

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ТРЕФФЦА ДЛЯ ОЦЕНКИ ВКЛАДА ЭФФЕКТА ХОЛЛА ПРИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОМ ЗОНДИРОВАНИИ

В.В. Плоткин¹, В.С. Могилатов^{1,2}, В.В. Потапов¹

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3, Россия

² Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Россия

Рассматриваются возможные проявления эффекта Холла в магнитном поле Земли при магнитотеллурическом зондировании. Приводятся результаты численных расчетов величины эффекта для трехмерно неоднородной среды с использованием модификаций метода Треффца, пригодных для учета анизотропии. Анализируются варианты измерений, при которых наиболее просто обнаружить проявления эффекта Холла.

Магнитотеллурическое зондирование трехмерно неоднородной среды, эффект Холла, метод Треффца, электропроводность.

MODIFICATIONS OF THE TREFFTZ METHOD FOR ESTIMATING THE CONTRIBUTION OF THE HALL EFFECT ON MAGNETOTELLURIC SOUNDING

V.V. Plotkin, V.S. Mogilatov, and V.V. Potapov

Possible manifestations of the Hall effect in the Earth's magnetic field during magnetotelluric sounding are considered. Numerical calculations are made for the magnitude of the effect for a three-dimensional heterogeneous earth, using modifications of the Trefftz method suitable for accounting for anisotropy. Versions of the measurement that allow easy detection of manifestations of the Hall effect are analyzed.

Magnetotelluric sounding of a three-dimensional heterogeneous earth, Hall effect, Trefftz method, electrical conductivity

ВВЕДЕНИЕ

Многие минералы по физическому механизму электропроводности относятся к полупроводникам [Shuey, 1975]. Вмещающие породы над залежами нефти и газа, пронизываемые потоком углеводородных флюидов, также представляют собой полупроводниковую среду [Гололобов, Малевич, 2005]. Один из основных экспериментальных методов определения параметров электропроводности полупроводниковых минералов (плотности носителей тока и их подвижности) основан на эффекте Холла. Поэтому из-за присутствия магнитного поля Земли при электромагнитных зондированиях вполне можно ожидать проявления этого же эффекта с минералами, находящимися в горных породах в естественных условиях. Впервые интерес к этому явлению возник по результатам электромагнитных зондирований с контролируемыми источниками в районах ареалов углеводородов [Могилатов, 2013].

Трудность в том, что электропроводность полупроводников изменяется в широких пределах в зависимости от наличия примесей и неоднородности решетки, температурных и акустических колебаний [Буш, 1952]. Известные из литературы экспериментальные результаты лабораторных измерений зависят от способа приготовления образцов. Все это существенно усложняет предварительные оценки величины предполагаемого эффекта.

Для обнаружения эффекта Холла в естественных условиях важна величина холловской проводимости среды. В лабораторных экспериментах с образцами обычно измеряют проводимость полупроводника σ и холловскую постоянную R_H . Одновременные измерения проводимости и эффекта Холла необходимы для выяснения механизма проводимости. Они позволяют определить холловскую подвижность μ_e , плотность носителей тока, тип проводимости (электронная, дырочная или смешанная) и провести грубую оценку холловской проводимости $\sigma_H \approx \sigma \mu_e B$ (B — индукция геомагнитного поля). Следует подчеркнуть применимость последнего соотношения лишь к лабораторным экспериментам, когда получены результаты одновременных измерений σ и R_H , и измеряемый полупроводник известен. Поскольку проводимость полупроводников зависит от типа носителей тока, холловская подвижность μ_e может отличаться от обычной дрейфовой подвижности, используемой на практике для оценки электропроводности горных пород σ . Произвольную горную породу следует рассматривать лишь как некоторый но-

вый образец, для которого также необходимы одновременные измерения проводимости и эффекта Холла. Формальное применение соотношения $\sigma_H \approx \sigma \mu_e B$ для геологической среды с уже заданной электропроводностью без одновременных измерений σ и σ_H может привести к неверным оценкам подвижности носителей тока μ_e и безразмерного параметра $\mu_e B$, а в итоге — проявлений эффекта Холла по порядку величины. Поэтому возникает вопрос, как на практике провести одновременные измерения σ и σ_H , какие методы предпочтительнее использовать.

Важно также, что в отсутствие прямых экспериментальных измерений указанных параметров геологической среды можно говорить лишь о тех или иных предположениях по физической природе подвижности. В этой связи можно напомнить о течении вязкой проводящей жидкости в магнитном поле (течении Гартмана). Возникает некая аналогия с перемещением флюидов в пористой среде. Каковы характеристики этого процесса, сказать трудно. Пока лучше говорить об эффективной подвижности носителей тока геологической среды. Оценки ее величины станут доступными только по результатам одновременных полевых экспериментальных измерений σ и σ_H .

Анализ лабораторных экспериментальных результатов по измерению проводимости различных рудных минералов [Parkhomenko, 1967; Shuey, 1975] показывает, что в некоторых случаях вполне можно ожидать значений $\sigma_H \leq 0.001$ См/м. Например, у галенита при средней проводимости образцов ~ 1000 См/м, подвижности $\mu_e \sim 200$ см²/(В·с) и $B \sim 5 \cdot 10^{-5}$ Тл холловская проводимость $\sigma_H = 0.001$ См/м. Несколько меньше холловская проводимость пирита, так как многие опубликованные значения подвижности электронов лежат в интервале 10—50 см²/В·с при такой же средней проводимости образцов. Пирит определяет электропроводность серного колчедана, и в зависимости от количества пирита ее величина колеблется в широких пределах. Большой диапазон значений электропроводности горных пород (около двадцати порядков) обусловлен свойствами и составом входящих в них различных минералов. Это также касается и возможных значений холловской проводимости горных пород. Поэтому использовать какие-либо достоверные ее значения станет возможным лишь после экспериментальных измерений σ_H в естественных условиях.

Чтобы правильно спланировать экспериментальные работы и выбрать подходящие электромагнитные методы, нужны численные оценки вклада эффекта Холла в результаты измерений. Это позволит априори определить те величины холловской проводимости, которые могут быть обнаружены современными электромагнитными методами в естественных условиях. Нужны также методики, позволяющие в эксперименте определять σ_H .

В работе [Плоткин, 2017] предложена методика определения вклада эффекта Холла при магнитотеллурическом зондировании (МТЗ) горизонтально-слоистой среды. Она сводится к определению модовых импедансов при расчете отклика на возбуждение среды волнами с различной поляризацией. За счет эффекта Холла отклик среды может быть неодинаковым в случаях возбуждения среды лишь одной из нормальных волн, имеющих место в анизотропном случае. Выбирая в эксперименте сеансы с различным направлением вращения векторов электрического или магнитного полей, можно определить тензор импеданса отдельно для этих волн. Показано так же, как можно перейти от общего тензора импеданса к модовым импедансам, не разделяя сеансы по разным модам.

В реальности ситуация осложняется присутствием латеральных неоднородностей электропроводности. В данной работе численные оценки вклада эффекта Холла выполнены для трехмерно неоднородной среды с использованием при расчете магнитотеллурического поля метода Треффца [Егоров, 2011].

МЕТОД ТРЕФФЦА ДЛЯ СРЕДЫ В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Будем рассматривать возможное влияние магнитного поля Земли на результаты МТЗ, учитывая холловскую проводимость среды σ_H . Выберем систему декартовых координат с осью OX , направленной на северный магнитный полюс, осью OZ — вниз в среду, и осью OY , перпендикулярной плоскости магнитного меридиана. В этой системе координат тензор электропроводности $\hat{\sigma}$ имеет вид:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma_H \cos(\vartheta) & 0 \\ \sigma_H \cos(\vartheta) & \sigma & -\sigma_H \sin(\vartheta) \\ 0 & \sigma_H \sin(\vartheta) & \sigma \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где σ — обычная электропроводность среды, ϑ — угол отклонения вектора магнитного поля от вертикали. Приведем также тензор, обратный (1):

$$\hat{\sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma(1+\xi^2)} \begin{pmatrix} 1+\xi^2 \sin^2 \vartheta & \xi \cos \vartheta & \xi^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -\xi \cos \vartheta & 1 & \xi \sin \vartheta \\ \xi^2 \sin \vartheta \cos \vartheta & -\xi \sin \vartheta & 1+\xi^2 \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\xi = \sigma_H/\sigma$. В зависимости от величины ξ возможны различные варианты применения метода Треффца для изучения проявлений эффекта Холла в трехмерно неоднородной анизотропной среде.

Как известно, при использовании метода Треффца расчетная область представляется набором конечных элементов – параллелепипедов, внутри которых среда однородна. Для изотропного случая в каждом параллелепипеде используются решения уравнений Максвелла в виде поперечных встречных волн, распространяющихся вдоль каждой из осей координат. С учетом поляризации всего имеется 12 таких волн, неизвестные амплитуды которых находятся из условий сшивки на всех гранях упомянутых параллелепипедов, а также из граничных условий.

В анизотропной среде вырождение по поляризации волн снимается. Волны, называемые в оптике нормальными, распространяются вдоль осей координат с разной скоростью в зависимости от поляризации. Рассмотрим, как можно использовать эти волны для численного решения уравнений Максвелла по методу Треффца.

Модификация метода Треффца с нормальными волнами. Пусть задана горизонтально-слоистая среда — нормальный разрез $\sigma_0(z)$ с параметрами $\sigma_n, h_n, n = 1, \dots, N, h_N \rightarrow \infty$. Пусть также $\mathbf{E}_0(z)$ — нормальное поле, возникающее в этой среде при магнитотеллурическом зондировании. Предположим далее, что под влиянием постоянного магнитного поля Земли в этой среде появляется холловская проводимость, и электропроводность среды становится тензорной величиной (1).

Чтобы изучить проявления эффекта Холла в трехмерно неоднородной среде, будем считать, что в (1), (2) все величины (кроме ϑ) зависят не только от z , но также и от горизонтальных координат. В этой ситуации удобней вести расчеты для аномального поля $\mathbf{E}$, возникающего вследствие анизотропии и 3D-неоднородности среды дополнительно к нормальному полю $\mathbf{E}_0(z)$. Учитывая, что

$$\Delta \mathbf{E}_0 - k_0^2(z) \mathbf{E}_0 = 0, \quad k_0^2 = i\omega\mu\sigma_0(z), \quad (3)$$

для аномального поля $\mathbf{E}$ получаем уравнение с правой частью:

$$\Delta \mathbf{E} - \text{grad div} \mathbf{E} - i\omega\mu\hat{\sigma}\mathbf{E} = i\omega\mu(\hat{\sigma} - \sigma_0\hat{I})\mathbf{E}_0(z), \quad (4)$$

где $\hat{I}$ — единичный тензор. Далее потребуется частное решение (4), связанное с наличием правой части. Пренебрегая внутри параллелепипедов зависимостью поля $\mathbf{E}_0(z)$ от z и учитывая в них однородность среды, это частное решение можно записать в виде

$$\mathbf{E}_d = (\sigma_0\hat{\sigma}^{-1} - \hat{I})\mathbf{E}_0. \quad (5)$$

В анизотропной среде нужно использовать решения уравнения (4). Их можно найти, последовательно предполагая поле зависящим лишь от одной координаты. Комбинация таких решений содержит волны с 12 неизвестными амплитудами и для любого из параллелепипедов имеет вид:

$$\begin{aligned} E_x = & -2i \cos \vartheta \left[a_1 e^{k_{1z}(z-z_l)} + a_2 e^{-k_{1z}(z-z_l)} + a_3 e^{k_{2z}(z-z_l)} + a_4 e^{-k_{2z}(z-z_l)} \right] - \\ & - \cos \vartheta \left[a_5 e^{k_{1y}(y-y_n)} + a_6 e^{-k_{1y}(y-y_n)} \right] + \sin \vartheta \left[a_7 e^{k_{2y}(y-y_n)} + a_8 e^{-k_{2y}(y-y_n)} \right] - \\ & - \xi \sin \vartheta \cos \vartheta \left[a_9 e^{k_{1x}(x-x_m)} + a_{10} e^{-k_{1x}(x-x_m)} + a_{11} e^{k_{2x}(x-x_m)} + a_{12} e^{-k_{2x}(x-x_m)} \right] + \\ & + \frac{\eta - 1 - \xi^2 (1 - \eta \sin^2 \vartheta)}{1 + \xi^2} E_{0x} + \frac{\eta \xi \cos \vartheta}{1 + \xi^2} E_{0y}, \\ E_y = & Q_+ \left[a_1 e^{k_{1z}(z-z_l)} + a_2 e^{-k_{1z}(z-z_l)} \right] + Q_- \left[a_3 e^{k_{2z}(z-z_l)} + a_4 e^{-k_{2z}(z-z_l)} \right] - \\ & - \sin \vartheta \left[a_9 e^{k_{1x}(x-x_m)} + a_{10} e^{-k_{1x}(x-x_m)} + a_{11} e^{k_{2x}(x-x_m)} + a_{12} e^{-k_{2x}(x-x_m)} \right] + \\ & + \xi \left[a_5 e^{k_{1y}(y-y_n)} + a_6 e^{-k_{1y}(y-y_n)} \right] - \frac{\eta \xi \cos \vartheta}{1 + \xi^2} E_{0x} + \frac{\eta - 1 - \xi^2}{1 + \xi^2} E_{0y}, \\ E_z = & -\xi \sin \vartheta \left(Q_+ \left[a_1 e^{k_{1z}(z-z_l)} + a_2 e^{-k_{1z}(z-z_l)} \right] + Q_- \left[a_3 e^{k_{2z}(z-z_l)} + a_4 e^{-k_{2z}(z-z_l)} \right] \right) + \\ & + \sin \vartheta \left[a_5 e^{k_{1y}(y-y_n)} + a_6 e^{-k_{1y}(y-y_n)} \right] + \cos \vartheta \left[a_7 e^{k_{2y}(y-y_n)} + a_8 e^{-k_{2y}(y-y_n)} \right] + \end{aligned}$$

$$+P_+ \left[a_9 e^{k_{1x}(x-x_m)} + a_{10} e^{-k_{1x}(x-x_m)} \right] + P_- \left[a_{11} e^{k_{2x}(x-x_m)} + a_{12} e^{-k_{2x}(x-x_m)} \right] + \\ + \frac{\eta \xi^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \xi^2} E_{0x} - \frac{\eta \xi \sin \vartheta}{1 + \xi^2} E_{0y}, \quad (6)$$

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu} \left\{ k_{1z} Q_+ \left[a_1 e^{k_{1z}(z-z_l)} - a_2 e^{-k_{1z}(z-z_l)} \right] + k_{2z} Q_- \left[a_3 e^{k_{2z}(z-z_l)} - a_4 e^{-k_{2z}(z-z_l)} \right] - \right. \\ \left. - k_{1y} \sin \vartheta \left[a_5 e^{k_{1y}(y-y_n)} - a_6 e^{-k_{1y}(y-y_n)} \right] - k_{2y} \cos \vartheta \left[a_7 e^{k_{2y}(y-y_n)} - a_8 e^{-k_{2y}(y-y_n)} \right] \right\} + \frac{\eta \xi \cos \vartheta}{1 + \xi^2} H_{0y} + \frac{\eta - 1 - \xi^2}{1 + \xi^2} H_{0x}, \\ H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \left\{ 2ik_{1z} \cos \vartheta \left[a_1 e^{k_{1z}(z-z_l)} - a_2 e^{-k_{1z}(z-z_l)} \right] + 2ik_{2z} \cos \vartheta \left[a_3 e^{k_{2z}(z-z_l)} - a_4 e^{-k_{2z}(z-z_l)} \right] + \right. \\ \left. + k_{1x} P_+ \left[a_9 e^{k_{1x}(x-x_m)} - a_{10} e^{-k_{1x}(x-x_m)} \right] + k_{2x} P_- \left[a_{11} e^{k_{2x}(x-x_m)} - a_{12} e^{-k_{2x}(x-x_m)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\eta \xi \cos \vartheta}{1 + \xi^2} H_{0x} + \frac{\eta - 1 - \xi^2 (1 - \eta \sin^2 \vartheta)}{1 + \xi^2} H_{0y}, \right. \\ H_z = \frac{1}{i\omega\mu} \left\{ -k_{1y} \cos \vartheta \left[a_5 e^{k_{1y}(y-y_n)} - a_6 e^{-k_{1y}(y-y_n)} \right] + k_{2y} \sin \vartheta \left[a_7 e^{k_{2y}(y-y_n)} - a_8 e^{-k_{2y}(y-y_n)} \right] + \right. \\ \left. + k_{1x} \sin \vartheta \left[a_9 e^{k_{1x}(x-x_m)} - a_{10} e^{-k_{1x}(x-x_m)} \right] + k_{2x} \sin \vartheta \left[a_{11} e^{k_{2x}(x-x_m)} - a_{12} e^{-k_{2x}(x-x_m)} \right] \right\},$$

где введены обозначения:

$$k_{1x, 2x}^2 = k_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} \xi^2 \cos^2(\vartheta) \pm i \sqrt{\xi^2 \sin^2(\vartheta) - \frac{1}{4} \xi^4 \cos^4(\vartheta)} \right], \\ k_{1z, 2z}^2 = k_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} \xi^2 \sin^2(\vartheta) \pm i \sqrt{\xi^2 \cos^2(\vartheta) - \frac{1}{4} \xi^4 \sin^4(\vartheta)} \right], \\ k_{1y}^2 = k_0^2 (1 + \xi^2), \quad k_{2y}^2 = k_0^2, \quad P_{\pm} = -\frac{\xi}{2} \cos^2 \vartheta \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{4} \cos^4 \vartheta - \sin^2 \vartheta}, \\ Q_{\pm} = i \xi \sin^2 \vartheta \pm \sqrt{4 \cos^2 \vartheta - \xi^2 \sin^4 \vartheta}, \quad \eta = \sigma_0 / \sigma.$$

Как видно, общее решение для аномального поля (6) состоит из решения однородного уравнения (4) и частного решения, появляющегося из-за наличия правой части в (4). Для электрического поля оно получается из (5), для магнитного поля находится с помощью уравнения $\text{rot } \mathbf{E}_0 = -i\omega\mu \mathbf{H}_0$ с учетом зависимости поля $\mathbf{E}_0(z)$ только от одной координаты z . Частное решение определяет вклад в аномальное поле от холловской проводимости σ_H (параметр ξ) и 3D-отклонений электропроводности σ от нормального разреза $\sigma_0(z)$ (параметр η). Выражения (6) учитывают поляризацию полей анизотропных составляющих (соотношения между компонентами полей). Изменения полей анизотропных составляющих вдоль соответствующих осей координат относительно центров параллелепипедов x_m, y_n, z_l характеризуются волновыми числами $k_{1x, 2x}, k_{1y, 2y}$ и $k_{1z, 2z}$. Вычисления поля $\mathbf{E}_0(z)$ в зависимости от глубины производятся по методике, описанной в работах [Александров, 2001; Плоткин, 2017].

Для определения неизвестных амплитуд $a_1, \dots, a_{12}$ (6) во всех параллелепипедах необходимо решить систему алгебраических уравнений, получаемых из граничных условий и условий сшивки решений (6) между соседними параллелепипедами. Для этого в центральных точках всех внутренних граней соседних параллелепипедов, составляющих расчетную область, ставятся условия непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей.

На внешней поверхности расчетной области задаются внешние граничные условия (ГУ), соответствующие затуханию аномального поля вне этой области. Для постановки таких ГУ на верхней и нижней границах расчетной области можно применять двумерные преобразования Фурье поля по горизонтальным координатам [Плоткин, Губин, 2015].

Возможен также другой вариант ГУ: в тех параллелепипедах, которые прилегают одной из граней к внешней границе расчетной области, приравниваются нулю амплитуды всех волн, приходящих извне, т. е. нарастающих в сторону внешней границы области. Это означает отсутствие источников аномаль-

ного поля за пределами расчетной области. Помимо параллелепипедов у боковых границ (в них принимается, что модель среды соответствует нормальному разрезу) в расчетную область включаются также два дополнительных однородных слоя — верхний атмосферный и нижний подстилающий слой. Во всех упомянутых граничных параллелепипедах расчетной области считается, что $\eta = 1$ и $\xi = 0$. Подобные граничные условия упрощают матрицу системы алгебраических уравнений для определения неизвестных амплитуд волн в (6). Естественно, что количество уравнений с учетом всех условий сшивки и ВГУ равно общему количеству неизвестных амплитуд.

Как показал опыт, описанная модификация метода Треффца хорошо работает при достаточно больших величинах ξ , пока существенны различия между характеристиками нормальных волн, распространяющихся в одном направлении. В зависимости от модели среды матрица системы уравнений для определения амплитуд $a_1, \dots, a_{12}$ в (6) с уменьшением ξ может оказаться близкой к сингулярной. Поэтому при малой величине ξ предпочтительнее использовать другой подход.

Модификация метода Треффца для малых ξ . В предыдущем случае аномальным считалось все поле, возникающее дополнительно к $\mathbf{E}_0(z)$ — нормальному полю в горизонтально-слоистой среде. При малой холловской проводимости и слабых различиях между нормальными волнами применение метода Треффца более надежно лишь с использованием в параллелепипедах решений для изотропного случая. С этой целью в качестве аномальных будем теперь рассматривать возмущения полей $\mathbf{E}_d$ и $\mathbf{H}_d$, обусловленные только влиянием эффекта Холла. Пусть $\mathbf{E}_0(x, y, z)$ и $\mathbf{H}_0(x, y, z)$ — численные решения для изотропной трехмерно неоднородной среды с электропроводностью $\sigma(x, y, z)$. Тогда систему уравнений Максвелла для аномальных полей можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \hat{\sigma}^{-1} \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_0, \quad \text{rot } \sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_0 = -i\omega\mu\mathbf{H}_0, \\ \text{rot } \hat{\sigma}^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_d + i\omega\mu\mathbf{H}_d &= \text{rot} \left(\frac{\hat{I}}{\sigma} - \hat{\sigma}^{-1} \right) \text{rot } \mathbf{H}_0 = \text{rot} \left(\hat{I} - \sigma\hat{\sigma}^{-1} \right) \mathbf{E}_0, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \text{rotrot } \mathbf{E} &= -i\omega\mu\hat{\sigma}\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_0, \quad \text{rotrot } \mathbf{E}_0 = -i\omega\mu\sigma\mathbf{E}_0, \\ \text{rotrot } \mathbf{E}_d + i\omega\mu\hat{\sigma}\mathbf{E}_d &= i\omega\mu(\sigma - \hat{\sigma})\mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (7b)$$

С учетом малости $\xi = \sigma_H/\sigma \ll 1$ в левых частях уравнений для $\mathbf{E}_d$ и $\mathbf{H}_d$ в качестве основных решений в параллелепипедах при применении метода Треффца можно использовать решения для изотропного случая. При этом вклад холловской проводимости определяется правыми частями уравнений (7) с помощью приближенных частных решений, добавляемых к основным в параллелепипедах для изотропного случая:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= -\frac{1}{i\omega\mu} \text{rot} \left(\sigma\hat{\sigma}^{-1} - \hat{I} \right) \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}_p = -\frac{\xi}{i\omega\mu} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{E}_p &= \left(\sigma\hat{\sigma}^{-1} - \hat{I} \right) \mathbf{E}_0, \quad \text{rot } \mathbf{E}_0 = -i\omega\mu\mathbf{H}_0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma\hat{\sigma}^{-1} - \hat{I} \approx \begin{pmatrix} 0 & \xi \cos \vartheta & 0 \\ -\xi \cos \vartheta & 0 & \xi \sin \vartheta \\ 0 & -\xi \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_p = \left(\sigma\hat{\sigma}^{-1} - \hat{I} \right) \mathbf{H}_0 - \frac{\xi}{i\omega\mu} \nabla (\mathbf{n} \mathbf{E}_0), \quad \mathbf{n} = (\sin \vartheta, 0, \cos \vartheta). \quad (10)$$

Частные решения для $\mathbf{H}_p$ и $\mathbf{E}_p$ в (8) получены из (7) в пренебрежении зависимостью поля $\mathbf{E}_0$ от координат внутри параллелепипедов и с учетом однородности среды в них. Тензор в (9) выписан лишь с точностью до линейных по ξ членов. Как показал опыт, использовать пространственные производные от $\mathbf{E}_0$ в (8) из-за неудовлетворительной их аппроксимации при численных расчетах методом Треффца не удастся. Однако решение для $\mathbf{H}_p$ можно привести к виду (10). Как видно из (10), решение без упомянутых производных справедливо, если пренебрегать продольной вдоль магнитного поля Земли составляющей $\mathbf{E}_0$. Для МТЗ и приближенных оценок вклада σ_H это вполне допустимо. Тогда частные решения $\mathbf{E}_p$ и $\mathbf{H}_p$, добавляемые к основным решениям в параллелепипедах для изотропного случая, имеют совсем простой вид и вычисляются одинаково с помощью тензора (9) (интересно сравнить их с приведенными в (6) при $\eta = 1$ и учете только линейных по ξ членов).

Что касается условий сшивки и граничных условий, то все сказанное выше остается справедливым и в этом варианте применения метода Треффца. Отметим, что в последнем варианте реализацию

программного обеспечения было удобней осуществить с использованием граничных условий на основе двумерных преобразований Фурье [Плоткин, Губин, 2015].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

С целью проверки работоспособности программного обеспечения на основе метода Треффца сначала были проведены численные расчеты для горизонтально-слоистой среды (верхние слои земной коры), взятой из работы [Плоткин, 2017]. В ней использован матричный численный метод решения уравнений Максвелла как системы уравнений первого порядка [Александров, 2001]. Модель горизонтально-слоистой среды представлена четырьмя слоями с мощностями сверху вниз 0.7, 5, 2 и 9 км и удельными сопротивлениями (УЭС) 100, 1000, 300 и 100 Ом·м соответственно, и подстилающей средой с УЭС 20 Ом·м. Холловская проводимость бралась равной 1/1000 См/м, угол отклонения магнитного поля от вертикали $\vartheta = 25^\circ$.

Описанная в работе [Александров, 2001] процедура при численных расчетах дает стандартный тензор импеданса, не зависящий от направлений вращения векторов поля. Для учета этого обстоятельства в работе [Плоткин, 2017] предложено использовать модовые импедансы $Z_{xy}^{m_{1,2}}, Z_{xx}^{m_{1,2}}, Z_{yx}^{m_{1,2}}, Z_{yy}^{m_{1,2}}$:

$$\begin{aligned} E_{x_{1,2}} &= (Z_{xx} g_{1,2} + Z_{xy}) H_{y_{1,2}}, & Z_{xy}^{m_{1,2}} &= E_{x_{1,2}} / H_{y_{1,2}}, \\ E_{x_{1,2}} &= (Z_{xx} + Z_{xy} / g_{1,2}) H_{x_{1,2}}, & Z_{xx}^{m_{1,2}} &= E_{x_{1,2}} / H_{x_{1,2}}, \\ E_{y_{1,2}} &= (Z_{yx} + Z_{yy} / g_{1,2}) H_{x_{1,2}}, & Z_{yx}^{m_{1,2}} &= E_{y_{1,2}} / H_{x_{1,2}}, \\ E_{y_{1,2}} &= (Z_{yx} g_{1,2} + Z_{yy}) H_{y_{1,2}}, & Z_{yy}^{m_{1,2}} &= E_{y_{1,2}} / H_{y_{1,2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $g_{1,2}$ — коэффициенты поляризации нормальных волн 1, 2. Как видно из (11), чтобы вычислить модовые импедансы по компонентам стандартного тензора импеданса, необходимо знать коэффициенты $g_{1,2}$. Вообще говоря, для горизонтально-слоистой среды они меняются от слоя к слою. Однако можно показать и подтверждается расчетами, что в средних широтах и при слабом эффекте, когда $\sigma_H \ll \sigma_n$, эти коэффициенты близки к значениям $g_{1,2} = \pm i$, которые и были взяты при расчетах. Для отображения результатов все импедансы в (11) по обычным формулам пересчитывались в кривые кажущихся сопротивлений и фазовые кривые.

При расчетах по методу Треффца размеры полигона были взяты 15×15 км с разделением на 5 параллелепипедов вдоль осей OX и OY (размеры параллелепипеда в горизонтальном сечении 3×3 км, всего их 25 в каждом слое). В варианте по методу Треффца с нормальными волнами добавлялись однородные слои: сверху — атмосферный слой толщиной 1 м, снизу — подстилающий слой мощностью 1 км с УЭС 20 Ом·м. Общее количество параллелепипедов при этом возрастало до 150 (в варианте для малых $\xi = 100$).

Результаты расчетов показаны на рис. 1. Можно отметить хорошее качественное согласие между зависимостями кривых от временного периода, полученными разными численными методами. В то же время приближенный характер вычислений позволяет получить лишь грубые оценки величины эффекта. Для более точных вычислений по методу Треффца необходимо увеличивать количество параллелепипедов в расчетной области, что потребует и соответствующего возрастания вычислительных затрат. Однако некоторые выводы можно сделать уже сейчас. Сравнение стандартных кривых с модовыми кривыми (приведены только кривые ρ_{xy} для обеих нормальных волн, кривые ρ_{xy} слабо отличаются от них) показывает, что влияние эффекта Холла существенно больше сказывается на последних. Можно отметить, что эффект останется заметным и при меньших (на один-два порядка) величинах холловской проводимости.

Для оценки вклада более глубоких слоев в земной коре и латеральных неоднородностей рассматривалась также другая модель среды. Устойчивые результаты с ней были получены при выполнении расчетов по варианту метода Треффца для малых ξ . В этом случае модель среды представлена четырьмя слоями с мощностями сверху вниз 0.01, 15, 10 и 45 км, удельными сопротивлениями (УЭС) 1, 1000, 10 и 100 Ом·м соответственно и подстилающей средой с УЭС 10 Ом·м. Верхний слой использовался для моделирования искажений кривых МТЗ, обусловленных приповерхностными латеральными неоднородностями. С этой целью в центральном параллелепипеде верхнего слоя УЭС задавалась равной 0.2 Ом·м. Модель среды включала также коровый проводящий слой мощностью 10 км с кровлей на глубине ~15 км и УЭС 10 Ом·м и мантийный проводящий слой с УЭС 10 Ом·м с кровлей на глубине ~70 км. Холловская проводимость бралась равной 1/2000 См/м и углом отклонения магнитного поля от вертикали $\vartheta = 25^\circ$.

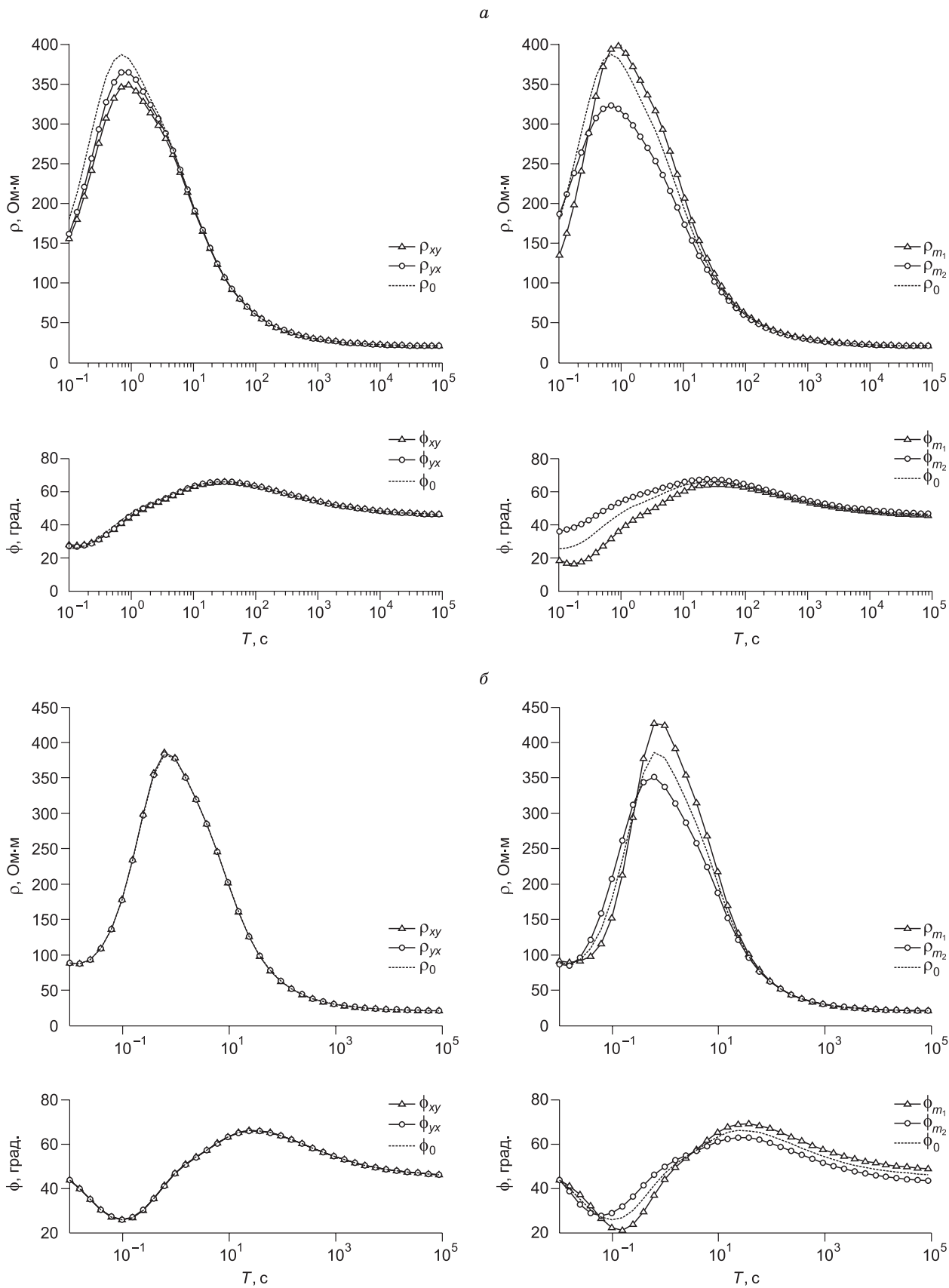


Рис. 1. Начало

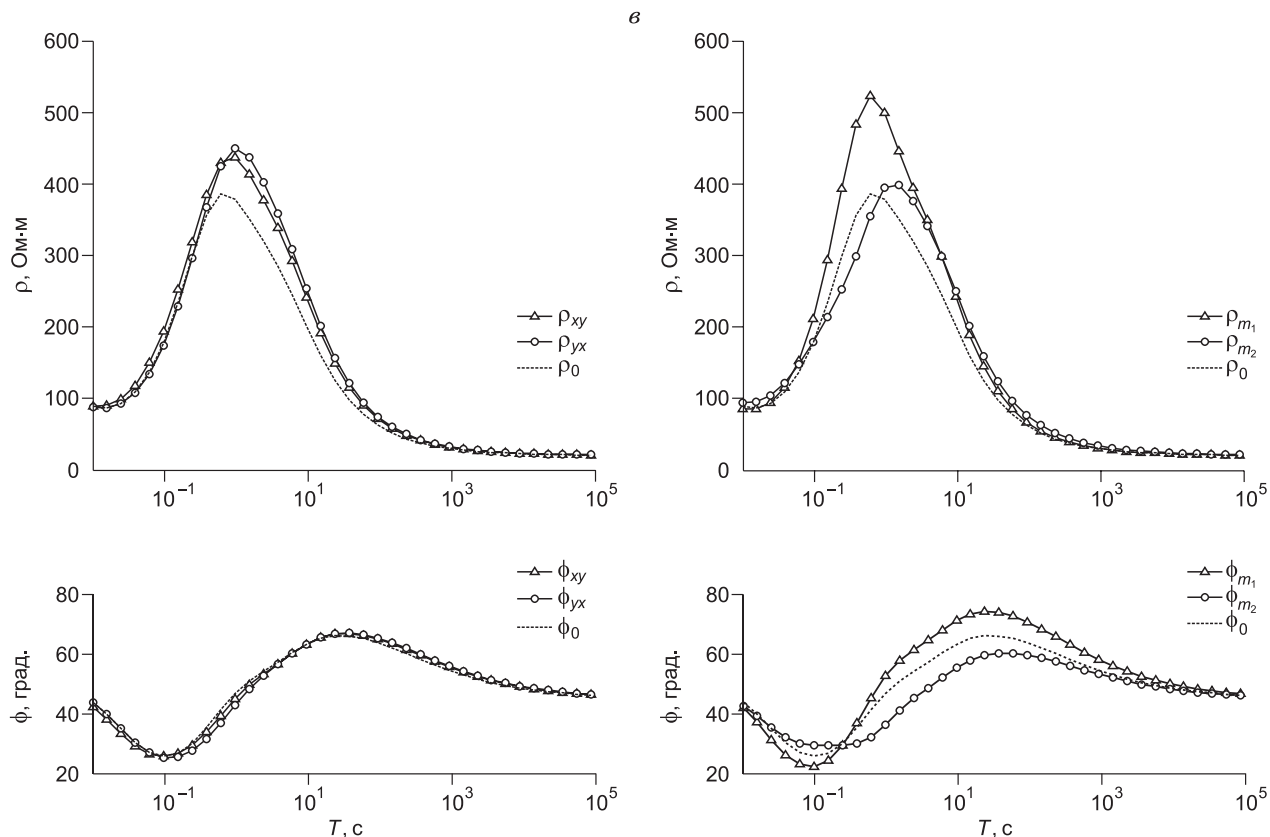


Рис. 1. Кривые МТЗ.

Слева — стандартные кривые, справа — модовые кривые, пунктир — кривые при $\sigma_H = 0$. Расчеты выполнены: *а* — по методу [Плоткин, 2017] и методом Треффца: *б* — при малых ξ , *в* — с нормальными волнами.

На рис. 2 отражены результаты расчета кривых МТЗ в центральном пункте полигона для модели среды с латеральной неоднородностью. На временных периодах более 10 с видны искажения кривых МТЗ — одинаковый статический сдвиг амплитудных кривых ρ_{xy} и ρ_{yx} относительно локальной кривой ρ_0 в пункте зондирования (под локальной понимается кривая для горизонтально-слоистой среды с зависимостью электропроводности от глубины в данном пункте). В случае, когда эффект Холла отсутствует (см. рис. 2, *а*), модовые кривые совпадают друг с другом и со стандартными кривыми (из-за симметрии латеральной неоднородности для рассматриваемого пункта дополнительные импедансы Z_{xx} и Z_{yy} равны нулю). Однако с появлением малой холловской проводимости (см. рис. 2, *б*) различие модовых кривых для нормальных волн становится уже заметным.

Рассмотрим теперь приведенные на рис. 3 полярные диаграммы для стандартных импедансов в рассматриваемом пункте. Диаграммы для главных импедансов Z_{xy} практически соответствуют горизонтально-слоистой среде. Это же относится к диаграмме для дополнительного импеданса Z_{xx} при $\sigma_H = 0$ (см. рис. 3, *а*). С учетом холловской проводимости (см. рис. 3, *б*) диаграмма для Z_{xx} становится подобной случаю двумерной неоднородности среды, при этом направление осей симметрии зависит и от величины σ_H .

Таким образом, в пункте над центром исследуемой латеральной неоднородности обнаружить влияние эффекта Холла и оценить σ_H можно, анализируя соотношение модовых кривых и учитывая форму полярной диаграммы для дополнительного импеданса.

Однако в других пунктах за пределами латеральной неоднородности, где и при $\sigma_H = 0$ Z_{xx} и Z_{yy} не равны нулю, они в соответствии с (11) вносят свой формальный вклад в модовые импедансы. В этих пунктах по модовым кривым и полярной диаграмме для дополнительного импеданса обнаружить влияние эффекта Холла затруднительно.

Можно указать еще на одну возможность обнаружить эффект Холла в рассматриваемом случае симметричной латеральной неоднородности. Как показали расчеты, в пунктах, расположенных непосредственно на осях OX или OY , импедансы Z_{xx} и Z_{yy} равны нулю, только когда $\sigma_H = 0$. Поэтому модовые кривые в них совпадают лишь в этом случае. Их различие полностью определяется величиной σ_H . Это также дает возможность ее оценки в эксперименте. Для достижения большей достоверности результата

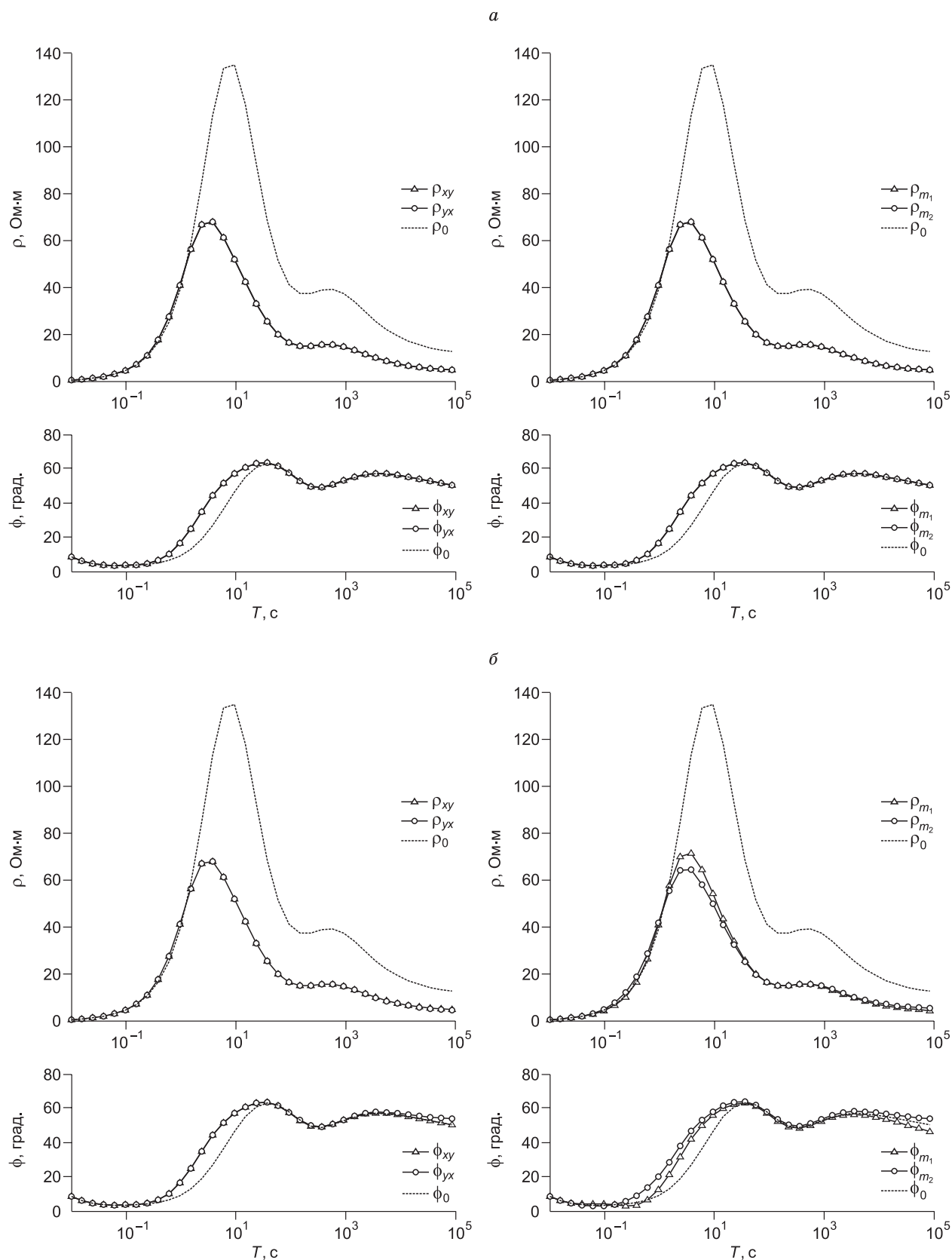


Рис. 2. Кривые МТЗ для пункта над центром латеральной приповерхностной неоднородности.

Слева — стандартные кривые, справа — модовые кривые, пунктир — локальные кривые. Здесь и на рис. 3, 4: расчеты для случаев: a — $\sigma_H = 0$, b — $\sigma_H = 1/2000$ См/м.

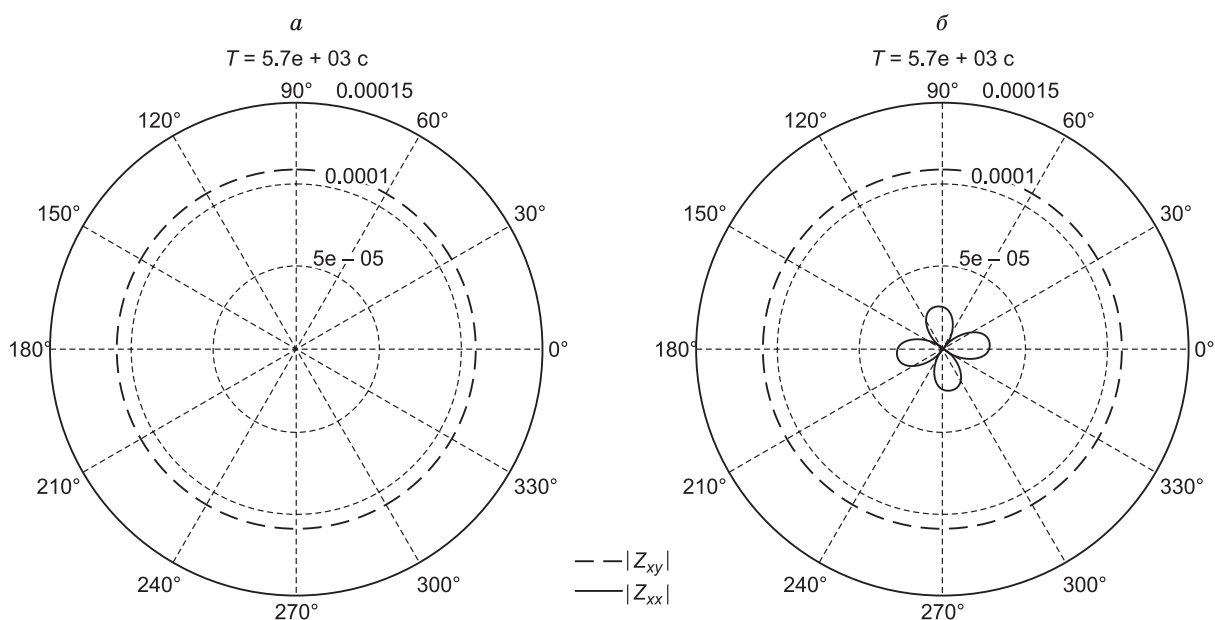


Рис. 3. Полярные диаграммы на периоде $T = 5.7 \cdot 10^3$ с для пункта над центром латеральной приповерхностной неоднородности.

Для наглядности амплитуда кривой $|Z_{xx}|$ увеличена в 10 раз.

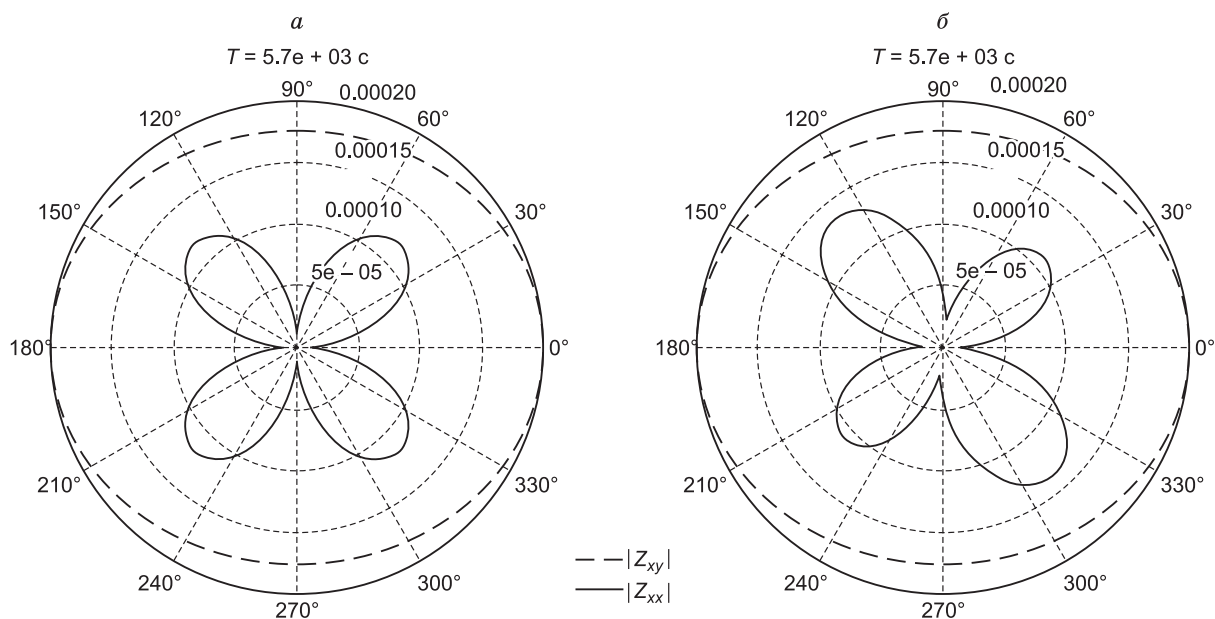


Рис. 4. Полярные диаграммы на периоде $T = 5.7 \cdot 10^3$ с для одного и того же пункта при двумерной латеральной приповерхностной неоднородности.

Для наглядности амплитуда кривой $|Z_{xx}|$ увеличена в 10 раз.

следует делать оценки по двум таким симметрично расположенным пунктам, поскольку картина в них должна совпадать.

Интересный результат получается в случае двумерной латеральной неоднородности. Для его изучения УЭС верхнего слоя в последней модели среды задавалось изменяющимся вдоль оси OX по линейному закону между значениями 0.8 и 1.2 Ом·м на краях полигона. На рис. 4 приведены полярные диаграммы для этого случая. Можно видеть, что диаграммы для дополнительных импедансов с учетом σ_H и без него заметно отличаются.

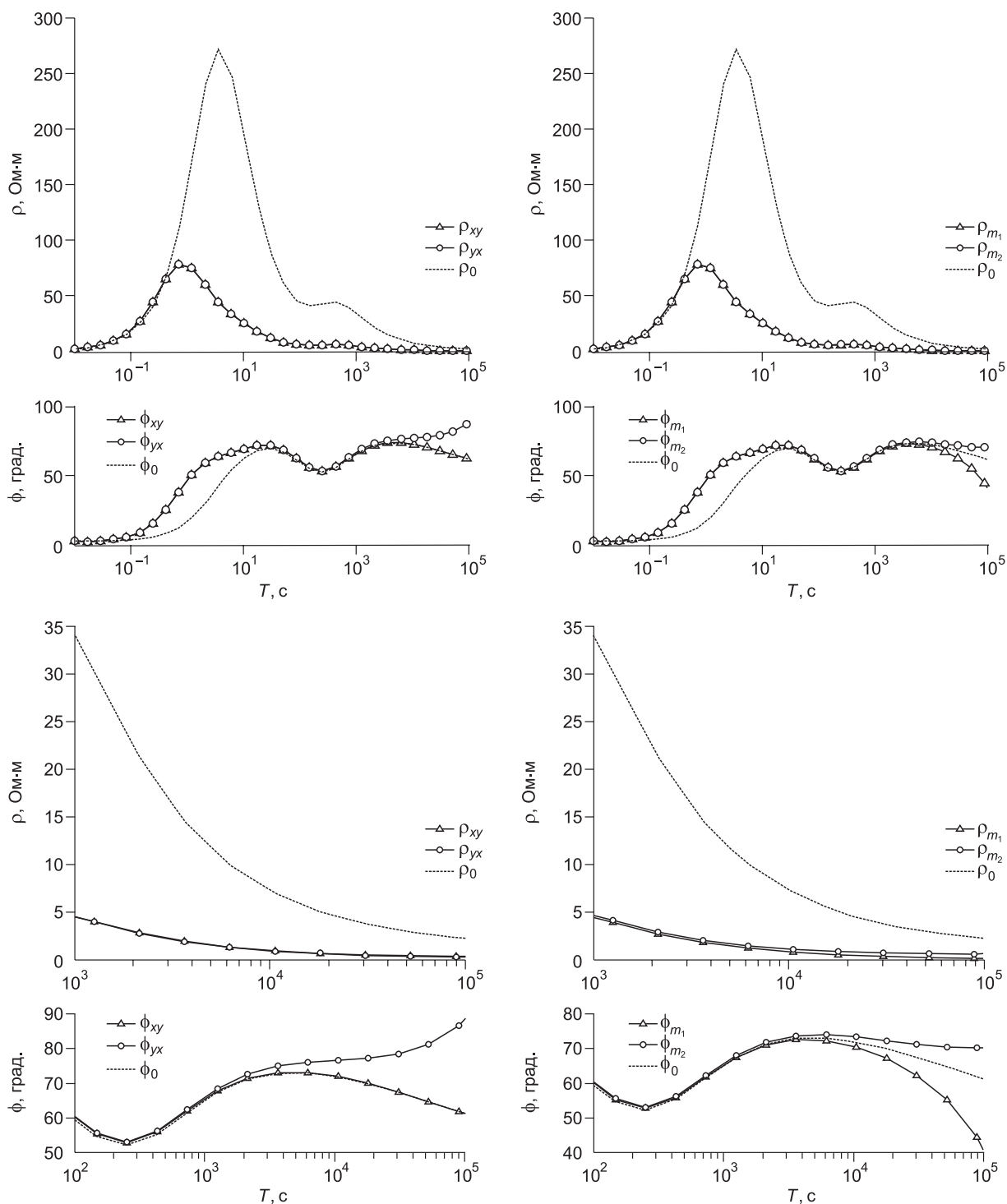


Рис. 5. Кривые МТЗ для пункта над центром латеральной приповерхностной неоднородности.

Слева — стандартные кривые, справа — модовые кривые, пунктир — локальные кривые, $\sigma_H = 0.00002$ См/м. Вверху — для всех периодов, внизу — с увеличением для больших периодов.

Необходимо сделать дополнительно пояснение относительно принятой величины σ_H . В проведенных расчетах значение холловской проводимости, равное 0.001 См/м, использовалось лишь в целях большей наглядности рисунков и ясности изложения предлагаемой методики. Понятно, что с уменьшением σ_H заметить проявления эффекта Холла все сложнее. Для примера на рис. 5 показаны результаты расчетов для модели с мощностями слоев сверху вниз 0.005, 15, 10 и 45 км, УЭС 10, 2000, 10 и 100 Ом·м

соответственно и подстилающей средой с УЭС 1 Ом·м. Величина холловской проводимости задавалась меньшей на два порядка — $\sigma_H = 0.00002$ См/м. Были просчитаны варианты, когда холловская проводимость присутствует: 1) во всех слоях модели, 2) только в самом верхнем тонком слое. Результаты обоих вариантов практически не различаются по величине. Это приводит к выводу, что при малых величинах холловской проводимости вклад в величину эффекта более глубоких слоев в данной модели существенно падает. Можно также видеть, как при $\sigma_H = 0.00002$ См/м менее заметны проявления эффекта: они присутствуют лишь на периодах больше 10^3 с и более заметны в поведении фаз импедансов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Один из экспериментальных методов определения электропроводности полупроводниковых минералов основан на эффекте Холла. Учитывая присутствие магнитного поля Земли, можно ожидать проявления эффекта Холла и в естественных условиях залегания этих минералов при проведении электромагнитных зондирований. Для экспериментального обнаружения эффекта Холла при магнитотеллурическом зондировании рассмотрены особенности его проявлений и выполнены численные оценки его величины.

Для учета влияния холловской проводимости на результаты измерений электропроводность задавалась в тензорном виде. Поскольку в реальности присутствуют латеральные неоднородности электропроводности, расчеты проводились для трехмерно неоднородной среды. Для их реализации выбран метод Треффца, и разработаны применимые для анизотропной среды его модификации. При численных расчетах определялось аномальное поле, возникающее вследствие анизотропии среды. В качестве нормального поля использованы численные решения для изотропной трехмерно неоднородной среды. Во внимание принимались искажения кривых МТЗ, обусловленные приповерхностными латеральными неоднородностями. Для разных моделей среды определялся стандартный тензор импеданса, который пересчитывался в модовые импедансы для нормальных составляющих анизотропного случая.

Представлены методики учета и численные оценки величины эффекта Холла, которые можно выявить современными электромагнитными методами зондирований.

Установлено, что наиболее просто обнаружить проявления эффекта Холла при симметрии латеральной неоднородности. Когда эффект Холла отсутствует, в пункте, расположенном над центром такой неоднородности, модовые кривые совпадают друг с другом. Однако с появлением малой холловской проводимости различие модовых кривых для нормальных волн становится заметным.

Влияние эффекта Холла можно также обнаружить, анализируя формы полярных диаграмм дополнительных импедансов, в том числе и в случаях двумерной латеральной неоднородности.

В проведенных расчетах значение холловской проводимости, равное 0.001 См/м, принималось лишь в целях большей наглядности рисунков и ясности изложения предлагаемой методики. Расчеты показали, что эффект останется заметным и при меньших (на один-два порядка) величинах холловской проводимости. Нельзя исключить, что в реальности эффект еще более слаб. С другой стороны, если бы все было так просто, эффект Холла давно бы заметили как в численных, так и в реальных экспериментах. Учитывая важность определения таких параметров геологической среды, как подвижность носителей тока и ее холловская проводимость, хотелось бы нашей статьей привлечь к этому эффекту большее внимание специалистов для проведения специально направленных экспериментов.

Авторы благодарят рецензентов Ю.А. Дашевского и Л.А. Табаровского за внимание к работе и полезные советы по улучшению статьи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 17-05-00083).

ЛИТЕРАТУРА

- Александров П.Н.** Прямая задача геоэлектрики в одномерных бианизотропных средах // Физика Земли, 2001, т. 37, № 4, с. 51—61.
- Буш Г.** Электронная проводимость неметаллов // УФН, 1952, т. 47, № 2, с. 258—324.
- Гололобов Д.В., Малевич И.Ю.** Физические и электрохимические процессы в среде над залежью углеродов // Докл. БГУИР, 2005, № 1, с. 22—27.
- Егоров И.В.** Метод Треффца для решения трехмерных прямых и обратных задач геоэлектрики // Физика Земли, 2011, т. 47, № 2, с. 15—26.
- Могилатов В.С.** О влиянии геомагнитного поля на процесс установления токов в земле // Геофизика, 2013, № 4, с. 70—75.
- Плоткин В.В.** Методика определения вклада эффекта Холла при магнитотеллурическом зондировании // XIII Международный научный конгресс и выставка ИНТЕРЭКСПО ГЕО-СИБИРЬ-2017. Меж-

дународная научная конференция «Недропользование. Горное дело. Новые направления и технологии поиска, разведки и разработки месторождений полезных ископаемых. Геоэкология» [Электронное издание]. Новосибирск, СГГА, 2017, т. 2, № 3, с. 187—192.

Плоткин В.В., Губин Д.И. Учет приповерхностных неоднородностей над горизонтально-слоистым разрезом при магнитотеллурическом зондировании // Геология и геофизика, 2015, т. 56 (7), с. 1381—1390.

Parkhomenko E.I. Electrical properties of rocks. New York, Plenum Press, 1967, 314 p.

Shuey R.T. Semiconducting ore minerals. New York, Elsevier Scientific Publishing Company, 1975, 287 p.

*Рекомендована к печати 1 марта 2018 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию 6 октября 2017 г.,
после доработки — 2 февраля 2018 г.*