.1). Как и в случае анизотропной среды, в предположении самоуравновешенности нагрузки на стороне $x = 0$ уравнение (4.1) при граничных условиях (2.1) имеет единственное решение:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_n x)\, w_n(y),$$

где λ_n — собственные числа; w_n — собственные и присоединенные функции следующей спектральной задачи:

$$\frac{d^4 w_n}{dy^4} - 2\lambda_n^2 \frac{d^2 w_n}{dy^2} + \lambda_n^4 w_n = 0,\ w_n(\pm h) = 0,\ \frac{dw_n}{dy}(\pm h) = 0.$$

Для определения собственных чисел получаем уравнение

$$(2\lambda_n h)^2 - \operatorname{sh}^2(2\lambda_n h) = 0. \tag{4.2}$$

При замене переменной $z = i2\lambda_n h$, $i = \sqrt{-1}$, оно переходит в уравнение $z^2 - \sin^2 z = 0$, встречающееся при решении первой краевой задачи для изотропной полосы [9]. Корни последнего уравнения комплексны, асимптотика больших по модулю корней уравнения $z^2 - \sin^2 z = 0$ дается соотношением

$$z \sim \pm \frac{2t+1}{4}\pi \pm i \ln\left(\frac{2t+1}{2}\right). \tag{4.3}$$

Следовательно, уравнение (4.2) имеет две серии собственных значений с $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$; при этом, как показывает формула (4.3), затухание на бесконечности будет происходить медленнее, чем в изотропном случае; как и в случае анизотропной среды, сохраняется экспоненциальность затухания потенциальной энергии деформации материала.

Поступила 28 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пипкин А. С.** Конечные деформации идеальных волокнистых композитов.— В кн.: Механика композиционных материалов. Т. 2. М., Мир, 1978.
2. **Knowles J. K.** On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1966, vol. 21, N 1.
3. **Эскин Г. И.** Краевые задачи для уравнений с постоянными коэффициентами на плоскости. Матем. сб. 59(101) (дополнительный), 1962.
4. **Choi I., Horgan C. O.** Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity.— Trans. ASME, ser. E, 1977, vol. 44, N 3.
5. **Агаловян Л. А., Шачатрян М. Ш.** Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы.— Учен. зап. Ереванского ун-та, 1977, № 1.

6. **Джавадов М. Г.** Об m-кратной полноте половины собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора $2m$-го порядка.— ДАН СССР, 1965, т. 160, № 4.
7. **Агаловян Л. А., Шачатрян М. Ш.** Обобщенная ортогональность П. Ф. Папковича и условия существования затухающих решений в плоской задаче для ортотропной полуполосы.— ДАН Арм. ССР, 1975, т. 60, № 3.
8. **Handelman G. H., Keller J. B., O'Malley R. E.** Loss of boundary conditions in the asymptotic solution of linear ordinary differential equations. I. Eigenvalue problems.— Comm. Pure Appl. Math., 1968, vol. 21, N 3.
9. **Ворович И. И.** Постановка краевых задач теории упругости при бесконечном интеграле энергии и базисные свойства однородных решений.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., Машиностроение, 1975.

Зав. редакцией *Н. С. Калашникова*
Художественный редактор *Э. С. Филонычева*
Технический редактор *Ф. Ф. Орлова*
Корректоры *Г. Д. Смоляк, М. В. Ржевцева*

Сдано в набор 21.11.79. Подписано в печать 07.02.80. МН-05007. Формат 70 × 108 1/16. Высокая печать. Усл. печ. л. 15,4. Уч.-изд. л. 16,1. Тираж 2011 экз. Заказ № 751

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.