Методика решения многомерных уравнений Фоккера — Планка аналогична. Здесь необходимо строить обратный оператор $\hat{H}^{-1}$. Решение задачи в этом случае с учетом пространственной неоднородности может быть представлено в виде ряда по степеням оператора

$$\hat{E} = \hat{H}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial r_i}\right).$$

Выше внимание было уделено принципиальным основам метода. Для распределения электронов в плазме, согласно предложенной схеме, может быть построена КФР любого порядка и определены границы ее применимости. Тем самым открываются возможности решения ряда прикладных задач, весьма сложных для обычного анализа.

Поступила 30 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Решетняк С. А., Шелепин Л. А.** О функции распределения заселенностей атомных уровней в плазме.— ПМТФ, 1972, № 4.
2. **Решетняк С. А., Шелепин Л. А.** Функции распределения вращательной энергии и лазеры на вращательных переходах.— ЖПС, 1974, т. 21, вып. 1.
3. **Решетняк С. А., Шелепин Л. А.** К кинетике образования многозарядных ионов.— «Квант. электроника», 1974, т. 1, № 8.
4. **Решетняк С. А., Шелепин Л. А.** О квазиравновесном распределении интенсивностей компонент ВКР.— «Квант. электроника», 1975, т. 2, № 10.
5. **Гинзбург В. Л., Гуревич А. В.** Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле.— «Усп. физ. наук», 1960, т. 70, вып. 2.
6. **Гордиец Б. Ф., Решетняк С. А., Шелепин Л. А.** О механизмах генерации молекулярных лазеров в далекой инфракрасной области спектра.— «Квант. электроника», 1974, № 3.
7. **Осипов А. И., Ступоченко Е. В.** Неравновесные распределения энергии по колебательным степеням свободы в газах.— «Усп. физ. наук», 1963, т. 79, вып. 1.

УДК 533.70; 539.196.2

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ ФОККЕР-ПЛАНКОВСКОГО ТИПА

М. Н. Сафарян

(*Москва*)

Использование для описания кинетики неравновесных процессов в газе уравнения фоккер-планковского типа становится весьма распространенным. При применении этого уравнения к системам со значительными градиентами функции распределения и моментов перехода требуется дополнительная оценка условий аппроксимации линейного интегро-дифференциального уравнения уравнением фоккер-планковского типа. Вопрос о замене соответствующего интегрального оператора дифференциальным рассматривался во многих работах (см., например, [1]), при этом конечное разложение выполнялось для самой функции распределения и оценка по порядку величины членов, следующих за фоккер-планковскими, соответствовала оценке величины последующих моментов перехода. Для сильнонеравновесных процессов и моментов времени $t < \tau_r$ (τ_r — характерное время релаксации) в оценку условий аппроксимации должен входить учет и степени отклонения от равновесия.

В данной работе предлагается замена интегрального оператора дифференциальным не для самой функции распределения, а для ее отношения к равновесному значению (не рассматривается вопрос о релаксации начального распределения типа δ-функции). Такое разложение в ряде случаев позволяет в неравновесной и околоравновесной стадии процесса свести искомые условия аппроксимации только к условиям для моментов перехода (оно особенно полезно, если моменты перехода рассчитываются без использования явного вида вероятности перехода) и содержит моменты перехода только четного порядка, расчет которых оказывается более простым, чем для моментов любого порядка; наконец, более наглядной представляется возможность оценки порядка величины отбрасываемых членов и точности, с которой нужно рассчитывать учитываемые. При получении соответствующего разложения использован подход [2].

1. Переход к дифференциальному уравнению. Выражение для потока дивергенции. Общий вид условий аппроксимации. Исходное кинетическое уравнение так же, как в [2], записывается в виде

$$(1.1)\quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\int f(x, t)\, W(x, \Delta)\, d\Delta + \int f(x+\Delta, t)\, W(x+\Delta, -\Delta)\, d\Delta,$$

где $f(x, t)$ — функция распределения молекул по величине x (энергии или импульсу, соответствующим определенной степени свободы) в газе, который играет роль термостата с температурой T; концентрация газа-термостата существенно больше концентрации молекул; Δ — изменение x за столкновение; $W(x, \Delta)$ — вероятность перехода молекулы из состояния (x) в $(x+\Delta)$ в единицу времени. Вводятся следующие обозначения:

$$(1.2)\qquad B_n = \frac{\langle \Delta^n \rangle}{\tau} = \int \Delta^n W(x, \Delta)\, d\Delta, \quad \frac{1}{\tau} = \int W(x, \Delta)\, d\Delta;$$

$$(1.3)\qquad \varphi(x, t) = f(x, t)/f^0(x), \quad \psi(x, t) = \partial\varphi/\partial x;$$

$$(1.4)\qquad \omega(x, \Delta) = f^0(x) W(x, \Delta),$$

где $f^0(x)$ — равновесная функция распределения, соответствующая температуре $T(t \to \infty)$; B_n — момент перехода n-го порядка.

Из принципа детального баланса следует

$$(1.5)\qquad \omega(x, \Delta) = \omega(x+\Delta, -\Delta), \quad \omega(x, -\Delta) = \omega(x-\Delta, \Delta).$$

С учетом (1.5) уравнение (1.1) принимает вид

$$(1.6)\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \int [\varphi(x+\Delta, t) - \varphi(x, t)]\, \omega(x, \Delta)\, d\Delta.$$

Из (1.6) с учетом (1.2)—(1.5) после разложения $\varphi(x+\Delta, t)$ в ряд имеем

$$(1.7)\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=1} \frac{1}{n!} B_n f^0 \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = \sum_{n=1} \frac{1}{(2n)!} B_{2n} f^0 \frac{\partial^{2n-1}\psi}{\partial x^{2n-1}} + \sum_{n=1} \frac{1}{(2n-1)!} B_{2n-1} f^0 \frac{\partial^{2n-2}\psi}{\partial x^{2n-2}}.$$

Далее выразим величину $B_{2n-1}f^0$ через $B_{2n}f^0$. После разложения правых частей (1.5) в ряд по степеням Δ, входящим в первый аргумент, можно получить

$$(1.8)\qquad \sum_{k=1} \frac{1}{k!} \Delta^k \frac{d^k \omega(x, -\Delta)}{dx^k} = -\sum_{k=1} \frac{1}{k!} (-\Delta)^k \frac{d^k \omega(x, \Delta)}{dx^k};$$

$$(1.9)\quad \omega(x, \Delta) = \frac{1}{2}[\omega(x, \Delta) + \omega(x, -\Delta)] + \frac{1}{2} \sum_{k=1} \frac{1}{k!} \Delta^k \frac{d^k \omega(x, -\Delta)}{dx^k}.$$

Из (1.9) с учетом (1.8) имеем

$$\omega(x,\Delta) = \frac{1}{2}[\omega(x,\Delta) + \omega(x,-\Delta)] - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}\frac{1}{k!}(-1)^k\Delta^k\frac{d^k\omega(x,\Delta)}{dx^k}. \tag{1.10}$$

Используя (1.10), с учетом (1.2) получаем

$$B_{2n-1}f^0 = \int\Delta^{2n-1}\omega(x,\Delta)\,d\Delta = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\times \\ \times\int\Delta^{2n-1+k}\omega(x,\Delta)\,d\Delta = \frac{1}{2}\sum_{k=1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(B_{2n-1+k}f^0) \tag{1.11}$$

(результат (1.11) следует из того, что интегрирование ведется в симметричных пределах). Далее последовательно повышается нижний предел суммирования

$$B_{2n-1}f^0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(B_{2n}f^0) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(B_{2n-1+k}f^0) \equiv \\ \equiv \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(B_{2n}f^0) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}(-1)^{k-1}C_{k2}\frac{d^k}{dx^k}(B_{2n-1+k}f^0);$$

$$B_{2n-1}f^0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(B_{2n}f^0) + \frac{1}{2}\left(C_{32} - \frac{1}{2}C_{22}\right)\frac{d^3}{dx^3}(B_{2n+2}f^0) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=4}\left[C_{k2} - \frac{1}{2}\frac{C_{22}}{(k-2)!}\right](-1)^{k-1}\frac{d^k}{dx^k}(B_{2n-1+k}f^0) \equiv \\ \equiv \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(B_{2n}f^0) + \frac{1}{2}\left(C_{32} - \frac{1}{2}C_{22}\right)\frac{d^3}{dx^3}(B_{2n+2}f^0) + \frac{1}{2}\sum_{k=4}(-1)^{k-1}\times \\ \times C_{k4}\frac{d^k}{dx^k}(B_{2n-1+k}f^0),$$

эту процедуру можно продолжить. В результате получаем

$$B_{2n-1}f^0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(B_{2n}f^0) + \sum_{s=1}A_{2s}\frac{d^{2s+1}}{dx^{2s+1}}(B_{2n+2s}f^0); \tag{1.12}$$

$$A_{2s} = \frac{1}{2}\left(C_{2s+1,2s} - \frac{1}{2}C_{2s,2s}\right), \tag{1.13}$$

где

$$C_{m2} = \frac{1}{m!};\quad C_{2m,2k} = C_{2m,2k-2} - \frac{1}{2}\frac{C_{2k-2,2k-2}}{(2m-2k+2)!}; \\ C_{2m+1,2k} = C_{2m+1,2k-2} - \frac{1}{2}\frac{C_{2k-2,2k-2}}{(2m-2k+3)!}. \tag{1.14}$$

Между коэффициентами $C_{2m+1,2m}$ и $C_{2m,\,2m}$ имеет место соотношение

$$C_{2m+1,2m} = \frac{m}{2m+1}C_{2m,2m}. \tag{1.15}$$

С учетом (1.13)— (1.15) из (1.12) следует

$$B_{2n-1} = \frac{1}{f^0}\sum_{s=0}A_{2s}\frac{d^{2s+1}}{dx^{2s+1}}(B_{2n+2s}f^0), \tag{1.16}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2};\quad A_{2s} = -\frac{1}{4(2s+1)}C_{2s,2s};$$

для $C_{2s,\,2s}$ имеем рекуррентную формулу (1.14). Значения нескольких первых коэффициентов A_{2s} равны

$$A_0 = \frac{1}{2},\quad A_2 = -\frac{1}{4!},\quad A_4 = \frac{3}{6!},\quad A_6 = -\frac{17}{8!},\quad A_8 = \frac{155}{10!}.$$

Соотношение (1.16) позволяет выразить момент перехода нечетного порядка через моменты более высокого четного порядка; из него, в частности, следует, что B_{2n-1} и B_{2n} имеют (за исключением особых условий) одинаковый порядок величины.

С учетом (1.16) уравнение (1.7) преобразуется в дифференциальное уравнение $2n$-го порядка, эквивалентное (1.1):

(1.17)
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=1} \left[\frac{1}{(2n)!} B_{2n} f^0 \frac{\partial^{2n-1}\psi}{\partial x^{2n-1}} + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{A_{2s}}{(2n-2s-1)!} \frac{\partial^{2n-2s-2}\psi}{\partial x^{2n-2s-2}} \frac{d^{2s+1}(B_{2n}f^0)}{dx^{2s+1}} \right].$$

Если в (1.17) отбросить все члены с $n \geqslant 2$, то получим уравнение фоккер-планковского типа. Но при определении условий аппроксимации удобнее исходить из уравнения в дивергентной форме.

После ряда преобразований, которые здесь опущены, (1.17) приводится к виду

$$(1.18)\quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1} \frac{1}{(2n)!} B_{2n} f^0 \frac{\partial^{2n-2}\psi}{\partial x^{2n-2}} + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=2} \sum_{k=2}^{2n-1} D_{nk} \frac{\partial^{2n-k-1}\psi}{\partial x^{2n-k-1}} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (B_{2n} f^0);$$

$$(1.19)\quad D_{n,2k} = -D_{n,2k+1},\ D_{nk} = (-1)^k \left(-\frac{1}{(2n)!} + \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \frac{A_{2s}}{(2n-2s-1)!} \right),\ \left[\frac{k}{2}\right] \text{ — целая часть от } \frac{k}{2}.$$

Исходное интегро-дифференциальное уравнение (1.1) с учетом (1.18), (1.19) запишется в дивергентной форме

$$(1.20)\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j};$$

$$(1.21)\qquad -j = G_1 + \sum_{n=2} \left\{ G_n + \sum_{m=1}^{n-1} H_{n,2m} \right\};$$

$$(1.22)\qquad G_n = D_{n1} \frac{\partial^{2n-2}\psi}{\partial x^{2n-2}} B_{2n} f^0;$$

$$(1.23)\quad H_{n,2m} = D_{n,2m} \left[\frac{\partial^{2n-m-1}\psi}{\partial x^{2n-2m-1}} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} (B_{2n} f^0) - \frac{\partial^{2n-2m-2}\psi}{\partial x^{2n-2m-2}} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (B_{2n} f^0) \right];$$

$$(1.24)\quad D_{n1} = \frac{1}{(2n)!},\ D_{n0} = -D_{n1},\ D_{n,2m} = D_{n,2m-2} + \frac{A_{2m-2}}{(2n-2m+1)!} = -\frac{1}{(2n)!} + \sum_{s=0}^{m-1} \frac{A_{2s}}{(2n-2s-1)!}.$$

Из (1.20), (1.21) следует, что кинетическое уравнение переходит в уравнение фоккер-планковского типа, если в выражении для потока дивергенции оставить один член — G_1. Для этого необходимо выполнение условия

$$|G_1| \gg \left| \sum_{n=2} \left\{ G_n + \sum_{m=1}^{n-1} H_{n,2m} \right\} \right| \tag{1.25}$$

и достаточно условия

(1.26)

$$|G_1| \gg |G_2| + |H_2|, |G_n| + \left| \sum_{m=1}^{n-1} H_{n,2m} \right| \gg |G_{n+1}| + \left| \sum_{m=1}^{n} H_{n+1,2m} \right|, \quad n \geqslant 2.$$

Соотношения (1.25), (1.26) с учетом (1.22)—(1.24) есть записанные в общем виде искомые условия аппроксимации. Эти условия зависят от величины и функциональной зависимости моментов перехода, а также от степени и характера отклонения функции распределения от равновесия.

Приведем выражения для первых трех коэффициентов $D_{n,2m}$, $m = 1, 2, 3$, и полуэмпирическую формулу для оценки последующих ($n \geqslant m + 1$)

$$D_{n2} = \frac{n-1}{(2n)!}, \quad D_{n4} = -\frac{(n-1)}{(2n)!}\left[\frac{n(2n-1)}{6} - 1\right],$$

$$D_{n6} = \frac{n-1}{(2n)!} + \frac{1}{4!\,(2n-3)!}\left[\frac{(2n-3)(2n-4)}{10} - 1\right],$$

$$D_{n,2m} \simeq \frac{n-1}{(2n)!} + \frac{1}{4!} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{(-1)^s q^{s-1}}{(2n-2s-1)!}, \quad q \simeq 0{,}1013, \quad m \geqslant 4,$$

последнее соотношение следует из (1.24), если принять $A_{2m}/A_{2m-2} = -q \simeq \mathrm{const}$; реально величина q изменяется очень незначительно, например от 0,10131 при $m = 4$ до $q = 0{,}10132$ при $m = 20$.

2. Условия аппроксимации и свойства моментов перехода для рэлеевского газа. Рассмотрим далее в качестве примера условия аппроксимации потока дивергенции одним членом в случае релаксации сравнительно «горячего» рэлеевского газа — малой примеси тяжелых частиц в среде легких атомов термостата; $m_2/m_1 = \lambda \ll 1$ (m_1 — масса частицы, m_2 — атома). Предполагается, что начальное распределение частиц по энергии соответствует больцмановскому с температурой T_0, причем $T_0 \gg T$, т. е.

$$f(x, 0) = n_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{x}}{(kT_0)^{3/2}} e^{-\frac{x}{kT_0}}, \quad T_0 \gg T, \tag{2.1}$$

$x = \frac{m_1 v_1^2}{2}$, v_1 — скорость частицы, $n_1 = \int_0^\infty f(x, 0)dx = \int_0^\infty f(x, t)dx$ — концентрация частиц. Ограничиваясь рассмотрением начальной существенно неравновесной стадии релаксации, с учетом (2.1)* для моментов времени $t < \tau_r$ можно принять

$$\psi = \frac{1}{f^0}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial \ln f^0}{\partial x}\right) \simeq \frac{\varphi}{kT}, \quad x > kT; \tag{2.2}$$

$$\partial^l \psi/\partial x^l \simeq \psi/(kT)^l. \tag{2.3}$$

Переходя в (1.20)—(1.23) к переменной $y = x/kT$, с учетом (2.3) получаем **

---

* Начальное распределение не обязательно должно быть больцмановским, важно, чтобы выполнялось приближение (2.2).

** Учитывая приближенный характер (2.2), (2.3), далее в сумме по n оставляем n_* членов; (1.20) — (1.23) для данной задачи не является строгим эквивалентом (1.1) из-за несимметрии пределов интегрирования, но для $x > kT(x \gg 2\langle\Delta^2\rangle)$ последним можно пренебречь.

$$kT\frac{\partial f}{\partial t} = -\operatorname{div} j(y); \tag{2.4}$$

$$-j(y) = \sum_{n=1}^{n_*}\left\{G_n(y) + \sum_{m=1}^{n-1} H_{n,2m}(y)\right\}, \tag{2.5}$$

где

$$G_n(y) = \frac{1}{(2n)!}\frac{B_{2n}}{(kT)^{2n}} f^0(y)\,\psi(y), \qquad \psi(y) = \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial y}; \tag{2.6}$$

$$H_{n,2m}(y) = D_{n,2m}\psi(y)\frac{d^{2m-1}}{dy^{2m-1}}\left(\frac{B_{2n}}{(kT)^{2n}} f^0(y) - \frac{d}{dy}\left(\frac{B_{2n}}{(kT)^{2n}} f^0(y)\right)\right). \tag{2.7}$$

Условия аппроксимации (1.25), (1.26) с (2.6), (2.7) зависят от свойств моментов перехода B_{2n} (и температуры термостата), в частности, (1.25) с учетом $f_0 \sim \sqrt{y}e^{-y}$, (2.6), (2.7) примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{B_2}{(kT)^2} \gg \left|\sum_{n=2}^{n_*}\left\{\frac{1}{(2n)!}\frac{B_{2n}}{(kT)^{2n}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\sum_{m=1}^{n-1} D_{n,2m}\sum_{s=0}^{2m-1}(-1)^{s+1}C_{2m-1}^{s} \times \right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{d^s}{dy^s}\left(\frac{2B_{2n}\sqrt{y}}{(kT)^{2n}} - \frac{d}{dy}\left(\frac{B_{2n}\sqrt{y}}{(kT)^{2n}}\right)\right)\right\}\right| \tag{2.8}$$

(C_n^s — биномиальный коэффициент), первое из условий (1.26) соответственно

$$\frac{1}{2}\frac{B_2}{(kT)^2} \gg \frac{1}{4!}\frac{B_4}{(kT)^4} + \frac{1}{4!\sqrt{y}}\left|\sum_{s=0}^{1}(-1)^{s+1}\frac{d^s}{dy^s}\left(\frac{2B_4\sqrt{y}}{(kT)^4} - \frac{d}{dy}\left(\frac{B_4\sqrt{y}}{(kT)^4}\right)\right)\right|. \tag{2.9}$$

Далее нужно конкретизировать коэффициенты B_{2n} — моменты перехода для рэлеевского газа. Момент перехода второго порядка ($n=1$) вычислялся неоднократно в связи с рассмотрением релаксации рэлеевского газа. В [2]* этот момент рассчитан в первом приближении по отношению масс атома и частицы, причем расчет выполнен для общего вида потенциала взаимодействия, и коэффициент B_2 выражен через известные в кинетической теории газов величины. В [3] в случае взаимодействия по закону твердых сфер получены точные значения первых трех моментов перехода $\langle\Delta\rangle$, $\langle\Delta^2\rangle$ и $\langle\Delta^3\rangle$; моменты рассчитаны с помощью полученного в этой же работе аналитического выражения для вероятности $\sim W(x, \Delta)$, которое в принципе позволяет рассчитать моменты и более высокого порядка, однако для $n > 1$ такой расчет становится весьма громоздким.

Для целей данной работы достаточно ограничиться расчетом в том же приближении, что и в [2]; это приближение соответствует расчету в первом порядке теории возмущений по взаимодействию, при котором изменением энергии атома в результате столкновения с частицей можно пренебречь. Но в [2] не уточнялось, какой порядок величины по λ ($\sqrt{\lambda}$ или λ) должны иметь отброшенные члены.

Ниже на основе методов кинетической теории [4] кратко описан путь расчета коэффициента B_{2n} без использования явного вида $W(x, \Delta)$ и показано, что результат точного расчета B_{2n} должен содержать члены с λ только в степени целых чисел. Поэтому, если в первом приближении в выражении для B_{2n} учесть члены с наинизшей степенью $\lambda \sim \lambda^s$, то отброшенные члены будут пропорциональны λ^{k+s}, $k \geqslant 1$. Затем получены зна-

* В работе [2] рассмотрена более общая задача — о релаксации рэлеевского газа с вращательными степенями свободы; в рассмотренном [2] приближении поступательная и вращательная релаксации происходят независимо.

чения B_{2n} в первом приближении. Описанный здесь способ расчета позволяет рассчитать моменты перехода в любом приближении по λ, но такой расчет не входит в задачу данной работы.

Для расчета B_{2n} следует рассмотреть динамику столкновения частицы с атомом. Введем обозначения: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{p}_1$ — скорость и импульс частицы; $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{p}_2$ — атома; $\mathbf{g} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$; $M = m_1 m_2/(m_1 + m_2) = m_2/(1 + \lambda)$. Изменение энергии частицы за столкновение равно

$$\Delta x = \frac{(\Delta P_1)^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{p}_1 \Delta \mathbf{p}_1)}{m_1},$$

$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2$, $\Delta \mathbf{p}_i$ — изменение импульса i-й частицы за столкновение,

$$(2.10) \qquad (\Delta x)^{2n} = \left(\frac{1}{2m_1}\right)^{2n} \sum_{r=0}^{2n} (2m_1)^r C_{2n}^r (\Delta p_2)^{4n-r} (\mathbf{v}_1 \mathbf{k})^r, \quad \mathbf{k} = \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta p_1}.$$

Далее принимается, что динамика столкновения соответствует случаю взаимодействия по закону твердых сфер [4]. При этом $\Delta p_2 = 2Mg \cos \psi_1$, $\psi_1 = (1/2)(\pi - \chi)$, χ — угол рассеяния при столкновении,

$$(2.11) \qquad \frac{\langle (\Delta x)^{2n} \rangle}{\tau} = \int (\Delta x)^{2n} dN,$$

где dN — число атомов, скорость которых лежит в интервале $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_2$, рассеиваемых частицей на угол χ, $\chi + d\chi$ в единицу времени, равно

$$dN = g f_2^0 (\mathbf{v}_2)\, d\mathbf{v}_2 d\sigma,$$

где $d\sigma$—сечение рассеяния на угол χ, $\chi + d\chi$; $f_2^0 = n_2 \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m_2 v_2^2/2kT}$; n_2 — концентрация атомов; для рассматриваемой модели взаимодействия имеем

$$(2.12) \qquad dN = g\sigma_{12}^2 \cos \psi_1 \sin \psi_1 f_2^0 v_2^2 \sin \theta d\theta d\psi_1 d\varepsilon d\varphi dv_2,$$

здесь ψ_1 и ε — орбитальный и азимутальный углы вектора $\mathbf{k}$ относительно $\mathbf{g}$, а θ и φ — вектора $\mathbf{v}_2$ относительно $\mathbf{v}_1$; ψ_1 изменяется от 0 до $\pi/2$; θ — от 0 до π; ε и φ — от 0 до 2π; $\sigma_{12} = (1/2)(\sigma_1 + \sigma_2)$, σ_i — диаметр i-й сферы.

В (2.12) можно перейти от переменной интегрирования θ к g

$$g^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta, \quad g dg = v_1 v_2 \sin \theta d\theta,$$

пределы интегрирования по dg изменяются от $v_2 - v_1$ до $v_2 + v_1$ при $v_2 > v_1$ и от $v_1 - v_2$ до $v_2 + v_1$ при $v_2 < v_1$.

В (2.11) с учетом (2.10), (2.12) остается неопределенной величина $(\mathbf{v}_1 \mathbf{k})$; совмещая ось z с вектором $\mathbf{g}$, получаем

$$(2.13) \qquad (\mathbf{v}_1 \mathbf{k}) = v_1 \sin \alpha \sin \psi_1 \cos (\varphi - \varepsilon) + v_1 \cos \psi_1 \cos \alpha.$$

С учетом $g^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2(\mathbf{v}_1 (\mathbf{g} + \mathbf{v}_1)) = v_2^2 - v_1^2 - 2v_1 g \cos \alpha$ имеем

$$(2.14) \qquad \cos \alpha = \frac{1}{2gv_1} \left(g^2 + v_1^2 - v_2^2\right) \equiv \frac{A_1}{2gv_1},$$

соотношение (2.14) позволяет выразить $(\mathbf{v}_1 \mathbf{k})$ через переменные g, v_2, ψ_1, ε, φ.

В результате из (2.11) с учетом (2.10), (2.12), (2.13) можно получить

$$B = \left(\frac{1}{2m_1}\right)^{2n} \sigma_{12}^2 \sum_{r=0}^{2n} \sum_{s=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} K_{nrs} (2m_1)^r \int f_2^0 g^{4n-r} v_1^r \cos^{r-2s}\alpha \sin^{2s}\alpha \frac{v_2}{v_1} dv_2 dg,$$

(2.15) $\left[\frac{r}{2}\right]$ — целая часть от $\frac{r}{2}$,

$$K_{nrs} = C_{2n}^{r} C_{r}^{s} \int \cos^{4n-2s+1}\psi_1 \sin^{2s+1}\psi_1 \cos^{2s}(\varphi - \varepsilon)\, d\psi_1 d\varepsilon d\varphi.$$

Из рассмотрения интеграла в (2.15) следует, что его можно представить в виде (числа l, k, m имеют формальный смысл)

$$v_1^{2k} \int f_2^0 g^{2l} \frac{v_2}{v_1} v_2^{2m} dv_2 dg = v_1^{2k} \left\{ \frac{1}{v_1} \int_{v_1}^{\infty} e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}} v_2^{2m+1} \int_{v_2-v_1}^{v_2+v_1} g^{2l} dg dv_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{v_1} \int_{0}^{v_1} e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}} v_2^{2m+1} \int_{v_1-v_2}^{v_2+v_1} g^{2l} dg dv_2 \right\},$$

что сводится к интегралам вида

$$\int_{\lambda y}^{\infty} e^{-z} z^k dz \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda y}} \int_{0}^{\sqrt{\lambda y}} e^{-z^2} dz, \quad y = \frac{x}{kT},$$

которые являются рациональной функцией λy, т. е. содержат только $(\lambda y)^k$, $k \geqslant 0$. Таким образом, B_{2n} в конечном результате содержит только члены с λ^k, $k \geqslant 1$. Выражение (2.15) с учетом (2.10) позволяет получить точные значения B_{2n}.

Рассмотрим момент нулевого порядка —$1/\tau$, эта величина соответствует частоте столкновения $P_{12}(v_1)$ частицы, имеющей скорость v_1, с атомами и равна [4]

$$\frac{1}{\tau} = 2n_2\sigma_{12}^2 \left(\frac{2\pi kT}{m_2}\right)^{1/2} \left\{ e^{-\lambda y} + (2\lambda y + 1) \int_{0}^{\sqrt{\lambda y}} e^{-z^2} dz \right\} = \frac{1}{\tau_0} + 0(\lambda y)$$

(τ_0 — время свободного пробега частицы в газе).

Искомые значения B_{2n} в первом приближении можно получить, полагая в (2.11) с учетом (2.10), (2.12) $g \simeq v_2$, $(v_1 k) \simeq v_1 \cos\gamma$ и усредняя $\cos^r\gamma$ по сфере; в результате имеем

(2.16) $$B_{2n} = \frac{1}{\tau_0} b_{2n} y^n (kT)^{2n} \left[1 + 0\left(\lambda^s, (\lambda y)^l\right)\right],$$

$$s, l \geqslant 1, \; b_{2n} = \frac{n!\,(16\lambda)^n}{2\,(2n+1)}, \quad y \gg n(n+1)(2n+1)\lambda.$$

С учетом (2.16) условие (2.8) принимает вид

(2.17) $$\frac{1}{2} b_2 y \gg \left| \sum_{n=2}^{n_*} \frac{1}{(2n)!} b_{2n} y^n \left\{ 1 + (2n)! \sum_{m=1}^{n-1} D_{n,2m} \sum_{s=0}^{2m-1} (-1)^{s+1} C_{2m-1}^{s} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \frac{h_{ns}}{y^s} \left(2 - \frac{2n-2s+1}{2y}\right)\right\}\right|,$$

где принято $\frac{d^s y^{n+1/2}}{dy^s} \equiv h_{ns} y^{n+\frac{1}{2}-s}$; (2.17) не является строгим эквивалентом (2.8), поскольку каждый n-й член ряда в (2.17) определен лишь с точностью до λ^r, $r \geqslant n+1$. Однако это соотношение показывает, что если в правой части (2.17) заметный вклад дают члены с $n \leqslant n_*$, то для строгого определения необходимых условий аппроксимации в начальной стадии процесса нужно в (2.8) использовать значение B_{2n}, рассчитанное с точностью до членов $\sim\lambda^{n_*+1}$.

Расчет B_{2n} в (2.16) дает возможность определить достаточные условия аппроксимации и оценить порядок величины членов, входящих в поток дивергенции.

Достаточные условия аппроксимации потока дивергенции одним членом (см. (1.26)) соответствуют теперь требованию, чтобы n-й член ряда из (2.17), в котором второе слагаемое взято по модулю, был много больше последующего, $(n+1)$-го; они позволяют получить соотношения между возможными значениями y и λ, в частности, из них для верхней границы значений $y(y \gg 1)$ при $n \geqslant 5$, $n^3 < y/\lambda$ следует $y \ll 1/16\lambda$. Если ограничиться условием (2.9) с учетом (2.16), то получим, что фоккер-планковский член много больше следующего за ним при $y \ll 1/\lambda$.

Из (2.4)—(2.7) с учетом (2.16) следует также, что каждый последующий член в потоке дивергенции по отношению к предыдущему есть величина $\sim\lambda$ и в уравнении фоккер-планковского типа коэффициент B_2, как правило, достаточно рассчитывать с точностью до λ, $B_2 = \frac{8}{3\tau_0}\lambda y (kT)^2$, поскольку отброшенные в уравнении члены имеют порядок $B_{2n} \sim \lambda^n$, $n \geqslant 2$.

Поступила 1 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Siegel A.** Differential-operator approximations to the linear Boltzman equation.— «J. Math. Phys.», 1960, vol. 1, N 2, p. 378;
Van Kampen N. J. A power series expansion on the master equation.— «Can. J. Phys.», 1961, vol. 39, N 4, p. 551;
Akama H., Siegel A. Small-parameter expansions of linear Boltzman collision operators.— «Physica», 1965, vol. 31, N 10, p. 1493.
2. **Сафарян М. Н., Ступоченко Е. В.** Вращательная релаксация двухатомных молекул в легком инертном газе.— ПМТФ, 1964, № 4.
3. **Andersen K., Shuler K.** On the relaxation of the hardsphere Rayleigh and Lorentz gas.— «J. Chem. Phys.», 1964, vol. 40, N 3, p. 633.
4. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ., 1960.

УДК 621.371.255

ВОЗДЕЙСТВИЕ ВЧ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ДИСПЕРСИЮ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

В. В. Демченко, А. Я. Омельченко

(*Харьков*)

В обзоре [1] значительное место уделено исследованию эффекта стабилизации различного рода неустойчивостей высокочастотными полями. Стабилизация гидродинамической токовой неустойчивости однородным ВЧ электрическим полем впервые рассмотрена в работе [2].