РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 3

УДК 535.317.25

В. А. Удод
(Томск)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АПОДИЗАЦИИ ПРИЕМНИКОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Приведены примеры функций достаточно простого вида, которые обладают свойствами финитности, ограниченности и неотрицательности, а их преобразования Фурье нигде не имеют нулей. Предложено использовать данные функции для соответствующей аподизации приемников первичных изображений с целью выполнения необходимого условия функционирования изображающей системы с априорно заданной пространственной разрешающей способностью.

Введение. Во многих случаях необходимо, чтобы используемая для исследований изображающая система (ИС) могла функционировать с априорно заданной пространственной разрешающей способностью (РС). Это, в частности, следует из представленных в [1] результатов взаимосвязи между степенью восприятия объектов (обнаружение, опознавание, идентификация и т. п.) по их изображению, воспроизводимому изображающей системой, и ее разрешающей способностью.

Согласно [2] процесс функционирования многих ИС может быть удовлетворительно описан моделью вида

$$\hat{B}(x,y) \quad [B(x,y) \quad h(x,y) \quad n(x,y)] \quad\quad (x,y), \tag{1}$$

где $B(x,y)$ – исходное (идеальное) изображение; $B(x,y) \quad h(x,y) \quad n(x,y)$ – сформированное (искаженное) изображение; $h(x,y)$ – импульсный отклик приемника изображений (ПИ); $n(x,y)$ – стационарный шум; $\quad (x,y)$ – импульсный отклик корректирующего фильтра; символ « » означает двумерную свертку; $\hat{B}(x,y)$ – восстановленное (выходное) изображение.

Из работ [3, 4] следует, что РС ИС, описываемой моделью (1), даже при стремлении спектральной плотности шума к нулю и одновременном оптимальном выборе корректирующего фильтра будет ограничиваться сверху величиной R_0, равной расстоянию от начала координат (в частотной плоскости) до ближайшего к нему нуля передаточной функции ПИ.

Таким образом, для функционирования ИС, описываемой моделью (1), с заданной РС R необходимо выполнение условия

$$R_0 \quad R. \tag{2}$$

Очевидно, что для произвольно взятого ПИ это условие может нарушаться.

Один из возможных подходов, гарантирующих выполнимость условия (2), может заключаться, на наш взгляд, в предварительной аподизации ПИ таким образом, чтобы преобразование Фурье импульсного отклика аподизированного ПИ, т. е. его передаточная функция, нигде не имело нулей в частотной плоскости. В этом случае согласно [4] величина R_0 будет равна бесконечности.

Из физических соображений (по крайней мере, применительно к приемникам радиационных изображений) импульсный отклик аподизированного ПИ должен удовлетворять свойствам финитности, ограниченности и неотрицательности [5].

В предлагаемой работе приведены примеры функций, обладающих этими свойствами, причем их преобразования Фурье нигде не имеют нулей, а также пример расчета аподизированного ПИ.

Примеры неотрицательных, ограниченных, финитных функций, преобразования Фурье которых не имеют нулей. Приведем (с доказательством) несколько простых примеров таких функций, начав из соображений удобства с одномерного варианта.

П р и м е р 1.

$$h_1(x) \quad \begin{matrix} 1 \quad \exp \qquad \dfrac{c \quad a}{b}x \quad a \quad , & 0 \quad x \quad b; \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{matrix} \qquad (3)$$

где $\ , a, b, c$ – параметры, причем

$$, a, b \quad 0; \qquad 0 \quad c \quad a. \qquad (4)$$

Очевидно, что функция (3) при условиях (4) является финитной, ограниченной и неотрицательной. Докажем теперь, что ее преобразование Фурье

$$\widetilde{h}_1(\ ) \qquad h_1(x)\exp(\ \ 2\ \ i\ \ x)dx \qquad \frac{i}{2}[\exp(\ \ 2\ \ i\ \ b) \quad 1]$$

$$\frac{b(\ \ (c \quad a) \quad 2\ \ i\ \ b)\exp(\ \ a)}{{}^2(c \quad a)^2 \quad (2\ \ b)^2}\{\exp[\ \ (\ \ (c \quad a) \quad 2\ \ i\ \ b)] \quad 1\}$$

нигде не имеет нулей.

Так как функция (3) при условиях (4) положительна на промежутке $[0, b)$, то согласно [6] и ее определенный интеграл по отрезку $[0, b]$ также будет положительным, а значит,

$$\widetilde{h}_1(0) \qquad h_1(x)\,dx \qquad \int_0^b h_1(x)\,dx \quad 0.$$

Следовательно, нам осталось доказать, что

$$\tilde{h}_1(\quad)\quad 0 \quad \text{при} \qquad 0. \tag{5}$$

Поскольку операция линейного изменения масштаба не влияет на сам факт наличия нулей у функции, то, используя замену

$$2 \quad b,$$

можно свести задачу доказательства неравенства (5) к равносильной ей задаче – доказательству неравенства

$$\tilde{h}_1 \; \frac{\quad}{2\;\; b} \qquad 0 \;\; \text{при} \qquad 0. \tag{6}$$

Неравенство (6), в свою очередь, будет равносильно неравенству

$$g(\quad)\quad 0 \quad \text{при} \qquad 0,$$

справедливость которого мы и докажем. Здесь

$$g(\quad) \qquad \frac{\sqrt{\quad^2 \qquad ^2}}{b}\,\tilde{h}_1 \; \frac{\quad}{2\;\; b}$$

$$\sqrt{\quad^2 \qquad ^2} \quad \frac{i[\exp(\quad i \quad)\quad 1]}{} \qquad \frac{i}{\quad^2 \qquad ^2}\exp(\quad p)[\exp(\qquad)\exp(\quad i \quad)\quad 1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\quad^2 \qquad ^2}} \quad (\quad^2 \qquad ^2)\sin \qquad\quad \exp(\quad p)[\exp(\qquad)\cos \qquad 1]$$

$$^2\exp(\quad p)\exp(\qquad)\sin \qquad i[(\quad^2 \qquad ^2)(\cos \qquad 1) \qquad\quad \exp(\quad p)$$

$$\exp(\qquad)\sin \qquad\quad ^2\exp(\quad p)(\exp(\qquad)\cos \qquad 1)] \;\; , \tag{7}$$

$$p \qquad a; \qquad\qquad (c \quad a). \tag{8}$$

Из свойств модуля комплексного числа [7, 8] следует

$$g(\quad)\quad 0 \qquad \left|g(\quad)\right|^2 \quad 0.$$

Отсюда, а также из свойства четности модуля одномерного фурье-образа [9] видим, что достаточно доказать справедливость неравенства

$$\left|g(\quad)\right|^2 \quad 0 \quad \text{при} \qquad 0. \tag{9}$$

При подстановке (7) в (9) и проведении простейших преобразований получим следующее неравенство:

$$2[\ {}^{2}\quad {}^{2}(1\quad \exp(\ p))(1\quad \exp(\qquad p))]\quad {}^{2}\exp(\ 2p)(\exp(\quad)\quad 1)^{2}$$

$$2\cos\ [\ {}^{2}\quad {}^{2}(1\quad \exp(\ p))(1\quad \exp(\qquad p))]$$

$$2\quad \exp(\ p)(\exp(\quad)\quad 1)\sin\ , \qquad (10)$$

справедливость которого нам и остается доказать при 0.

Из равенства [10]

$$u\cos A\quad q\sin A\quad \sqrt{u^{2}\quad q^{2}}\sin(A\qquad),$$

где u, q, A – любые действительные числа;

$$\sin\qquad \frac{u}{\sqrt{u^{2}\quad q^{2}}};\qquad \cos\qquad \frac{q}{\sqrt{u^{2}\quad q^{2}}},$$

вытекает справедливость неравенства

$$u\cos A\quad q\sin A\quad \sqrt{u^{2}\quad q^{2}}.$$

Поэтому для доказательства неравенства (10) нам достаточно доказать справедливость следующего неравенства при 0:

$$2[\ {}^{2}\quad {}^{2}(1\quad \exp(\ p))(1\quad \exp(\qquad p))]\quad {}^{2}\exp(\ 2p)(\exp(\quad)\quad 1)^{2}$$

$$\{4[\ {}^{2}\quad {}^{2}(1\quad \exp(\ p))(1\quad \exp(\qquad p))]^{2}$$

$$4\ {}^{2}\ {}^{2}\exp(\ 2p)(\exp(\quad)\quad 1)^{2}\}^{1/2}. \qquad (11)$$

Из (4) и (8) вытекает положительность обеих частей неравенства (11). Следовательно, неравенство (11) при 0 будет эквивалентно неравенству

$${}^{4}\exp(\ 4p)(\exp(\quad)\quad 1)^{4}$$

$$4\ {}^{4}(1\quad \exp(\ p))(1\quad \exp(\qquad p))\exp(\ 2p)(\exp(\quad)\quad 1)^{2}\quad 0, \qquad (12)$$

которое получается из неравенства (11) после возведения обеих его частей в квадрат и приведения подобных членов.

Нетрудно убедиться, принимая во внимание (4) и (8), что при 0 первое слагаемое в левой части (12) положительно, а второе – неотрицательно. Следовательно, (12) верно, что и требовалось доказать.

П р и м е р 2.

$$h_2(x) \quad \frac{}{b} x \quad , \quad 0 \quad x \quad b; \qquad 0 \quad \text{в остальных случаях}, \tag{13}$$

где $\ , b, \ $ – параметры, причем

$$, b \quad 0; \quad 0 \quad . \tag{14}$$

Очевидно, что функция (13) при условиях (14) является неотрицательной, ограниченной и финитной. Доказательство же того, что ее преобразование Фурье

$$\tilde{h}_2(\ ) \quad \frac{}{b(2 \quad)^2}[i2 \quad b\exp(\ i2 \quad b) \quad \exp(\ i2 \quad b) \quad 1] \quad \frac{i}{2}[\exp(\ i2 \quad b) \quad 1]$$

нигде не имеет нулей, аналогично доказательству в примере 1.

Замечание. Пусть M_1 – множество всех одномерных неотрицательных, ограниченных, финитных функций, у которых преобразование Фурье не имеет нулей. По доказанному выше функции (3) и (13) принадлежат множеству M_1. Между тем, принимая во внимание свойства одномерного преобразования Фурье [7, 9], нетрудно убедиться в следующих свойствах множества M_1:

1) если $H(x) \quad M_1$, то и $rH(sx \quad) \quad M_1$;

2) если $H_1(x), H_2(x) \quad M_1$, то и $H_1(x) \quad H_2(x) \quad M_1$.

Здесь $r, s,$ – действительные числа, причем $r \quad 0$, $s \quad 0$, – любое; символ « » означает одномерную свертку.

Пусть теперь M_2 – множество всех двумерных неотрицательных, ограниченных, финитных функций, у которых преобразование Фурье не имеет нулей. Из свойств двумерного преобразования Фурье [11] следует, что множеству M_2 будут принадлежать, в частности, функции вида

$$D(x, y) \quad D_1(x) D_2(y), \tag{15}$$

где $D_1(x)$ и $D_2(x)$ – любые функции из множества M_1.

Пример расчета аподизированного приемника изображений. Предположим, что ИС – это многоканальная сканирующая система цифровой рентгенографии [12, 13], у которой приемниками (детекторами) первичного изображения (радиационного поля за просвечиваемым объектом) являются монокристаллические сцинтилляторы. Предположим также, что все используемые в системе сцинтилляторы идентичны между собой, и поэтому ограничимся рассмотрением аподизации отдельного из них.

Допустим, что до аподизации сцинтиллятор имеет форму параллелепипеда. Тогда для него согласно [14] будет верно соотношение

$$_0(x, y) \quad 1 \quad \exp[\quad _{\text{сц}} l_0], \text{ если } 0 \quad x \quad d_x, \ 0 \quad y \quad d_y; \qquad 0 \quad \text{в остальных случаях}. \tag{16}$$

Здесь $_0(x, y)$ – эффективность регистрации излучения сцинтиллятором до его аподизации; $_{\text{сц}}$ – линейный коэффициент ослабления излучения для материала сцинтиллятора; l_0 – высота сцинтиллятора (его размер в направлении падающего излучения); d_x, d_y – длина и ширина сцинтиллятора соответственно.

После аподизации сцинтиллятора соотношение (16) преобразуется к виду

$$_1(x, y) \quad \begin{matrix} 1 \quad \exp[\quad _{\text{сц}} l_0 \quad (x, y)], \text{ если } 0 \quad x \quad d_x, \; 0 \quad y \quad d_y; \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{в остальных случаях.} \end{matrix} \tag{17}$$

Здесь $_1(x, y)$ – эффективность регистрации излучения сцинтиллятором после его аподизации; (x, y) $(0 \quad (x, y) \quad 1)$ – аподизирующая функция для толщины сцинтиллятора (искомая).

Воспользуемся теперь следующим представлением:

$$_1(x, y) \quad _0(x, y) h_0(x, y), \tag{18}$$

где $h_0(x, y)$ $(0 \quad h_0(x, y) \quad 1)$ – искусственно введенная аподизирующая функция для эффективности регистрации излучения сцинтиллятором (подлежит выбору).

Легко убедиться с учетом (16) и (17), что представление (18) будет верно, если между функциями $h_0(x, y)$ и (x, y) выполняется соотношение

$$(x, y) \quad \frac{1}{_{\text{сц}} l_0} \ln\{1 \quad [1 \quad \exp(\quad _{\text{сц}} l_0)] h_0(x, y)\} \tag{19}$$

при $0 \quad x \quad d_x, \; 0 \quad y \quad d_y$.

Выберем теперь функцию

$$h_0(x, y) \quad \frac{H_1(x)}{H_{1\max}} \frac{H_2(y)}{H_{2\max}}, \tag{20}$$

где $H_1(x), H_2(x)$ – некоторые функции из множества M_1 такие, что

$$H_1(x) \quad 0, \text{ если } x \quad [0, d_x], \tag{21}$$

$$H_2(y) \quad 0, \text{ если } y \quad [0, d_y]; \tag{22}$$

$H_{1\max}, H_{2\max}$ – наибольшие значения функций $H_1(x)$ и $H_2(x)$ соответственно.

При подстановке (16) и (20) в правую часть (18) с учетом (21) и (22) получаем

$$_1(x, y) \quad [1 \quad \exp(\quad _{\text{сц}} l_0)] \frac{H_1(x)}{H_{1\max}} \frac{H_2(y)}{H_{2\max}}. \tag{23}$$

Импульсный отклик аподизированного сцинтиллятора согласно [15] будет равен

$$h_{\text{сц}}(x, y) \qquad {}_{1}(\quad x, \quad y)$$

или

$$h_{\text{сц}}(x, y) \quad [1 \quad \exp(\quad {}_{\text{сц}}\, l_0)] \frac{H_1(\quad x)}{H_{1\,\max}} \frac{H_2(\quad y)}{H_{2\,\max}}, \tag{24}$$

что с учетом (23) есть то же самое.

Поскольку параметры ${}_{\text{сц}}$ и l_0 положительны, то и множитель $1 \quad \exp(\quad {}_{\text{сц}}\, l_0)$ также будет положительным. Очевидно также, что и величины $H_{1\,\max}$ и $H_{2\,\max}$ положительны. Отсюда в силу свойства 1 множества M_1 и того, что функции $H_1(x)$, $H_2(x)$ выбраны из множества M_1, следует принадлежность функций $[1 \quad \exp(\quad {}_{\text{сц}}\, l_0)] H_1(\quad x)/H_{1\,\max}$, $H_2(\quad x)/H_{2\,\max}$ также множеству M_1, а значит, согласно (15) функция (24) будет принадлежать множеству M_2.

Таким образом, при подстановке (20) в (19) находим окончательно искомую аподизирующую функцию для толщины сцинтиллятора, а именно

$$(x, y) \qquad \frac{1}{{}_{\text{сц}}\, l_0} \ln \; 1 \quad [1 \quad \exp(\quad {}_{\text{сц}}\, l_0)] \frac{H_1(x)}{H_{1\,\max}} \frac{H_2(y)}{H_{2\,\max}} \quad ,$$

если $0 \quad x \quad d_x$, $0 \quad y \quad d_y$. В остальных точках с соблюдением условия $0 \qquad (x, y) \quad 1$ функция $\quad (x, y)$ может быть произвольной.

Аналогично могут быть аподизированы одномерно (в плоскости контролируемого слоя) и сцинтилляционные детекторы, применяемые в системах рентгеновской вычислительной томографии для регистрации интегральных проекций.

Заключение. Приведенные примеры функций могут быть взяты за основу для соответствующей аподизации приемников первичных изображений. Использование таких приемников в структуре изображающих систем позволит реализовать в этих системах необходимое условие их функционирования с априорно заданной пространственной разрешающей способностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ллойд Дж. Системы тепловидения: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
2. Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин: Пер. с англ. /Под ред. Г. Эндрюса, Л. Инло. М.: Мир, 1973.
3. Удод В. А. О разрешающей способности // Оптика атмосферы. 1989. 2, № 2. С. 154.
4. Завьялкин Ф. М., Удод В. А. Максимальная разрешающая способность изображаю- щих систем, достигаемая при апостериорной линейной фильтрации изображений // Автометрия. 1992. № 3. С. 75.
5. Федоров Г. А. Радиационная интроскопия: кодирование информации и оптимизация эксперимента. М.: Энергоатомиздат, 1982.

6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 2.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.
8. Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. М: Просвещение, 1977.
9. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: Пер. с франц. М.: Мир, 1983. Т. 1.
10. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1978.
11. Юу Ф. Т. С. Введение в теорию дифракции, обработку информации и голографию: Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1979.
12. Недавний О. И., Удод В. А. Современное состояние систем цифровой рентгенографии (обзор) // Дефектоскопия. 2001. № 8. С. 62.
13. Недавний О. И., Удод В. А. Математическая модель многоканальных сканирующих систем цифровой рентгенографии // Контроль. Диагностика. 2002. № 2. С. 27.
14. Горбунов В. И., Щетинин Ю. И. О форме сигнала дефекта в сцинтилляционных гамма-дефектоскопах // Дефектоскопия. 1971. № 6. С. 44.
15. Недавний О. И., Удод В. А. Обобщение зависимости между теневым радиационным изображением и интенсивностью потока импульсов на выходе сканирующего детектора // Дефектоскопия. 2000. № 6. С. 88.

Томский государственный университет,
E-mail: udod@ef.tsu.ru

Поступила в редакцию
22 марта 2004 г.