ными силовыми и деформационными тензорами оболочки:

$$x_{lK} = \int\limits_{b_-}^{b_+} (\partial U_{NM}/\partial u_{lK})\, X_{NM} B_1 B_2 dt_3, \tag{4.9}$$

$$x_{33} = \int\limits_{b_-}^{b_+} (\partial U_{NM}/\partial u_{33})\, X_{NM} B_1 B_2 dt_3,$$

$$z_{lK} = \int\limits_{b_-}^{b_+} (\partial U_{NM}/\partial w_{lK})\, X_{NM} B_1 B_2 dt_3.$$

Уравнения (4.1)—(4.9) образуют замкнутую систему уравнений относительно неизвестных функций u_N, v_n, u_{33}, u_{nM}, w_{nM}, x_{NM}, z_{nM} и их частных производных первого порядка. Тензор изгибаний v_{nM} играет в этой системе вспомогательную роль краткого обозначения дифференциального выражения (4.2).

После решения двумерной системы (4.1)—(4.9) пространственные параметры напряженно-деформированного состояния оболочки определяются по схеме, изложенной в п. 3.

Поступила 6 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айнола Л. Я.** Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек.— Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1965, т. 14, № 3.
2. **Галимов К. З.** Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 11. Казань, 1975.
3. **Шкутин Л. И.** Нелинейные модели деформируемых моментных сред.— ПМТФ, 1980, № 6.
4. **Шкутин Л. И.** Нелинейная модель оболочки с недеформируемыми поперечными волокнами.— ПМТФ, 1982, № 1.
5. **Федорова Н. А., Шкутин Л. И.** Асимптотика осесимметричной задачи упругости для анизотропной цилиндрической оболочки.— ПМТФ, 1981, № 5.

УДК 539.214 + 539.374 + 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ГЕНКИ

А. М. ХЛУДНЕВ

(*Новосибирск*)

Существование слабого решения в теории идеальной пластичности Генки получено лишь в частном случае условия текучести Мизеса и в предположении изотропности материала [1]. Вектор деформаций при этом находится из пространства, сопряженного к $L^\infty(\Omega)$. В данной работе доказывается существование решения при произвольном условии текучести и без предположения изотропности. Вектор перемещения принадлежит пространству $L^{3/2}(\Omega)$.

Определяющие уравнения рассматриваемой теории пластичности дают представление полных деформаций в виде суммы упругих и пластических составляющих

$$\varepsilon_{ij}(u) = c_{ijkl}\sigma_{kl} + \xi_{ij}, \quad i,\ j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

причем напряжения не превосходят предела текучести $\Phi(\sigma) \leqslant 0$, а пластические деформации ξ_{ij} удовлетворяют неравенству [1—3]

$$\xi_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leqslant 0 \ \ \forall\tau, \ \Phi(\tau) \leqslant 0. \tag{2}$$

В области $\Omega \subset R^3$ выполнены уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j} = f_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

На границе области Г справедливо условие

$$u = 0. \tag{4}$$

Здесь f_i — заданные массовые силы; функция Ф описывает условие текучести. Предполагается, что Ф непрерывна, выпукла и множество $\widetilde{K} = \{\lambda \in R^6 | \Phi(\lambda) \leqslant 0\}$ содержит нуль в качестве внутренней точки. Граница Γ считается гладкой. Все величины, снабженные двумя индексами, симметричны, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $\varepsilon_{ij}(u) = (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i})$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$, тензор c_{ijkl} обладает обычными свойствами симметрии и положительной определенности; по повторяющимся нижним индексам предполагается суммирование. Пусть также $K = \{\sigma \in L^2(\Omega) | \sigma(x) \in \tilde{K}$ почти всюду в $\Omega\}$. Имеет место следующий результат.

Т е о р е м а. Пусть $f_i \in L^3(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$ и существует решение σ^0 системы уравнений (3) такое, что для некоторой постоянной $\delta > 0$ справедливо включение $(1 + \delta)\sigma^0 \in K$. Тогда найдутся функции σ, u, удовлетворяющие уравнениям (3), причем

$$(5) \qquad \sigma \in K: \quad C(\sigma, \tau - \sigma) + \int_\Omega u_i (\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j})\, dx \geqslant 0 \quad \forall \tau \in K \cap V,$$

$$\sigma_{ij,j} \in L^3(\Omega), \quad u \in L^{3/2}(\Omega).$$

Здесь

$$C(\sigma, \tau) = \int_\Omega c_{ijkl} \sigma_{kl} \tau_{ij}\, dx, \quad V = \{\sigma \in L^2(\Omega) \mid \sigma_{ij,j} \in L^3(\Omega)\}.$$

Неравенство (5) представляет собой запись соотношений (1), (2), (4) в виде, соответствующем имеющейся регулярности решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема рассуждений такова. Сначала рассматриваем вспомогательную задачу со штрафом и с помощью методов двойственности доказываем существование приближенных решений. Затем получаем априорные оценки, равномерные по параметру штрафа $\varepsilon > 0$, и осуществляем переход к пределу.

Пусть π — оператор проектирования в R^6 с обычной евклидовой нормой на множество $\tilde{K}$. Определим функционал в пространстве $L^2(\Omega)$ ($\varepsilon > 0$ фиксировано)

$$H(\sigma) = \frac{1}{2} C(\sigma, \sigma) + P(\sigma), \quad P(\sigma) = \frac{1}{2\varepsilon} \| \sigma - \pi\sigma \|_2^2$$

и замкнутые выпуклые множества

$$A = \{\sigma \in L^2(\Omega) | \sigma_{ij,j} = f_i,\ i = 1, 2, 3\}, \quad A_0 = \{\sigma \in L^2(\Omega) | \sigma_{ij,j} = 0,\ i = 1, 2, 3\}.$$

Используя первое неравенство Корна в $H_0^1(\Omega)$, можно доказать, что множество

$$W = \{e_{ij} \mid e_{ij} \in L^2(\Omega),\ e_{ij} = \varepsilon_{ij}(u),\ u = (u_1, u_2, u_3) \in H_0^1(\Omega)\}$$

является замкнутым в $L^2(\Omega)$.

Положим далее

$$F(e) = \begin{cases} -\langle f_i, u_i \rangle, & \text{если } e_{ij} \in W, \quad e = \{e_{ij}\}, \\ +\infty & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$G(e) = \sup_{\tau \in L^2(\Omega)} \{\langle \tau, e \rangle - H(\tau)\}, \quad \tau = \{\tau_{ij}\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. В силу замкнутости W функционал F является слабо полунепрерывным снизу.

Рассмотрим задачу

$$(6) \qquad \inf_{e \in L^2(\Omega)} \{G(e) + F(e)\} = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \sup_{\tau \in L^2(\Omega)} [\langle \tau, \varepsilon(u) \rangle - H(\tau)] - \langle f_i, u_i \rangle \right\}.$$

Докажем, что эта задача имеет решение. Действительно, в точке $\tau = \bar{\tau}$, где достигается точная верхняя грань, имеем

$$\langle H'(\bar{\tau}), \sigma \rangle - \langle \varepsilon(u), \sigma \rangle = 0 \quad \forall \sigma \in L^2(\Omega).$$

Поэтому

$$(7) \qquad \varepsilon_{ij}(u) = c_{ijkl} \bar{\tau}_{kl} + P'(\bar{\tau})_{ij}, \quad P'(\bar{\tau})_{ij} = (1/\varepsilon)(\bar{\tau} - \pi\bar{\tau})_{ij}.$$

Здесь и выше штрихом обозначены производные соответствующих функционалов. Подставим полученное значение $\varepsilon_{ij}(u)$ в квадратную скобку (6) при $\tau = \bar{\tau}$. Получим, что значение этой скобки равно $(1/2)\, C(\bar{\tau}, \bar{\tau}) - P(\bar{\tau}) + \langle P'(\bar{\tau}), \bar{\tau} \rangle$. Однако из (7) следует (c не зависит от u, $\bar{\tau}$, $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p(\Omega)$)

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\,(\|\bar{\tau}\|_2 + \|P'(\bar{\tau})\|_2).$$

Кроме того, из выпуклости функционала P получим, что $P(\bar{\tau}) \leqslant \langle P'(\bar{\tau}), \bar{\tau}\rangle$. Таким образом, значение фигурной скобки в (6) стремится к $+\infty$ при $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$ (подчеркнем, что ε пока фиксировано, так что $\|P'(\bar{\tau})\|_2 \leqslant c\|\bar{\tau}\|_2$). Коэрцитивность функционала (6) установлена. Поэтому существование решения $u = u^\varepsilon \in H_i^1(\Omega)$ следует из слабой полунепрерывности снизу.

Построим теперь задачу, сопряженную к (6). Имеем $G^*(\tau) = H(\tau)$ и

$$F^*(-\tau) = \sup_{e \in L^2(\Omega)} \{\langle \tau, e\rangle - F(e)\} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \{\langle \tau, \varepsilon(u)\rangle + \langle f_i, u_i\rangle\} = \psi_A(\tau).$$

Здесь $\psi_A(\tau)$ — индикаторная функция множества A, т. е. функция, равная нулю на множестве A и $+\infty$ вне его. Таким образом, задачей, двойственной к (6) по отношению к возмущению $\Lambda(e, q) = G(e) + F(e - q)$, будет следующая [4]:

(8) $$\inf_{\tau \in L^2(\Omega)} \{G^*(\tau) + F^*(-\tau)\} = \inf_{\tau \in A} H(\tau).$$

Эта задача имеет решение, которое характеризуется неравенством $\sigma = \sigma^\varepsilon \in A : \langle H'(\sigma^\varepsilon), \tau - \sigma^\varepsilon\rangle \geqslant 0\ \forall \tau \in A$. Подставим сюда $\tau = \sigma^\varepsilon \pm \tau_0$, $\tau_0 \in A_0$. Получим

(9) $$\langle H'(\sigma^\varepsilon), \tau_0\rangle = 0\ \ \forall \tau_0 \in A_0.$$

При получении априорных оценок решения тождество (9) будет играть существенную роль.

Решения $\sigma^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ и $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ сопряженных задач (6), (8) связаны экстремальным соотношением [4]

$$G(\varepsilon(u^\varepsilon)) + G^*(\sigma^\varepsilon) = \langle \varepsilon(u^\varepsilon), \sigma^\varepsilon\rangle.$$

Подставляя значения G и G^*, находим

$$H(\sigma^\varepsilon) - \langle \varepsilon(u^\varepsilon), \sigma^\varepsilon\rangle \leqslant H(\tau) - \langle \varepsilon(u^\varepsilon), \tau\rangle\ \ \forall \tau \in L^2(\Omega).$$

Отсюда следует

(10) $$\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon) = c_{ijkl}\sigma_{kl}^\varepsilon + P'(\sigma^\varepsilon)_{ij}.$$

Получим теперь априорные оценки решения на основе (9), (10). Подставим в тождество (9) в качестве τ_0 величину $\bar{\sigma} = \sigma^\varepsilon - \sigma^0$, σ^0 — решение уравнений (3). Будем иметь

$$C(\bar{\sigma}^\varepsilon, \bar{\sigma}^\varepsilon) + \langle P'(\sigma^\varepsilon), \bar{\sigma}^\varepsilon\rangle = -C(\sigma^0, \bar{\sigma}^\varepsilon).$$

Так как $\sigma^0 \in K$, то $\langle P'(\sigma^\varepsilon), \bar{\sigma}^\varepsilon\rangle \geqslant 0$ и, значит, из этого соотношения следует

(11) $$\|\bar{\sigma}^\varepsilon\|_2 \leqslant c,\ \langle P'(\sigma^\varepsilon), \bar{\sigma}^\varepsilon\rangle \leqslant c.$$

Постоянные c здесь не зависят от ε.

Далее, из условия теоремы следует, что $(1+\delta)\sigma^0 \in K$. Поэтому найдется постоянная δ_0, зависящая от δ и $\tilde{K}$, для которой $\operatorname{dist}(\sigma^0(x), C\tilde{K}) \geqslant \delta_0$; $C\tilde{K}$ — дополнение к множеству $\tilde{K}$. Предположим, что для $x \in \Omega$ справедливо включение $\sigma^\varepsilon(x) = \sigma^0(x) + \bar{\sigma}^\varepsilon(x) \in C\tilde{K}$. Тогда гиперплоскость $\{\xi \in R^6 | [\xi, l(x)] = b\}$, где b — некоторое число, а

(12) $$l(x) = P'(\sigma^\varepsilon)(x)|P'(\sigma^\varepsilon)(x)|^{-1}$$

разделяет множества $\sigma^\varepsilon(x)$ и $\tilde{K}$. Через $[\cdot, \cdot]$ обозначено скалярное произведение, соответствующее евклидовой норме. Поскольку $\sigma^\varepsilon(x) \in C\tilde{K}$, $\sigma^0(x) + \delta_0 l(x) \in \tilde{K}$, $0 \in \tilde{K}$, то имеют место неравенства

$$[\sigma^0(x) + \bar{\sigma}^\varepsilon(x), l(x)] \geqslant b,\ [\sigma^0(x) + \delta_0 l(x), l(x)] \leqslant b.$$

Отсюда получим $[\bar{\sigma}^\varepsilon(x), l(x)] \geqslant \delta_0$. Поэтому, умножая (12) скалярно на $\bar{\sigma}^\varepsilon$, будем иметь

$$|P'(\sigma^\varepsilon)(x)| \leqslant \delta_0^{-1}[P'(\sigma^\varepsilon)(x), \bar{\sigma}^\varepsilon(x)].$$

Это неравенство выполняется также и в случае $\sigma^\varepsilon(x) \in \tilde{K}$. Интегрируя его по области Ω и учитывая (11), получаем

$$\|P'(\sigma^\varepsilon)\|_1 \leqslant c$$

с постоянной c, не зависящей от ε. С помощью этого неравенства из (10) получим $\|\varepsilon(u^\varepsilon)\|_1 \leqslant c$. В [5] доказано, что если $\Omega \subset R^3$ — область с регулярной границей и $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\in H_0^1(\Omega)$, то существует постоянная $c>0$, не зависящая от φ, для которой

$$\|\varphi\|_{3/2}\leqslant c\sum_{i,j-1}^{3}\|\varepsilon_{ij}(\varphi)\|_1.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$||u^\varepsilon||_{3/2}\leqslant c \tag{13}$$

с постоянной, не зависящей от ε.

Согласно (11), (13), можно считать, что существует подпоследовательность, обозначаемая прежним образом, обладающая свойством

$$\sigma^\varepsilon\to\sigma \text{ слабо в } L^2(\Omega),\ u^\varepsilon\to u \text{ слабо в } L^{3/2}(\Omega). \tag{14}$$

Умножим соотношения (10) на $\tau_{ij}-\sigma_{ij}^\varepsilon$, $\tau\in K\cap V$. Получим

$$C(\sigma^\varepsilon, \tau-\sigma^\varepsilon)+\int_\Omega u_i^\varepsilon(\tau_{ij,j}-\sigma_{ij,j}^\varepsilon)\,dx\geqslant 0.$$

Учитывая, что $\sigma_{ij,j}^\varepsilon=-f_i$, а также тот факт, что $\varliminf_{\varepsilon\to 0} C(\sigma^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)\geqslant C(\sigma, \sigma)$, перейдем здесь к нижнему пределу при $\varepsilon\to 0$ на основе (14). В результате получим неравенство (5). Включение $\sigma\in K$ доказывается стандартными рассуждениями [1]. Теорема полностью доказана.

Автор благодарит В. М. Садовского за обсуждение работы.

Поступила 1 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
2. **Генки Г.** К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений.— В кн.: Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948.
3. **Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.** Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев: Наукова думка, 1981.
4. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
5. **Johnson C.** Existence theorems for plasticity problems.— J. Math. Pures Appl., 1976, vol. 55, N 4.