

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБОВ СЖАТЫХ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ

УДК 539.3

Н. С. Астапов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Точная зависимость между нагрузкой, продольно сжимающей гибкий упругий шарнирно опертый стержень, и прогибом дана Эйлером в виде полного эллиптического интеграла первого рода [1–3]. Равновесные закритические формы сжатых стержней были впервые исследованы Лагранжем и подробно изучены с применением таблиц эллиптических интегралов в [2]. Кроме того, существует много различных приближенных формул, выражающих прогиб через нагрузку, но приемлемых с инженерной точки зрения лишь для нагрузок, превышающих критическую не более чем на 10 %.

В данной работе предлагается приближенная формула, позволяющая на калькуляторах вычислять прогибы с относительной погрешностью не более 3 % вплоть до нагрузок, превышающих критическую (нагрузку Эйлера) в 3,5 раза. Показано, что после небольших упрощений построенной формулы можно получить более грубую формулу, которая точнее многих известных в литературе приближенных формул и качественно полнее описывает зависимость нагрузка — прогиб для любых нагрузок.

1. Постановка задачи. Точное решение. Рассмотрим гибкий упругий шарнирно опертый стержень, нагруженный осевой сжимающей силой P , сохраняющей величину и направление при деформации стержня. Предположим, что длина L осевой линии стержня неизменна, а ось стержня может изгибаться только в плоскости. Рассмотрим зависимость нагрузка — прогиб для равновесной конфигурации, ответвляющейся от неискривленной формы при первой критической нагрузке $P_* = EI(\pi/L)^2$ (EI — изгибная жесткость стержня). Заметим, что зависимость нагрузка — прогиб для высших форм равновесия, соответствующих следующим критическим нагрузкам, получается из предыдущей простым преобразованием масштаба [4, 5]. Построим приближенную формулу, позволяющую вычислять с погрешностью не более 3 % прогибы стержня для нагрузок, превышающих критическую в несколько раз. Сравним между собой и с точным решением различные известные приближенные формулы для вычисления прогибов стержня в зависимости от нагрузки.

Точная зависимость прогиба стержня от продольной нагрузки дается в параметрическом виде [2–5]

$$f = \frac{a}{L} = \frac{2k}{\pi\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda = \frac{P}{P_*} = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right)^2, \quad (1.1)$$

где параметр $0 \leq k \leq 1$ имеет геометрический смысл синуса половины угла между касательной к оси изогнутого стержня в его вершине и первоначально прямолинейным направлением стержня; $1 \leq \lambda$ — безразмерный параметр нагрузки; a и $f < 1/2$ — максимальные размерный и безразмерный прогибы стержня соответственно.

2. Приближенные формулы. Часто [2–6] приближенные формулы получают из

точных формул (1.1) путем разложения в степенной ряд по малому параметру k полного эллиптического интеграла первого рода:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \dots \right). \quad (2.1)$$

Другой способ получения приближенных формул — использование различных приближений (линеаризаций) исходного нелинейного дифференциального уравнения равновесия упругой линии стержня, в том числе с уточненными краевыми условиями, учитывающими продольное смещение опоры при изгибе стержня [1, 7–10]. Именно этим способом Мизес [7, с. 436] вывел формулу

$$f = (2\sqrt{2}/\pi)\sqrt{\lambda - 1}, \quad (2.2)$$

связывающую безразмерную нагрузку λ с максимальным безразмерным прогибом стержня f . Формула (2.2) получила наибольшее распространение особенно после того, как была построена различными способами [3, 4, 8, 11, 12]. Отметим, что в [3, с. 443; 4, с. 32] она получена из приближения точного решения отрезками рядов, т. е. первым способом, а в [11, с. 62] — с помощью методики Койтера, в отличие от [12, с. 245], где дана похожая формула, несмотря на неаккуратное использование теории катастроф [13]. Несколько более точная, чем (2.2), формула

$$f = (2\sqrt{2}/\pi)\sqrt{\lambda - 1}[1 - (1/8)(\lambda - 1)] \quad (2.3)$$

дана в [1, с. 74], она получена так же, как и (2.2) в [7 и 8, с. 37], т. е. вторым способом. В [2, с. 501] приведена построенная первым способом (с помощью рядов) приближенная формула, которую в наших обозначениях можно записать в виде

$$f = (2\sqrt{2}/\pi)\sqrt{\lambda - 1}[1 - (41/64)(\lambda - 1)]. \quad (2.4)$$

В [3, с. 443] критикуется приближенный анализ Мизеса, согласно которому получена формула (2.3) и с помощью рядов выводится формула

$$f = (2\sqrt{2}/\pi)\sqrt{\lambda - 1}[1 - (19/16)(\lambda - 1)]. \quad (2.5)$$

Заметим, что (2.3)–(2.5) отличаются друг от друга лишь коэффициентом при $\lambda - 1$, следовательно, графики этих функций качественно одинаковы. Так же как (2.5), с помощью рядов были построены формулы в [5, с. 137]

$$f = (2\sqrt{2}/\pi)\sqrt{1 - 1/\lambda}; \quad (2.6)$$

$$f = (4/\pi)\sqrt{\sqrt{1/\lambda} - 1/\lambda}. \quad (2.7)$$

Формулу (2.6) можно получить и вторым способом [9, с. 429], используя уточненные краевые условия, учитывающие смещение опоры. Однако попытка [10, с. 489] вывода вторым способом (2.7) оказалась неудачной — в результате построена формула, которая дает прогибы, примерно в 2 раза меньшие получаемых из точного решения. Наконец, в [6, с. 23] с помощью рядов построена формула

$$f = (4\sqrt{2}/3\pi\sqrt{\lambda})\sqrt{\sqrt{9\sqrt{\lambda} - 8} - 1}, \quad (2.8)$$

Формула прогиба	Нагрузка λ					Формула прогиба	Нагрузка λ				
	1,01	1,1	1,7489	2,1834	4		1,01	1,1	1,7489	2,1834	4
	f						f				
(1.1)	0,088974	0,2543	0,4031	0,392	0,313	(2.6)	0,0896	0,271			
(2.2)	0,0900	0,285				(2.7)	0,0895	0,268			
(2.3)	0,0899	0,281				(2.8)	0,08898	0,2557	0,448	0,463	0,441
(2.4)	0,0895	0,266	0,405	0,24		(2.9)	0,088974	0,2543	0,4019	0,389	0,301
(2.5)	0,08896	0,251	0,09			(2.10)	0,0891	0,259	0,445	0,449	0,390

которая точнее вышеперечисленных и из которой там же упрощением выведена формула (2.7).

Таким же способом, учитывая в разложении (2.1) члены до k^6 включительно, можно построить формулу

$$f = (4/\sqrt{3}\pi\lambda)\sqrt{\sqrt{6\lambda - 2} - 2}. \tag{2.9}$$

Предполагая, что $\lambda - 1 \ll 1$, и используя приближение

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{6\lambda - 2} - 2} &= \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{1 + (3/2)(\lambda - 1)} - 1} \approx \sqrt{2}\sqrt{1 + (3/4)(\lambda - 1) - (9/32)(\lambda - 1)^2 - 1} \approx \\ &\approx \sqrt{2}\sqrt{(3/4)(\lambda - 1)[1 - (3/8)(\lambda - 1)]} \approx \sqrt{3/2}\sqrt{\lambda - 1}, \end{aligned}$$

запишем упрощенный вариант (2.9) в виде

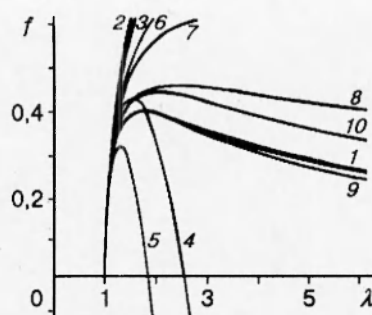
$$f = (2\sqrt{2}/\pi\lambda)\sqrt{\lambda - 1}. \tag{2.10}$$

3. Сравнение формул. Выводы. Вычисляя прогиб по формулам (2.7)–(2.10), получим $f \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, что соответствует механическому смыслу, в отличие от $f \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для (2.2), $f \rightarrow -\infty$ для (2.3)–(2.5) и $f \rightarrow 2\sqrt{2}/\pi$ для (2.6).

В таблице для нагрузки $\lambda = P/P_*$ представлены значения прогиба $f = a/L$, вычисленные решением системы (1.1) с указанной точностью и по приближенным формулам (2.2)–(2.10). Из точного решения можно получить, что при нагрузке $\lambda \approx 1,75$ прогиб стержня достигает максимума $f_{\max} \approx 0,403$, а при $\lambda \approx 2,18$ концы стержня соединяются, т. е. стержень образует петлю [2]. Прогибы для этих ключевых, имеющих практический интерес значений нагрузки также даны в таблице. Пустые клетки таблицы соответствуют числам, не имеющим физического смысла, например $f < 0$ или $f > 0,5$.

На рисунке показаны график точной зависимости (кривая 1) прогиба от нагрузки и графики, построенные по формулам (2.2)–(2.10), которым соответствуют кривые 2–10. Данные, приведенные в таблице, и графики убеждают, что формулы (2.2)–(2.7) пригодны лишь для нагрузок, превышающих критическую не более чем на 10% ($\lambda = 1,1$). Более точные формулы (2.8)–(2.10) построены приближением точного решения [1–6] исходного нелинейного уравнения. Если же сначала подменять исходное нелинейное уравнение приближенным (линеаризованным) и затем точно его решать, то получим более грубые формулы (2.2), (2.6). Кроме того, видно, что (2.10) в основном точнее формулы (2.8).

Самой точной из приближенных формул (2.2)–(2.10) является формула (2.9), максимальная относительная погрешность которой для $1 \leq \lambda \leq 4$ равна $\approx 3,8\%$ и достигается при $\lambda = 4$. С увеличением λ погрешность формулы (2.9) растет, однако качественно (2.9),



а также (2.8) и (2.10) хорошо отражают зависимость нагрузка — прогиб для любых нагрузок. Максимум функции (2.9) равен 0,402 и достигается при $\lambda \approx 1,732$, что мало отличается от точного значения $f = 0,403$ при $\lambda \approx 1,749$. Для (2.8) и (2.10) имеем соответственно $f \approx 0,465$ при $\lambda \approx 2,39$ и $f \approx 0,45$ при $\lambda = 2$.

Заметим, что формула (2.9) дает заниженные значения прогиба, а (2.10) — завышенные. Этими формулами можно пользоваться для предварительных прикидочных расчетов в более сложных задачах, когда стержни являются составными элементами конструкции. Формулы (2.9), (2.10) могут также оказаться полезными в приборостроении, например для расчетов механических регуляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: ОГИЗ, 1946.
2. Крылов А. Н. О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе // Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
3. Николаи Е. Л. О работах Эйлера по теории продольного изгиба // Труды по механике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
5. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
6. Мостков М. М. Уточненные решения вопросов устойчивости и изгиба. Минск: Госизд-во Белоруссии, 1935.
7. Mises Richard von. Kleine Mitteilungen // ZAMM. 1924. Bd 4. S. 436.
8. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: ОНТИ, 1946.
9. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986.
10. Филоненко-Бородич М. М., Изюмов С. М., Кудрявцев И. Н. и др. Сопротивление материалов. М.; Л.: Госстройиздат, 1940.
11. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985.
12. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984.
13. Астапов Н. С. Закритическое поведение стержня // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 92.

Поступила в редакцию 22/V 1995 г.