$\mathcal{AMS}$ subject classification: 44A10, 26A33, 44A20, 34K37, 35A08.

Решение $(1+n)$-мерного дробного уравнения Бюргерса методом естественного разложения

М. Чериф[1,2], Д. Зиане[1], А. Аломари[3], К. Белгаба[1]

[1]Laboratory of mathematics and its applications (LAMAP) University of Oran1 Ahmed Ben Bella, Oran, 31000, Algeria

[2]Oran's Hight School of Electrical and Energetics Engineering (ESGEE), Oran, 31000, Algeria

[3]Department of Mathematics, Faculty of Science Yarmouk University, 211-63, Irbid, Jordan

E-mails: mountassir27@yahoo.fr (Чериф М.), djeloulz@yahoo.com (Зиане Д.), abdomari2008@yahoo.com (Аломари А.), belghaba@yahoo.fr (Белгаба К.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 13, 2020.

Чериф М., Зиане Д., Аломари А., Белгаба К. Решение $(1+n)$-мерного дробного уравнения Бюргерса методом естественного разложения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 4. — С. 441–455.

В этой статье мы используем объединение естественного преобразования с методом разложения Адомиана для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с дробными производными по времени. Мы применяем предложенный метод для получения приближенных аналитических решений $(1+n)$-мерного уравнения Бюргерса. Приведены иллюстративные примеры, которые показывают, что это очень эффективный и точный аналитический метод для решения нелинейных дробных уравнений в частных производных.

DOI: 10.15372/SJNM20200407

Ключевые слова: *метод разложения Адомиана, естественное преобразование,* $(1+n)$*-мерное уравнение Бюргерса, дробная производная Капуто.*

Cherif M., Ziane D., Alomari A.K., Belghaba K. Solving the $(1+n)$-dimensional fractional Burgers equation by natural decomposition method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 4. — P. 441–455.

In this paper, we extend the natural transform combined with the Adomian decomposition method for solving nonlinear partial differential equations with time-fractional derivatives. We apply the proposed method to obtain approximate analytical solutions of the $(1+n)$-dimensional fractional Burgers equation. Some illustrative examples are given, which reveal that this is a very efficient and accurate analytical method for solving nonlinear fractional partial differential equations.

Keywords: *Adomian decomposition method, natural transform,* $(1+n)$*-dimensional Burgers equation, Caputo fractional derivative.*

1. Введение

В последние годы многие исследователи проявляют интерес к решению линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Исследование точных решений нелинейных уравнений играет важную роль при изучении нелинейных физических явлений. Поэтому многие исследователи проявляют интерес к решению этого вида дифференциальных уравнений, будь то обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) или дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП). Некоторые преобразования, такие как преобразования Лапласа, Сумуду, естественное преобразование и преобразование Альзаки, не могут решить уравнения такого типа. Поэтому исследователи работают над тем, чтобы эти преобразования можно было использовать вместе с методом разложения Адомиана (МРА) для получения новых эффективных методов решения этого вида дифференциальных уравнений, таких как метод разложения Адомиана в сочетании с методом преобразования Лапласа [15], метод разложения Сумуду для нелинейных уравнений [4], алгоритм разложения преобразования Альзаки [6] и метод естественного разложения [5, 8, 9, 11, 14].

Цель данной статьи — расширить применение метода естественного разложения (МЕР) на нелинейные дробные уравнения в частных производных. Мы используем этот метод для решения $(1+n)$-мерного нелинейного дробного уравнения Бюргерса

$$ {}^cD_t^{\alpha}U(\mathbf{x},t) = \beta UU_{x_1} + \alpha_1 U_{x_1x_1} + \alpha_2 U_{x_2x_2} + \alpha_3 U_{x_3x_3} + \cdots + \alpha_n U_{x_nx_n} \tag{1} $$

при начальном условии

$$ U(\mathbf{x},0) = U_0(x), \tag{2} $$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $U_{x_1} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}$, $U_{x_nx_n} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}$, ${}^cD_t^{\alpha}$ — дробная производная Капуто порядка α, α_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, и β — постоянные.

Это уравнение используется при исследовании клеточных автоматов и систем взаимодействующих частиц. Оно также может использоваться в качестве модели для описания потоков воды в почвах.

2. Предварительные замечания

2.1. Дробное исчисление

Существует несколько определений дробной производной порядка $\alpha \geq 0$ (см. [2, 3]). Наиболее часто используются определения Римана–Лиувилля и Капуто. Мы дадим некоторые основные определения и свойства теории дробного исчисления, которые используются далее в этой статье.

Определение 1. Пусть $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ — конечный интервал на вещественной оси $\mathbb{R}$. Дробные интегралы Римана–Лиувилля $I^{\alpha}f$ порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$ определяются следующим образом:

$$ \begin{aligned} (I^{\alpha}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad t > 0,\ \alpha > 0, \\ (I^0 f)(t) &= f(t). \end{aligned} \tag{3} $$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ представляет собой гамма-функцию.

Теорема. *Пусть $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Если $f(t) \in AC^n[a,b]$, тогда дробные производные Капуто $({}^cD_{0+}^{\alpha}f)(t)$ существуют почти везде на $[a,b]$. Если $\alpha \notin \mathbb{N}$, тогда $({}^cD_{0+}^{\alpha}f)(t)$ можно представить как*

$$ ({}^cD_{0+}^{\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \tag{4} $$

где $D = \dfrac{d}{dx}$, $n = [\alpha] + 1$.

Доказательство см. в [3].

Замечание. В этой статье мы рассматриваем дробную производную по времени в смысле Капуто. Если $\alpha \in \mathbb{R}^+$, дробно-временная производная определяется как

$$({}^cD_t^\alpha u)(x,t) = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x,\tau)d\tau}{\partial \tau^m}, & m-1<\alpha<m, \\ \dfrac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}, & \alpha = m, \end{cases} \tag{5}$$

где $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Пусть $\alpha > 0$ и $n = [\alpha]+1$ для $n \notin \mathbb{N}$, $n = \alpha$ для $n \in \mathbb{N}$. Если $f(t) \in AC^n[a,b]$, то

$$(I_{0+}^c D_{0+}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

2. $({}^cD_{0+}^\alpha x^{\beta-1})(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-1}$, $\alpha > 0$, $\beta > n$, где $n = [\alpha]+1$ для $n \notin \mathbb{N}$, $n = \alpha$ для $n \in \mathbb{N}$.
3. $({}^cD_{0+}^\alpha k)(t) = 0$, где k — постоянная.

2.2. Определения и свойства N-преобразования

Естественное преобразование является новым интегральным преобразованием, оно было определено в статье З.Х. Хан и В.А. Хан [12] в 2008 г. В данном пункте мы дадим некоторые основные определения и свойства естественного преобразования, которые используются далее в статье (см. [10, 12, 13]).

Пусть вещественная функция $f(t) > 0$ и $f(t) = 0$ для $t \geq 0$ является кусочно-непрерывной и имеет экспоненциальный порядок на некотором множестве Ω:

$$A = \left\{ f(t):\ \exists M,\ k_1, k_2 > 0,\ |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_j}},\ \text{если } t \in (-1)^j \times [0,\ \infty) \right\}.$$

Определение 2. N-преобразование функции $f(t) > 0$ и $f(t) = 0$ для $t \geq 0$ определяется следующим образом:

$$\mathbb{N}^+[f(t)] = R(s,u) = \int_0^\infty e^{-st} f(ut)\, dt, \quad s>0,\ u>0. \tag{6}$$

Здесь s и u — переменные преобразования. Исходная функция $f(t)$ в (6) называется обратным преобразованием или обратным $R(s,u)$ и определяется как

$$\mathbb{N}^{-1}\{R(s,u)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{st}{u}} R(s,u)\, ds. \tag{7}$$

2.2.1. N-преобразование дробной производной

Дадим некоторые основные определения N-преобразования дробной производной Капуто.

Предложение.

1. *Если $R(s,u)$ — N-преобразование функции $f(t)$, то N-преобразование дробного интеграла порядка α определяется следующим образом:*

$$\mathbb{N}^{+}\left[(I_{0+}^{\alpha}f)(t)\right]=\frac{s^{\alpha}}{u^{\alpha}}R(s,u). \tag{8}$$

2. *Если $R(s,u)$ — N-преобразование функции $f(t)$, то N-преобразование дробного интеграла Капуто порядка α определяется следующим образом:*

$$\mathbb{N}^{+}\left[({}^{c}D_{0+}^{\alpha}f)(t)\right]=\frac{s^{\alpha}}{u^{\alpha}}R(s,u)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}}f^{(k)}(0). \tag{9}$$

2.2.2. Свойства N-преобразования

1. Если $\mathbb{N}^{+}\{f(t)\}=R(s,u)$, то $\mathbb{N}^{+}\{f(at)\}=\frac{1}{a}R(s,u)$.
2. Для любого значения n обобщенное N-преобразование функции $f(t)>0$ определяется как

$$\mathbb{N}^{+}\{f(t)\}=R(s,u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!a_{n}u^{n}}{s^{n+1}}. \tag{10}$$

3. Если $f^{(n)}(t)$ — n-производная $f(t)$, то ее N-преобразование задается в виде

$$\mathbb{N}^{+}\left\{f^{(n)}(t)\right\}=R_{n}(s,u)=\frac{s^{n}}{u^{n}}R(s,u)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{n-(k+1)}}{u^{n-k}}f^{(k)}(0). \tag{11}$$

4. Если $\mathbb{N}^{+}\{f(t)\}=R(s,u)$, то $\mathbb{N}^{+}\left\{\int_{0}^{t}f(r)dr\right\}=\frac{u}{s}R(s,u)$.
5. Если функция $f(t)\in A$ умножается на функцию сдвига t^{n}, то

$$\mathbb{N}^{+}\{t^{n}f(t)\}=\frac{s^{n}}{u^{n}}\frac{d^{n}}{du^{n}}u^{n}R(s,u). \tag{12}$$

6. Если функции $f(t)$, $g(t)\in A$ и C_1, C_2 являются константами, то

   а) $\mathbb{N}^{+}\{C_{1}f(t)+C_{2}g(t)\}=C_{1}\mathbb{N}^{+}\{f(t)\}+C_{2}\mathbb{N}^{+}\{g(t)\}$;

   б) $\mathbb{N}^{+}\{C_{1}f(t)-C_{2}g(t)\}=C_{1}\mathbb{N}^{+}\{f(t)\}-C_{2}\mathbb{N}^{+}\{g(t)\}$.

3. Анализ метода дробного естественного разложения

Для иллюстрации основной идеи метода рассмотрим общее дробное нелинейное неоднородное уравнение в частных производных

$${}^{c}D_{t}^{\alpha}U(x,t)+LU(x,t)+RU(x,t)=g(x,t), \tag{13}$$

где $n-1<\alpha\leqslant n$, $n=1,2,\ldots$, с начальными условиями

$$\left[\frac{\partial^{n-1}U(x,t)}{\partial t^{n-1}}\right]_{t=0} = f_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

где ${}^{c}D_t^{\alpha}U(x,t)$ — дробная производная Капуто функции $U(x,t)$, L — линейный дифференциальный оператор, R — общий нелинейный дифференциальный оператор, а $g(x,t)$ — функция источника.

Применив N-преобразование (обозначенное в этой статье $\mathbb{N}^+$) к обеим сторонам (13), получим

$$\mathbb{N}^+\left[{}^{c}D_t^{\alpha}U(x,t)\right] + \mathbb{N}^+\left[LU(x,t)\right] + \mathbb{N}^+\left[RU(x,t)\right] = \mathbb{N}^+\left[g(x,t)\right]. \tag{15}$$

Используя свойство N-преобразования, получим

$$\mathbb{N}^+\left[\, U(x,t)\right] - \frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}}f_k(x) + \frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^+\left[LU(x,t) + RU(x,t) - g(x,t)\right] = 0 \tag{16}$$

или

$$\mathbb{N}^+\left[\, U(x,t)\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^k}{s^{k+1}}f_k(x) + \frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^+[g(x,t)] - \frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^+[LU(x,t) + RU(x,t)]. \tag{17}$$

Применив обратное N-преобразование к обеим сторонам (17), получаем

$$U(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^k}{s^{k+1}}f_k(x) + \frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^+[g(x,t)]\right) - \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^+[LU(x,t) + RU(x,t)]\right) \tag{18}$$

или

$$U(x,t) = K(x,t) - \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^+[LU(x,t) + RU(x,t)]\right), \tag{19}$$

где $K(x,t)$ — функция, получаемая из функции источника и предписанных начальных условий.

В этой связи отметим, что для нелинейных членов обратное естественных преобразований также трудно найти. Второй шаг метода естественного разложения состоит в том, что решение представляется в виде бесконечного ряда, определяемого как

$$U(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x,t), \tag{20}$$

а нелинейный член может быть разложен следующим образом:

$$RU(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m, \tag{21}$$

где A_m — многочлены Адомиана [1] U_0, U_1, U_2, $\ldots$, U_m, которые можно вычислить по приведенной ниже формуле:

$$A_m = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i U_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Подставив (20) и (21) в (19), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m = K(x,t) - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^{+}\left[L\sum_{m=0}^{\infty} U_m + \sum_{m=0}^{\infty} A_m\right]\right]. \tag{23}$$

Путем сравнения обеих сторон (23), имеем

$$\begin{aligned} &U_0(x,t) = K(x,t),\\ &U_1(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^{+}\left[LU_0(x,t) + A_0\right]\right],\\ &U_2(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^{+}\left[LU_1(x,t) + A_1\right]\right],\\ &\quad\vdots\,. \end{aligned} \tag{24}$$

В общем случае рекурсивное соотношение задается следующим образом:

$$U_{m+1}(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^{+}\left[LU_m(x,t) + A_m\right]\right], \quad m \geqslant 0. \tag{25}$$

Наконец, аналитическое решение $U(x,t)$ аппроксимируется как

$$U(x,t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N} U_m(x,t). \tag{26}$$

Решения приведенного выше ряда обычно сходятся очень быстро.

4. Решение $(1+n)$-мерного дробного уравнения Бюргерса методом дробного естественного разложения

В данном пункте метод естественного преобразования разложения Адомиана используется для решения $(1+n)$-мерного нелинейного уравнения Бюргерса с дробной производной по времени

$$\begin{aligned} {}^{c}D_t^{\alpha}U(x,t) &= \beta UU_{x_1} + \alpha_1 U_{x_1x_1} + \alpha_2 U_{x_2x_2} + \alpha_3 U_{x_3x_3} + \dots + \alpha_n U_{x_nx_n}\\ &= \beta UU_{x_1} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_{x_ix_i}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \end{aligned} \tag{27}$$

при начальном условии

$$U(x,0) = U_0\ (x). \tag{28}$$

Путем применения N-преобразования к обеим частям (27), получим

$$\mathbb{N}^{+}\left[\ {}^{c}D_t^{\alpha}U\right] = \mathbb{N}^{+}\left[\beta UU_{x_1}\right] + \mathbb{N}^{+}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_{x_ix_i}\right]. \tag{29}$$

Используя свойство дифференцирования N-преобразования, имеем

$$\mathbb{N}^{+}\left[\ U(x,t)\right] = U_0\ (x)\frac{1}{s} + \frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^{+}\left[\beta UU_{x_1} + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i U_{x_ix_i}\right]. \tag{30}$$

Применив обратное N-преобразование к обеим частям (30), получим

$$U(x,t) = U_0\ (x) + \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^+\left[\beta U U_{x_1} + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i U_{x_i x_i}\right]\right). \tag{31}$$

Применив приведенный выше метод разложения, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(x,t) = U_0(x) + \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^+\left[\beta\sum_{m=0}^{\infty} A_m(U) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{m=0}^{\infty}(U_m)_{x_i x_i}\right)\right]\right). \tag{32}$$

Используя уравнение (22), получим

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left[\sum_{i=0}^{\infty} U_i\lambda^i \sum_{i=0}^{\infty}(U_i)_{x_1}\lambda^i\right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} U_j (U_{i-j})_{x_1}\lambda^i\right]_{\lambda=0} \\
&= \left[\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} U_j (U_{i-j})_{x_1}\lambda^{i-m}\right]_{\lambda=0} \\
&= \left[\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} U_j (U_{i-j})_{x_1}\lambda^{i-m} + \sum_{j=0}^{m} U_j (U_{m-j})_{x_1}\right]_{\lambda=0} \\
&= \sum_{j=0}^{m} U_j (U_{m-j})_{x_1}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Первые несколько компонент многочленов Адомиана задаются в виде

$$\begin{aligned}
&A_0 = U_0 U_{0x_1}, \\
&A_1 = U_0 U_{1x_1} + U_1 U_{0x_1}, \\
&A_2 = U_0 U_{2x_1} + U_2 U_{0x_1} + U_1 U_{1x_1}, \\
&\vdots\,.
\end{aligned} \tag{34}$$

Сравнив обе части (32), получим

$$\begin{aligned}
&U_0(x,t) = U_0(x), \\
&U_1(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^+\left[\beta A_0(U) + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\left((U_0)_{x_i x_i}\right)\right]\right), \\
&U_2(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^+\left[\beta A_1(U) + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\left((U_1)_{x_i x_i}\right)\right]\right), \\
&U_3(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^+\left[\beta A_2(U) + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\left((U_2)_{x_i x_i}\right)\right]\right), \\
&\quad\vdots \\
&U_{m+1}(x,t) = \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\mathbb{N}^+\left[\beta A_m(U) + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\left((U_m)_{x_i x_i}\right)\right]\right).
\end{aligned} \tag{35}$$

Аналитическое решение $U(x,t)$ задается следующим образом:

$$U(x,t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} U_m(x,t). \tag{36}$$

5. Иллюстративные примеры

Для иллюстрации эффективности и точности метода представим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим (1 + 1)-мерное нелинейное дробное уравнение Бюргерса

$$^{c}D_t^{\alpha} U(x,t) = -UU_x + U_{xx}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{37}$$

при начальном условии

$$U(x,0) = U_0(x) = 1 - \frac{2}{x}. \tag{38}$$

Для $\alpha = 1$ точное решение (37) задается следующим образом:

$$U(x,t) = 1 - \frac{2}{x-t}. \tag{39}$$

Применив N-преобразование к обеим частям (37) и используя свойство дифференцирования, получим

$$\mathbb{N}^{+}\left[\, U(x,t)\right] = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\frac{1}{s} - \frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}(UU_x) + \frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}(U_{xx}). \tag{40}$$

Применив обратное N-преобразование к обеим частям (40), получим

$$U(x,t) = \left(1 - \frac{2}{x}\right) - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}(UU_x)\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}(U_{xx})\right]. \tag{41}$$

Используя вышеупомянутый метод разложения, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(x,t) = (1 - \frac{2}{x}) - \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} U_j\left(U_{m-j}\right)_x\right)\right] + \\ \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left(\sum_{m=0}^{\infty}(U_m)_{xx}\right)\right]. \tag{42}$$

Сравнив обе части (42), получим

$$\begin{aligned} &U_0(x,t) = 1 - \frac{2}{x}, \\ &U_1(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left(U_0\left(U_0\right)_x\right)\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left((U_0)_{xx}\right)\right], \\ &\quad\vdots \\ &U_m(x,t) = -\mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left(\sum_{j=0}^{m-1} U_j\left(U_{m-1-j}\right)_x\right)\right] + \mathbb{N}^{-1}\left[\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left((U_{m-1})_{xx}\right)\right], \end{aligned} \tag{43}$$

что дает

$$
\begin{aligned}
&U_0(x,t) = 1 - \frac{2}{x},\\
&U_1(x,t) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{-2}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) - \frac{4}{x^3\Gamma(\alpha)}\right] t^{\alpha},\\
&U_2(x,t) = \left[-\frac{4}{x^3} + \frac{12}{x^4} + \frac{16}{x^5} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{-12}{x^4} - \frac{16}{x^5}\right)\right] \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},\\
&U_3(x,t) = [a_1 - a_2 - a_3 + a_4]\, \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)},\\
&\quad\vdots,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

где

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{8}{x^5} - \frac{24}{x^6} - \frac{32}{x^7} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{24}{x^6} + \frac{32}{x^7}\right),\\
a_2 &= \left(\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2}\left(-\frac{8}{x^5} + \frac{40}{x^6} - \frac{48}{x^7}\right) + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\left(-\frac{40}{x^6} + \frac{96}{x^7}\right) - \frac{48}{x^7}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)^2}\right),\\
a_3 &= \left(\frac{12}{x^4} - \frac{72}{x^5} + \frac{16}{x^6} + \frac{160}{x^7} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{48}{x^5} - \frac{16}{x^6} - \frac{160}{x^7}\right)\right),\\
a_4 &= \left(-\frac{48}{x^5} + \frac{240}{x^6} + \frac{480}{x^7} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left(-\frac{240}{x^6} - \frac{480}{x^7}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Приближенное решение (37) задается следующим образом:

$$
U(x,t) = U_0(x,t) + U_1(x,t) + U_2(x,t) + U_3(x,t) + \cdots. \tag{45}
$$

Приближенное решение (37) в особом случае $\alpha = 1$ задается как

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= 1 - \frac{2}{x} + \left(\frac{-2}{x^2}t\right) + \left(\frac{-2}{x^3}t^2\right) + \left(\frac{-2}{x^4}t^3\right) + \cdots\\
&= 1 - \frac{2}{x}\left(1 + \frac{t}{x} + \left(\frac{t}{x}\right)^2 + \left(\frac{t}{x}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{t}{x}\right)^m\right)\\
&= 1 - \frac{2}{x-t}, \qquad \left|\frac{t}{x}\right| < 1.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Мы получаем точное решение $(1+1)$-мерного нелинейного равнения Бюргерса (39), представленное в [15].

При $\alpha = 1/2$ в решении (37), (38) сумма первых четырех членов ряда имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
U(x,t) = 1 - \frac{2}{x} + \left(\frac{-2.256758334}{x^2} + \frac{2.256758334}{x^3}\right) t^{0.5} + \left(-\frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^5}\right) t\, +\\
0.7522527782\left(-\frac{12}{x^4} + \frac{18.18591636}{x^5} + \frac{74.53520910}{x^6} + \frac{159.2788745}{x^7}\right) t^{1.5} + \cdots.
\end{aligned}
$$

Точное и приближенное решения при $\alpha = 1$ показаны на рисунках 1а и 1б, а решения для различных значений α — на рис. 1в.

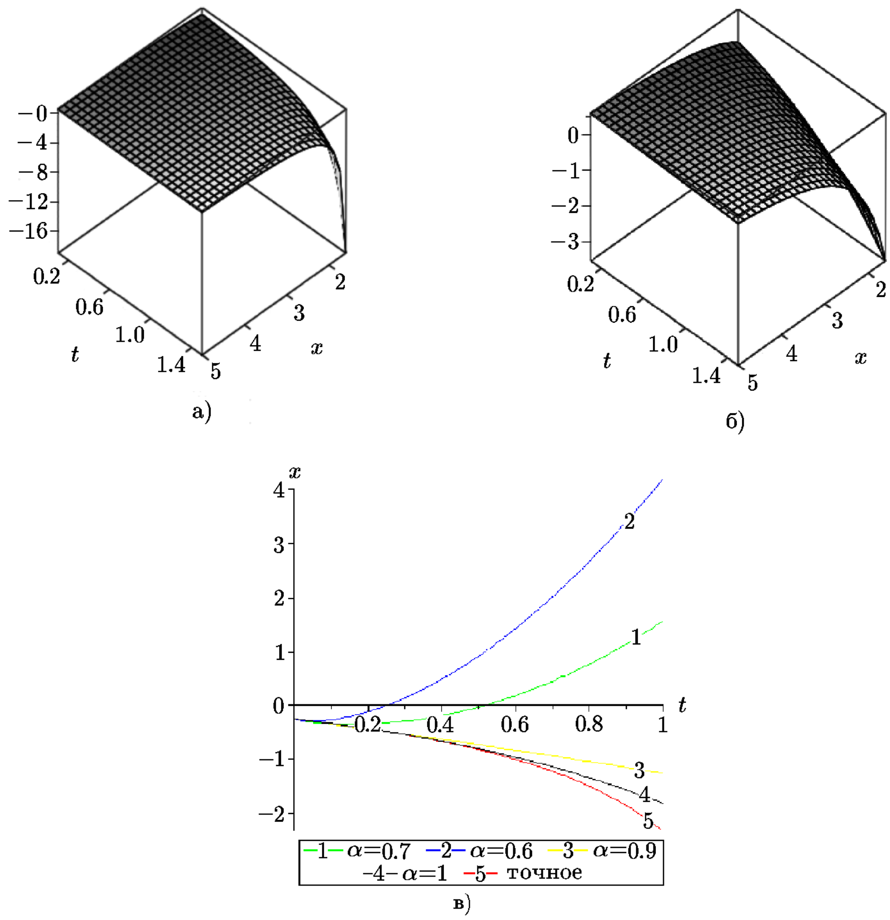

Рис. 1. Точное решение (а), приближенное решение при $\alpha = 1$ (б), приближенные решения (37), (38) для различных значений α при $x = 1.6$ и $t \in [0, 1]$ (в)

Пример 2. Рассмотрим $(1 + 2)$-мерное дробное уравнение Бюргерса

$$ {}^{c}D_t^{\alpha} U(x_1, x_2, t) = U U_{x_1} + U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{47}$$

с начальным условием

$$U(x_1, x_2, 0) = U_0\ (x_1, x_2) = x_1 + x_2. \tag{48}$$

Для $\alpha = 1$ точное решение задается следующим образом:

$$U(x_1, x_2, t) = \frac{x_1 + x_2}{1 - t}, \quad 0 \leqslant t < 1. \tag{49}$$

Применив N-преобразование к обеим частям (47), получим

$$\mathbb{N}^{+}\left[{}^{c}D_t^{\alpha} U\right] = \mathbb{N}^{+}\left[U U_{x_1}\right] + \mathbb{N}^{+}\left[U_{x_1 x_1}\right] + \mathbb{N}^{+}\left[U_{x_2 x_2}\right]. \tag{50}$$

Используя свойство дифференцирования N-преобразования, имеем

$$\frac{s^{\alpha}}{u^{\alpha}} \mathbb{N}^{+}\left[U(x_1, x_2, t)\right] - (x_1 + x_2) \frac{s^{\alpha - 1}}{u^{\alpha}} = \mathbb{N}^{+}\left[U U_{x_1} + U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2}\right] \tag{51}$$

и

$$\mathbb{N}^{+}\left[\, U(x_1,x_2y,t)\right]=(x_1+x_2)\frac{1}{s}+\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left[UU_{x_1}+U_{x_1x_1}+U_{x_2x_2}\right]. \tag{52}$$

Сделав обратное N-преобразование обеих частей (52), получим

$$U(x_1,x_2,t)=(x_1+x_2)+\mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left[UU_{x_1}+U_{x_1x_1}+U_{x_2x_2}\right].\right) \tag{53}$$

Применив приведенный выше метод разложения, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}U_m(x_1,x_2,t)=(x_1+x_2)+\\ \mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left[\sum_{m=0}^{\infty}A_m(U)+\sum_{m=0}^{\infty}(U_m)_{x_1x_1}+\sum_{m=0}^{\infty}(U_m)_{x_2x_2}\right]\right). \tag{54}$$

Сравнив обе части (54), получим

$$U_0(x_1,x_2,t)=x_1+x_2 \tag{55}$$

и

$$U_m(x_1,x_2,t)=\mathbb{N}^{-1}\left(\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{N}^{+}\left[\sum_{j=0}^{m-1}U_j\left(U_{m-1-j}\right)_{x_1}+(U_{m-1})_{x_1x_1}+(U_{m-1})_{x_2x_2}\right]\right). \tag{56}$$

Первые несколько членов следующие:

$$\begin{aligned}
&U_0(x_1,x_2,t)=x_1+x_2,\\
&U_1(x_1,x_2,t)=(x_1+x_2)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},\\
&U_2(x_1,x_2,t)=(x_1+x_2)\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha},\\
&U_3(x_1,x_2,t)=(x_1+x_2)\frac{4\Gamma^2(\alpha+1)+\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha},\\
&\quad\vdots\,.
\end{aligned} \tag{57}$$

Приближенное решение (47) задается следующим образом:

$$U(x_1,x_2,t=(x_1+x_2)\times\\ \left(1+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}+\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha}+\frac{4\Gamma^2(\alpha+1)+\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha}+\cdots\right). \tag{58}$$

Для $\alpha=1$ имеем

$$U(x_1,x_2,t)=(x_1+x_2)\left(1+t+t^2+t^3+\cdots\right), \tag{59}$$

которое является точным решением $(1+2)$-мерного нелинейного уравнения Бюргерса (49), представленного в [7, 16].

При $\alpha=1/2$ решение (47) в виде ряда имеет вид

$$U(x,t)=(x_1+x_2)(1+1.128379167t^{0.5}+2t+3.966809097t^{1.5}+\cdots).$$

Точное и приближенное решения при $\alpha=1$ когда $x_2=1$ представлены на рис. 2а и 2б соответственно. Приближенные решения (47) для различных значений α при $x_1=x_2=1$ и $t\in[0,1]$ представлены на рис. 2в.

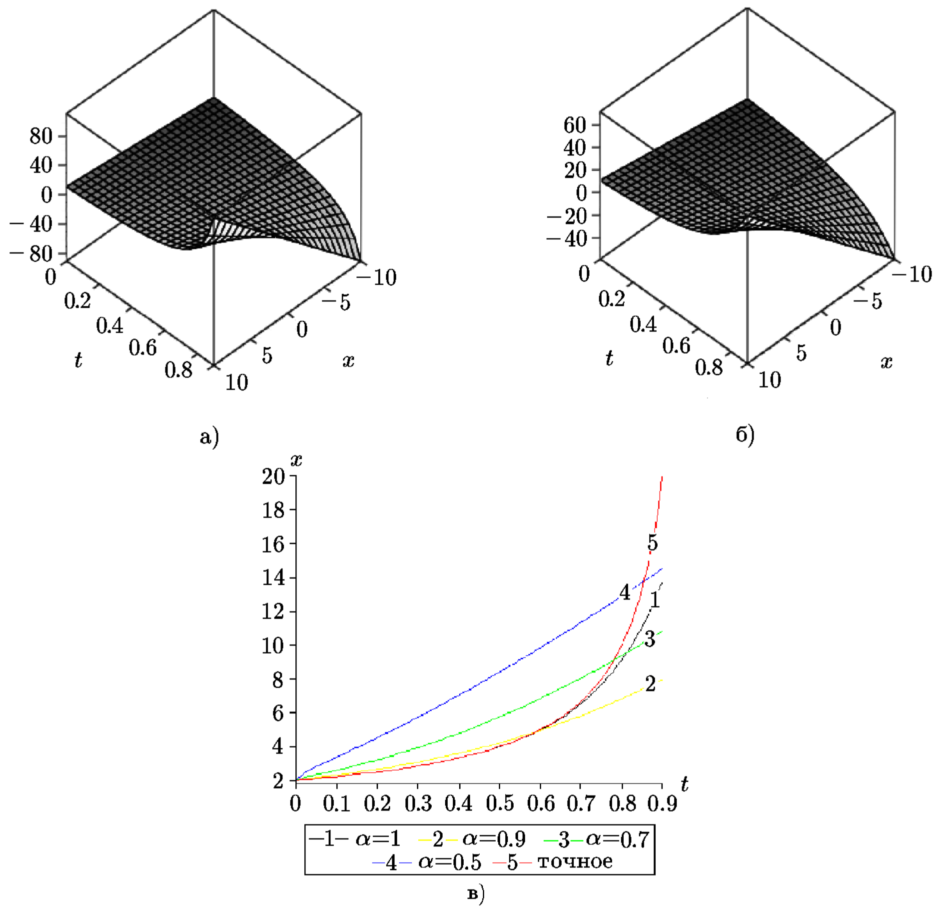

Рис. 2. Точное решение (а), приближенное решение при $\alpha = 1$ когда $x_2 = 1$ (б), приближенные решения (47) для различных значений α при $x_1 = x_2 = 1$ и $t \in [0, 1]$ (в)

Пример 3. Рассмотрим (1 + 3)-мерное дробное уравнение Бюргерса

$$ {}^{c}D_t^{\alpha} U(x_1, x_2, x_3, t) = U U_{x_1} + U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2} + U_{x_3 x_3}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{60} $$

с начальным условием

$$ U(x_1, x_2, x_3, 0) = U_0\ (x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3. \tag{61} $$

Для $\alpha = 1$ точное решение имеет вид

$$ U(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{1 - t}, \ \textit{provided} \ \ 0 \leqslant t < 1. \tag{62} $$

В соответствии с методом МДЕР, мы можем получить итерационную формулу

$$ \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1 + x_2 + x_3) + $$

$$ \mathbb{N}^{-1}\Bigg(\frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}} \mathbb{N}^{+}\Bigg[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} U_j \left(U_{m-1-j}\right)_{x_1} + $$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(U_m)_{x_1x_1}+\sum_{m=0}^{\infty}(U_m)_{x_2x_2}+\sum_{m=0}^{\infty}(U_m)_{x_3x_3}\Bigg]\Bigg). \quad (63)$$

Аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned}
&U_0(x_1,x_2,x_3,t)=x_1+x_2+x_3,\\
&U_1(x_1,x_2,x_3,t)=(x_1+x_2+x_3)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},\\
&U_2(x_1,x_2,x_3,t)=(x_1+x_2+x_3)\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha},\\
&U_3(x_1,x_2,x_3,t)=(x_1+x_2+x_3)\frac{4\Gamma^2(\alpha+1)+\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha},\\
&\quad\vdots\,.
\end{aligned}\quad (64)$$

Приближенное решение в виде ряда следующее:

$$U(x_1,x_2,x_3,t)=(x_1+x_2+x_3)\times \left(1+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}+\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha}+\frac{4\Gamma^2(\alpha+1)+\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha}+\cdots\right). \quad (65)$$

Для $\alpha=1$ мы получим

$$U(x_1,x_2,x_3,t)=(x_1+x_2+x_3)\left(1+t+t^2+t^3+\cdots\right)=\frac{x_1+x_2+x_3}{1-t},\quad 0\leqslant t<1,$$

которое является точным решением для $(1+3)$-мерного дробного уравнения Бюргерса, представленного в [7, 16].

Пример 4. Рассмотрим $(1+n)$-мерное дробное уравнение Бюргерса

$$^{c}D_t^{\alpha}U(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,t)=UU_{x_1}+U_{x_1x_1}+U_{x_2x_2}+U_{x_3x_3}+\cdots+U_{x_nx_n},\quad 0<\alpha\leqslant 1, \quad (66)$$

при начальном условии

$$U(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,0)=U_0(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n. \quad (67)$$

В соответствии с (34) и (35) первые несколько компонентов ряда разложения задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&U_0(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,t)=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n,\\
&U_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,t)=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},\\
&U_2(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,t)=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha},\\
&U_3(x_1,x_2,x_3,\cdots+,x_n,t)=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\frac{4\Gamma^2(\alpha+1)+\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha},\\
&\quad\vdots\,.
\end{aligned}\quad (68)$$

Приближенное решение в виде ряда

$$U(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t) = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \times \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} + \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \frac{4\Gamma^2(\alpha+1) + \Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} + \cdots\right). \quad (69)$$

Для $\alpha = 1$ мы получим

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t) &= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)\left(1 + t + t^2 + t^3 + \cdots\right) \\ &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{1 - t}, \quad 0 \leqslant t < 1, \end{aligned} \quad (70)$$

которое является точным решением для $(1 + n)$-мерного дробного уравнения Бюргерса, представленного в [7].

6. Выводы

В этой работе метод разложения Адомиана в сочетании с методом естественных преобразований использовался для нахождения приближенных решений $(1 + n)$-мерного дробного уравнения Бюргерса. В отличие от стандартного метода Адомиана, данный метод не требовал оценки дробной производной или дробных интегралов в итерационной формуле, что приводит к простому вычислению членов ряда. Во всех представленных примерах было найдено точное решение при $\alpha = 1$. Вывод данной работы состоит в том, что этот метод может быть легко применен для других нелинейных дробных уравнений в частных производных, благодаря его эффективности и точности, для получения возможных результатов. Кроме того, МДЕР обеспечивает более реалистичные решения в виде рядов, которые очень быстро сходятся к точному решению.

Литература

1. **Zhu Y., Chang Q., and Wu S.** A new algorithm for calculating Adomian polynomials // Appl. Math. Comp. — 2005. — Vol. 169. — P. 402–416.
2. **Diethelm K.** The Analysis of Fractional Differential Equations. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
3. **Podlubny I.** Fractional Differential Equations. — San Diego, CA: Academic Press, 1999.
4. **Kumar D., Singh J., and Rathore S.** Sumudu decomposition method for nonlinear equations // Int. Math. Forum — 2012. — Vol. 7, № 11. — P. 515–521.
5. **Rawashdeh M.S., and Maitama S.** Solving coupled system of nonliear PDEs using the natural decomposition method // Int. J. of Pure and Appl. Math. — 2014. — Vol. 92, № 5. — P. 757–776.
6. **Ziane D., and Cherif M.H.** Resolution of nonlinear partial differential equations by Elzaki transform decomposition method // J. of Approximation Theory and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 5. — P. 17–30.
7. **Srivastava V.K., and Awasthi M.K.** $(1+n)$-dimensional Burgers' equation and its analytical solution: A comparative study of HPM, ADM and DTM // Ain Shams Engineering J. — 2014. — Vol. 5. — P. 533–541.
8. **Abdel-Rady A.S., Rida S.Z., Mohamed Arafa A.A., and Abdel-Rahim H.R.** Natural transform for solving fractional models // J. Appl. Math. Phys. — 2015. — Vol. 3. — P. 1633–1644.
9. **Baskonus H.M., Bulut H., and Pandir Y.** The natural transform decomposition method for linear and nonlinear partial differential equations // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. — 2014. — Vol. 5, № 1. — P. 111–126.

10. **Omran M., and Kiliçman A.** Natural transform of fractional order and some properties // J. Cogent Mathem. — 2016. — Vol. 3, № 1. — P. 1–8.
11. **Junaid M.** Application of natural transform to Newtonian fluid problems // Euro. Int. J. of Sci. and Tech. — 2016. — Vol. 5. — P. 138–147.
12. **Khan Z.H., and Khan W.A.** N-transform properties and applications // NUST J. of Engineering Sciences. — 2008. — Vol. 1. — P. 127–133.
13. **Belgacem F.B.M., and Silambarasan R.** Theory of natural transform // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. — 2012. — Vol. 3. — P. 105–135.
14. **Rawashdeh M.S., and Maitama S.** Solving nonlinear ordinary differential equations using the NDM // J. App. Anal. Comp. — 2015. — Vol. 5, № 1. — P. 77–88.
15. **Ahmad J., Bibi Z., and Noor K.** Laplace decomposition method using he's polynomial to Burgers equation // J. Science and Arts. — 2014. — Vol. 2, № 27. — P. 131–138.
16. **Hendi F.A., Kashkari B.S., and Alderremy A.A.** The variational homotopy perturbation method for solving $((n \times n) + 1)$ dimensional Burgers' equations // J. App. Math. — 2016. — Vol. 2016. — Article ID 4146323.

Поступила в редакцию 21 января 2019 г.
После рецензирования без замечаний 7 июня 2019 г.
Принята к печати 16 июля 2019 г.