Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

УДК 519.6 + 551.463

А. М. Максимов, Е. В. Радкевич, И. Я. Эдельман

Институт проблем нефти и газа РАН, 117917 Москва, В-296

Современная геофизическая проблематика, связанная с анализом взаимодействия геофизических полей [1] и с технологическими вопросами сейсмоакустического воздействия на месторождения углеводородов [2, 3], а также развитие синергетической концепции геологической среды [4] приводят к необходимости теоретического исследования механизмов распространения и взаимодействия нелинейных волн в пористых средах. Общепринятая методология нелинейной волновой теории [5] предполагает преобразование соответствующих рассматриваемой модели уравнений законов сохранения механики к нелинейным эволюционным уравнениям, возникающим как условия асимптотической разрешимости и описывающим распространение волн огибающих на длинных временах.

Получению нелинейных эволюционных уравнений для различных моделей пористых сред и анализу резонансных эффектов, описываемых решениями этих уравнений, посвящены работы [6–9]. В [10, 11] предложено обобщение классической модели насыщенной пористой среды Френкеля — Био — Николаевского [12, 13], учитывающее дисперсионный фактор — вязкие сдвиговые напряжения во флюидной фазе, и дано математическое обоснование асимптотического преобразования к нелинейному эволюционному уравнению в случае построения однофазовых решений.

В настоящей работе построено многофазовое асимптотическое решение, определяемое совокупностью упругих волн, и рассмотрен эффект трехцугового резонанса. Решение этой задачи с учетом дисперсионных свойств среды в приближении слабой нелинейности предполагает определение условий резонансного взаимодействия и анализ механизмов перераспределения энергии в системе резонансных триад [14, 15]. Показано, что распространение модулированных волн описывается уравнением Кортевега — де Фриза — Бюргерса, а для резонансных триад выполняется закон сохранения энергии Мэнли — Роу.

1. Формулировка модели пористой среды. Рассмотрим вязкоупругодеформируемую пористую среду, состоящую из упругого скелета, связанной поверхностью скелета вязкой жидкости и вязкой флюидной (слабосжимаемая жидкость или совершенный газ) фазы.

Заметим, что, в отличие от традиционного для пористых сред рассмотрения порового флюида, когда $P_{ij} = -p\delta_{ij}$, здесь учитываются сдвиговые напряжения во флюиде:

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \nu_f\Big[\frac{\partial v_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{fj}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\frac{\partial v_{fk}}{\partial x_k}\delta_{ij}\Big]$$

(P_{ij} — тензор напряжений во флюидной фазе, p — давление, v — вектор скорости, ν — вязкость, индекс f может принимать значения l (жидкость) и g (газ), соответствующие насыщению пористой среды слабосжимаемой жидкостью и совершенным газом).

Скелет пористой среды и связанная жидкость образуют эффективную вязкоупругую твердую фазу, которая проявляет упругие свойства скелета и вязкие свойства жидкости. При этом скелет и связанная жидкость обладают одинаковыми скоростью, температурой и давлением. С учетом вязкоупругих свойств реологическое соотношение для твердой фазы имеет вид

$$\sigma_{ij} = Ke_{kk}\delta_{ij} + 2G(e_{ij} - e_{kk}\delta_{ij}/3) + \beta_s Kp\delta_{ij} - \varphi_s KT_s\delta_{ij} + \alpha m\nu_\alpha\Big[\frac{\partial v_{si}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{sj}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_{sk}}{\partial x_k}\delta_{ij}\Big],$$

где σ_{ij} — тензор эффективных напряжений; e_{ij} — тензор деформаций; K — модуль объемной упругости; G — модуль сдвига; β — коэффициент сжимаемости; φ — коэффициент теплового расширения; m — пористость; α — объемная доля связанной жидкости; T — температура; индексы: s — твердая фаза, α — связанная жидкость.

Далее сформулируем систему определяющих уравнений в безразмерном виде. Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$x' = x/x_0,\quad t' = t/t_0,\quad u' = u/x_0,\quad \rho' = \rho/\rho_0,\quad P' = P/K_0,\quad \sigma' = \sigma/K_0,\quad T' = T/\theta_0,$$

$$\beta' = \beta K_0,\quad \varphi' = \varphi\theta_0,\quad K' = K/K_0,\quad G' = G/K_0,\quad v' = v/v_0,\quad E' = E/v_0^2,\quad \nu' = \nu/(K_0t_0),$$

$$\lambda' = \lambda\theta_0 t_0/(x_0^2v_0^2\rho_0),\quad C' = C\theta_0/v_0^2,\quad R' = R\theta_0/v_0^2,\quad \chi' = \chi\theta_0 t_0/(v_0^2\rho_0),\quad k' = kx_0,\quad \omega' = \omega t_0$$

$$(x_0 = v_0t_0,\quad t_0 = \rho_0 \text{æ}/\nu_f,\quad v_0 = (K_0/\rho_0)^{1/2}).$$

Здесь æ — проницаемость; ρ — плотность; u — вектор смещения; E — внутренняя энергия; λ — коэффициент теплопроводности; C — теплоемкость; R — универсальная газовая постоянная; χ — коэффициент межфазного теплообмена; k — волновой вектор; ω — частота.

Оценки значений безразмерных параметров могут быть получены с использованием характерных значений констант горных пород [13]:

$$K_0 \sim 10^8 \div 10^9 \text{ Па},\quad \theta_0 \sim 10^2 \div 10^3 \text{ К},\quad \rho_0 \sim 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$\beta \sim 10^{-10} \div 10^{-9} \text{ Па}^{-1},\quad \varphi \sim 10^{-6} \div 10^{-3} \text{ К}^{-1},\quad C \sim 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)},$$

$$\lambda \sim 10^0 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)},\quad \nu \sim 10^{-5} \div 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с},\quad \text{æ} \sim 10^{-15} \div 10^{-12} \text{ м}^2.$$

При этих значениях параметров имеем

$$t_0 \sim 10^{-9} \div 10^{-6} \text{ с},\quad v_0 \sim 10^3 \text{ м/с},\quad x_0 \sim 10^{-6} \div 10^{-3} \text{ м},\quad \nu' \sim 10^{-8} \div 10^{-2},$$

$$\beta' \sim 10^{-2} \div 10^0,\quad \varphi' \sim 10^{-3} \div 10^0,\quad C' \sim 10^0,\quad \lambda' \sim 10^{-7} \div 10^{-4}.$$

Проведенный анализ размерностей позволил выделить малый безразмерный параметр

$$\varepsilon = (\nu_f')^{1/2} = (\nu_f/(K_0t_0))^{1/2} \equiv \nu_f/(K_0\rho_0\text{æ})^{1/2},$$

который представляет собой комбинацию характерных вязкости флюида, модуля упругости, плотности и проницаемости среды и определяет масштаб проявления дисперсионных свойств.

В дальнейшем штрихи будут опущены. Исходя из представленных выше оценок безразмерных параметров, положим далее $\nu = \varepsilon^2\tilde{\nu}$ и $\lambda = \varepsilon^2\tilde{\lambda}$. Опуская индекс $\sim$, запишем систему уравнений сохранения массы, импульса и энергии $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$\partial((1-\alpha)m\rho_f)/\partial t + \nabla_x((1-\alpha)m\rho_f v_f) = 0,$$

$$
\begin{gathered}
\partial(\alpha m\rho_\alpha + (1-m)\rho_s)/\partial t + \nabla_x((\alpha m\rho_\alpha + (1-m)\rho_s)v_s) = 0,\\
(1-\alpha)m\rho_f[\partial/\partial t + < v_f, \nabla_x >]v_{fi} - (1-\alpha)m\partial P_{ij}/\partial x_j + m^2(1-\alpha)^2(v_{fi} - v_{si}) = 0,\\
(\alpha m\rho_\alpha + (1-m)\rho_s)[\partial/\partial t + < v_s, \nabla_x >]v_{si} - \partial\sigma_{ij}/\partial x_j -\\
-(1-(1-\alpha)m)\partial P_{ij}/\partial x_j - m^2(1-\alpha)^2(v_{fi} - v_{si}) = 0, \quad \partial u_i/\partial t - v_{si} = 0,\\
\partial\sigma_{ij}/\partial t = K\delta_{ij}\partial e_{kk}/\partial t + 2G\partial(e_{ij} - e_{kk}\delta_{ij}/3)/\partial t + \beta_s\delta_{ij}K\partial p/\partial t -\\
-\varphi_s\delta_{ij}K\partial T_s/\partial t + \varepsilon^2\alpha m\nu_\alpha\partial[\partial v_{si}/\partial x_j + \partial v_{sj}/\partial x_i - (2/3)(\partial v_{sk}/\partial x_k)\delta_{ij}]/\partial t,\\
\partial e_{ij}/\partial t - (\partial v_{si}/\partial x_j + \partial v_{sj}/\partial x_i)/2 = 0,\\
m(1-\alpha)\rho_f[\partial/\partial t + < v_f, \nabla_x >]E_f = m(1-\alpha)P_{ij}\partial v_{fi}/\partial x_j +\\
+m^2(1-\alpha)^2 \mid v_f - v_s \mid^2 - \chi(T_f - T_s) + \varepsilon^2\nabla_x(m(1-\alpha)\lambda_f\nabla_x)T_f,\\
(1-m)\rho_s[\partial/\partial t + < v_s, \nabla_x >]E_s + \alpha m\rho_\alpha[\partial/\partial t + < v_s, \nabla_x >]E_\alpha =\\
= [\sigma_{ij} + (1-(1-\alpha)m)P_{ij}]\partial v_{si}/\partial x_j + \chi(T_f - T_s) + \varepsilon^2\nabla_x((1-m)\lambda_s + \alpha m\lambda_\alpha)\nabla_x T_s.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Реологические и термодинамические соотношения имеют вид

$$
\begin{gathered}
\rho_l = \rho_{l0}(1 + \beta_l(p - p_0) - \varphi_l(T_l - T_{l0})), \quad \rho_g = p/(RT_g),\\
\rho_\alpha = \rho_{l0}(1 - \beta_\alpha(\sigma^s_{kk}/3 - \sigma_0) - \varphi_\alpha(T_s - T_{s0})), \quad v_f = (v_{f1}, v_{f2}, v_{f3}),\\
\rho_s = \rho_{s0}(1 - \beta_s(\sigma^s_{kk}/3 - \sigma_0) - \varphi_s(T_s - T_{s0})), \quad v_s = (v_{s1}, v_{s2}, v_{s3}),\\
P_{ij} = -p\delta_{ij} + \varepsilon^2\nu_f[\partial v_{fi}/\partial x_j + \partial v_{fj}/\partial x_i - (2/3)(\partial v_{fk}/\partial x_k)\delta_{ij}],\\
\rho_l dE_l = \rho_l C_l dT_l + (p/\rho_l)d\rho_l - \varphi_l T_l dp, \quad E_g = C_g T_g,\\
\rho_s dE_s = \rho_s C_s dT_s + \sigma^s_{ij} de_{ij} + \varphi_s T_s d\sigma^s_{kk}/3, \quad \sigma^s_{ij} = \sigma_{ij}/(1-(1-\alpha)m) + P_{ij},\\
\rho_\alpha dE_\alpha = \rho_\alpha C_\alpha dT_s - \sigma^s_{kk}/(3\rho_\alpha)d\rho_\alpha + \varphi_\alpha T_s d\sigma^s_{kk}/3
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

(σ^s_{ij} — тензор истинных напряжений в твердой фазе).

Система (1.1), (1.2) представляет собой гиперболическую в главной части, замкнутую систему уравнений относительно неизвестных тензорных функций σ_{ij} и e_{ij}, векторных функций u, v_s и v_f и скалярных функций m, p, T_s и T_f.

Далее ограничимся рассмотрением задачи Коши со следующими начальными данными:

$$
\begin{gathered}
u_i \mid_{t=0} = u^0_i, \quad v_{si} \mid_{t=0} = v^0_{si}, \quad v_{fi} \mid_{t=0} = v^0_{fi}, \quad m \mid_{t=0} = m^0,\\
p \mid_{t=0} = p^0, \quad T_f \mid_{t=0} = T^0_f, \quad T_s \mid_{t=0} = T^0_s, \quad e_{ij} \mid_{t=0} = [\partial u^0_i/\partial x_j + \partial u^0_j/\partial x_i]/2,\\
\sigma_{ij} \mid_{t=0} = Ke_{kk}\delta_{ij} \mid_{t=0} + 2G(e_{ij} - (1/3)e_{kk}\delta_{ij}) \mid_{t=0} + \beta_s K p^0\delta_{ij} -\\
-\varphi_s K T^0_s\delta_{ij} + \varepsilon^2\alpha m^0\nu_\alpha[\partial v^0_{si}/\partial x_j + \partial v^0_{sj}/\partial x_i - (2/3)(\partial v^0_{sk}/\partial x_k)\delta_{ij}].
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

2. Построение многофазового асимптотического решения.

Теорема 2.1. *Асимптотическое решение по* mod $O(\varepsilon)$ *задачи Коши для системы* (1.1), (1.2) *с начальными данными*

$$
U \mid_{t=0} = U_\Phi \mid_{t=0} + \varepsilon\sum_{i=1}^{N} H^i \overset{1}{U^i_0}(S_{i0}(x)/\varepsilon, x)
\tag{2.1}
$$

имеет вид

$$U = U_\Phi(x,t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} H^i \overset{1}{U^i} (S_i/\varepsilon,\, x,\, t), \tag{2.2}$$

где U *— вектор-функция искомых величин:*

$$U(\tau, x, t) = (m, v_{fi}, v_{si}, p, \sigma_{ij}, e_{ij}, T_f, T_s, u_i), \quad i, j = 1,\, 2,\, 3;$$

$U_\Phi(x,t)$ *— медленный фон (среднее от решения* U *исходной системы уравнений);* $\overset{1}{U^i_0}(\tau_i, x)$ *— функции скалярные, вещественнозначные,* C^∞*, финитные по* x*,* 2π*-периодические по* $\tau_i = S_i/\varepsilon$*; фазы* $S_i(x,t)$ *— решения задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби*

$$\partial S_i/\partial t + \omega_i(x, t, \nabla_x S_i) = 0, \qquad S_i\,|_{t=0} = S_{i0}(x); \tag{2.3}$$

частоты ω_i *определяются дисперсионным соотношением*

$$\mathrm{Det}\ A(S_{it}, S_{ix}, x, t) = 0; \tag{2.4}$$

$H^i(x,t)$ *— нуль-векторы, соответствующие частотам* $\omega_i(x,t,k)$*;* $\overset{1}{U^i}(\tau_i, x, t)$ *— любые* 2π*-периодические по* τ_i *с нулевым средним функции;* A *— символ линеаризованного оператора* $A(t, x, \partial/\partial t, \nabla_x)$ *исходной системы уравнений на фоне* U_Φ*.*

Необходимо отметить, что рассмотрение гиперболической в главной части системы уравнений и выбор вида асимптотического решения этой системы предопределяют максимальное число вещественных корней дисперсионного уравнения.

Построение асимптотики по mod $O(\varepsilon^2)$ сначала проведем в предположении, аналогичном условию на малые знаменатели теории Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ) [15, 16].

Условие А (типа КАМ). Существуют положительные константы c и μ такие, что для всех целых $n_j, j = 1, \ldots, N$, выполнено

$$|\mathrm{Det}\ A(t, x, -\omega, k)| \geqslant c\Big(\sum_{j=1}^{N} n_j^2\Big)^{-\mu}, \quad |(n_1, \ldots, n_N)| \neq 1.$$

Здесь $k = \sum\limits_{j=1}^{N} n_j k^{(j)}$; ненулевые векторы $k^{(j)} \in R^3$, $\omega = \sum\limits_{j=1}^{N} n_j \omega_j(k^{(j)})$.

При выполнении этого условия не происходит резонансного взаимодействия волн.

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие А. Тогда асимптотическое решение по* mod $O(\varepsilon^2)$ *задачи Коши* (1.1)–(2.1) *имеет вид*

$$U = U_\Phi(x,t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} H^i \overset{1}{U^i} (\tau_i, x, t) + \varepsilon^2 (\overset{2}{U} (\tau, x, t) + Q(x, t, \varepsilon)),$$

где вектор $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$*. Вещественнозначные, скалярные,* 2π*-периодические с нулевыми средними по* τ_i *функции* $\overset{1}{U^i}(\tau_i, x, t)$ *являются решением задачи Коши для уравнений Кортевега — де Фриза — Бюргерса:*

$$d\overset{1}{U^i}/dt_A + a_1^i \partial^2 \overset{1}{U^i}/\partial\tau_i^2 + a_2^i \overset{1}{U^i}\, \partial \overset{1}{U^i}/\partial\tau_i + a_3^i \overset{1}{U^i} +$$

$$+\varepsilon\Big[a_4^i \partial^3 \overset{1}{U^i}/\partial\tau_i^3 + a_5^i \overset{1}{U^i}\, \partial^2 \overset{1}{U^i}/\partial\tau_i^2 + a_6^i (\overset{1}{U^i})^2 \partial \overset{1}{U^i}/\partial\tau_i + a_7^i (\overset{1}{U^i})^2 +$$

$$+ a_8^i(\partial \overset{1}{U}{}^i /\partial\tau_i)^2 + a_9^i \partial \overset{1}{U}{}^i /\partial\tau_i\Big] = 0, \qquad \overset{1}{U}{}^i|_{t=0}=\overset{1}{U}{}^i_0 . \quad (2.5)$$

Здесь $\overset{2}{U}(\tau, x, t)$ *— функция* C^∞ *по совокупности переменных,* 2π*-периодическая с нулевым средним по* τ*; оператор* d/dt_A *— полная производная вдоль характеристик, отвечающих уравнению (2.3);* Q *— бесконечно дифференцируемая ограниченная функция; коэффициенты* a_j^i $(j = 1, \dots, 9)$ *определяются из построения.*

3. Резонансные триады. Уравнение (2.5) позволяет описать распространение модулированных волн, не вступающих в нелинейное взаимодействие. Однако известен ряд экспериментальных фактов [2, 3, 17], свидетельствующих о процессах генерации новых волн в результате нелинейного взаимодействия упругих продольных и поперечных волн в горных породах. Проблема теоретического изучения этого эффекта может быть решена с использованием традиционных методов нелинейной физики, рассматривающих схемы трехволновых взаимодействий [5, 14, 15, 18].

Очевидно, необходимыми условиями резонансного взаимодействия волн будут следующие:

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \omega^{(3)}, \qquad k^{(1)} + k^{(2)} = k^{(3)} \quad (3.1)$$

($\omega^{(i)} = \omega^{(i)}(k^{(i)})$ и $k^{(i)}$ — соответственно частоты и волновые векторы тройки взаимодействующих волн).

Резонансное взаимодействие трех волновых цугов в рассматриваемой модели пористой среды описывается обобщенной системой уравнений Кортевега — де Фриза — Бюргерса:

$$\frac{d\overset{1}{U}{}^i}{dt_{Ai}} + a_1^i \frac{\partial^2 \overset{1}{U}{}^i}{\partial\tau^2} + a_2^i \overset{1}{U}{}^i \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial\tau} + a_3^i \overset{1}{U}{}^i + \varepsilon\Bigg[a_4^i \frac{\partial^3 \overset{1}{U}{}^i}{\partial\tau^3} + a_5^i (\overset{1}{U}{}^i)^2 +$$

$$+ a_6^i \left(\frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial\tau}\right)^2 + a_7^i \overset{1}{U}{}^i \frac{\partial^2 \overset{1}{U}{}^i}{\partial\tau^2} + a_8^i (\overset{1}{U}{}^i)^2 \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial\tau} + a_9^i \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial\tau}\Bigg] + W^i = 0, \quad (3.2)$$

где

$$W^1 = \gamma_1/(2\pi)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi} \overset{1}{U}{}^2(\xi, x, t)\, \overset{1}{U}{}^3(\tau+\xi, x, t)\,d\xi;$$

$$W^2 = \gamma_2/(2\pi)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi} \overset{1}{U}{}^1(\xi, x, t)\, \overset{1}{U}{}^3(\tau+\xi, x, t)\,d\xi;$$

$$W^3 = \gamma_3/(2\pi)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi} \overset{1}{U}{}^1(\xi, x, t)\, \overset{1}{U}{}^2(\tau-\xi, x, t)\,d\xi.$$

Здесь константы γ_i определяются из построения и зависят от параметров среды и равновесного фонового состояния, частот и волновых векторов резонансной триады.

Для системы уравнений (3.2) справедливы законы сохранения энергии — аналоги соотношений Мэнли — Роу [14, 15]:

$$\frac{d}{dt_{Aj}}\mathcal{E}_j + \frac{\gamma_j}{\gamma_3}\frac{d}{dt_{A3}}\mathcal{E}_3 = 0, \quad j = 1, 2, \quad \frac{d}{dt_{A1}}\mathcal{E}_1 + \frac{d}{dt_{A2}}\mathcal{E}_2 + (\gamma_1+\gamma_2)\Big/\gamma_3\frac{d}{dt_{A3}}\mathcal{E}_3 = 0, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{E}_j(t)$ — усредненная по быстрым осцилляциям энергия волны с фазой S_j:

$$\mathcal{E}_j = \frac{1}{2\pi}\left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left(\overset{1}{U^j} \right)^2 d\tau + \int\limits_0^{t_{Aj}} \int\limits_0^{2\pi} \left[\mid a_1^j \mid + \varepsilon (a_6^j - 2a_7^j)\, \overset{1}{U^j} \right] \left(\frac{\partial \overset{1}{U^j}}{\partial \tau} \right)^2 d\tau \, dt_{Aj} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{t_{Aj}} \int\limits_0^{2\pi} [a_3^j + \varepsilon a_5^j \overset{1}{U^j}] \left(\overset{1}{U^j} \right)^2 d\tau \, dt_{Aj} \right\}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Используя законы сохранения (3.3), можно проанализировать характер взаимодействия волн с точки зрения перераспределения энергии [15, 18], рассмотрев для простоты данные Коши $\overset{1}{U^j}|_{t=0} \equiv \overset{1}{U_0^j}(\tau)$, не зависящие от x. Тогда в силу единственности решения $\overset{1}{U^j}(t, \tau)$ не зависят от медленной переменной x, т. е. $d\overset{1}{U^j}(t, \tau)/dt_{Aj} \equiv d\overset{1}{U^j}(t, \tau)/dt$, $j = 1, 2, 3$.

При этом возможны следующие варианты.

1. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ или $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 < 0$. Тогда

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_1(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_3}\mathcal{E}_3(t), \quad \mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_2(0) - \frac{\gamma_2}{\gamma_3}\mathcal{E}_3(t), \quad \mathcal{E}_j(t) + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_3}\mathcal{E}_3(t) = \mathcal{E}_j(0), \quad j = 1, 2.$$

Здесь происходит «перекачка» части энергии двух исходных волн в образовавшуюся третью волну. Поскольку $(\gamma_1 + \gamma_2)/\gamma_3 > 0$, полная энергия системы остается постоянной, так что с ростом амплитуды образовавшейся волны амплитуды исходных волн уменьшаются.

2. $\gamma_1 > 0, \gamma_2, \gamma_3 < 0$ или $\gamma_1 < 0, \gamma_2, \gamma_3 > 0$. Тогда

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_1(0) + \frac{\gamma_1}{\mid \gamma_3 \mid}\mathcal{E}_3(t), \quad \mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_2(0) - \frac{\mid \gamma_2 \mid}{\mid \gamma_3 \mid}\mathcal{E}_3(t),$$

$$\mathcal{E}_j(t) + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_3}\mathcal{E}_3(t) = \mathcal{E}_j(0), \quad j = 1, 2.$$

В этом случае образовавшаяся третья волна часть энергии (γ_2/γ_3) «отбирает» у второй волны и часть энергии (γ_1/γ_3) «передает» первой волне. При этом полная энергия системы остается постоянной ($(\gamma_1 + \gamma_2)/\gamma_3 > 0$).

Аналогично, если $\gamma_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_3 < 0$ или $\gamma_2 < 0$, $\gamma_1, \gamma_3 > 0$, образовавшаяся волна часть энергии (γ_1/γ_3) «отбирает» у первой волны и часть энергии (γ_2/γ_3) «передает» второй волне.

3. Как и в предыдущем случае, часть энергии одной из первоначальных волн посредством новой образовавшейся волны «перекачивается» в другую исходную волну, но, так как полная энергия системы не сохраняется ($(\gamma_1 + \gamma_2)/\gamma_3 < 0$), то существует потенциальная возможность неограниченного роста амплитуд взаимодействующих волн, что приведет к взрывной неустойчивости за конечное время.

4. Трехцуговый резонанс не происходит. Здесь $\gamma_3 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 < 0$ или $\gamma_3 < 0, \gamma_1, \gamma_2 > 0$. Тогда

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_1(0) + \frac{\mid \gamma_1 \mid}{\mid \gamma_3 \mid}\mathcal{E}_3(t), \quad \mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_2(0) + \frac{\mid \gamma_2 \mid}{\mid \gamma_3 \mid}\mathcal{E}_3(t),$$

т. е. $\mathcal{E}_3(t) \equiv 0$, и в первом приближении трехцуговый резонанс волн невозможен.

Замечание. Проведенный анализ трехволнового взаимодействия с точки зрения перераспределения энергии позволил сформулировать необходимые условия реализации различных режимов взаимодействия. Вопрос о достаточных условиях требует построения и исследования решения задачи Коши для системы (3.2), что выходит за рамки настоящей работы.

4. Резонансное взаимодействие продольных и поперечных волн. С целью конкретизации условий резонансного взаимодействия (3.1) рассмотрим частоты продольных и поперечных волн. Дисперсионный анализ модели позволяет получить явные выражения для частот продольных и поперечных волн [10, 11]. Ограничимся ниже случаем нулевых фоновых скоростей движения твердой и флюидной фаз ($v_{fi}^{(0)} = v_{si}^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2, 3$).

Дисперсионное соотношение (2.4) имеет вид

$$\operatorname{Det} A(t,x,-\omega,k) = (1-\alpha)^5 m^4 \mathcal{P}_4 \mathcal{P}_s^2 \rho_l^2 \omega^{17}/(3(1-(1-\alpha)m))$$

в случае пористой среды, насыщенной жидкостью, и

$$\operatorname{Det} A(t,x,-\omega,k) = (1-\alpha)^5 m^4 \mathcal{P}_4 \mathcal{P}_s^2 \rho_g^2 \omega^{17}/(3RT_g^2(1-(1-\alpha)m))$$

в случае пористой среды, насыщенной газом.

Частоты продольных волн (прямой и обратной) первого и второго рода определяются многочленом $\mathcal{P}_4$ четвертой степени:

$$\mathcal{P}_4 = \Gamma_0\omega^4 - \Gamma_1\omega^2 + \Gamma_2.$$

Здесь коэффициент Γ_0 есть константа, не зависящая от волнового вектора и определяемая параметрами равновесного фона и параметрами среды. Коэффициенты Γ_1 и Γ_2 запишем как

$$\Gamma_1 = c_1|k|^2 + æ_1\sigma_{ij}^{(0)}k_ik_j, \quad \Gamma_2 = |k|^2(c_2|k|^2 + æ_2\sigma_{ij}^{(0)}k_ik_j),$$

где k_i — координаты волнового вектора k; константы $c_1, æ_1$ и $c_2, æ_2$ также определяются параметрами равновесного фона и параметрами среды. Таким образом, частоты продольных волн (прямой и обратной) первого и второго рода примут вид

$$\omega_1 = \pm((\Gamma_1 + (\Gamma_1^2 - 4\Gamma_0\Gamma_2)^{1/2})/(2\Gamma_0))^{1/2}, \quad \omega_2 = \pm((\Gamma_1 - (\Gamma_1^2 - 4\Gamma_0\Gamma_2)^{1/2})/(2\Gamma_0))^{1/2},$$

а кратные частоты поперечных волн (прямой и обратной) различной поляризации

$$\omega_3 = \omega_4 = \pm(G/\rho_{s\alpha})^{1/2}|k|,$$

где $\rho_{s\alpha} = \alpha m\rho_\alpha + (1-m)\rho_s$. Рассмотрим пример резонансной триады. Пусть $\omega^{(1)} = \omega_3$ — частота поперечной волны, $\omega^{(2)} = \omega_2$ — частота продольной волны второго рода, $\omega^{(3)} = \omega_1$ — частота продольной волны первого рода. Определим волновые векторы следующим образом. Пусть $\Lambda^{(j)}$ — собственные векторы матрицы тензора фонового напряженного состояния, т. е.

$$\sigma_{ij}^{(0)}\Lambda^{(j)} = \lambda^{(j)}\Lambda^{(j)}, \quad |\Lambda^{(j)}| = 1, \quad j = 1,2,3$$

($\lambda^{(j)}$ — собственные значения). Положим

$$k^{(1)} = n_1\Lambda^{(1)} \text{ и } k^{(2)} = n_2\Lambda^{(2)}$$

(n_1 и n_2 — целые числа). Следовательно, в силу (3.1)

$$k^{(3)} = n_1\Lambda^{(1)} + n_2\Lambda^{(2)}.$$

В рассматриваемом случае условие (3.1) имеет вид

$$(G/\rho_{s\alpha})^{1/2} + Z((c_1 + æ_1\lambda^{(2)} - ((c_1 + æ_1\lambda^{(2)})^2 - 4\Gamma_0(c_2 + æ_2\lambda^{(2)}))^{1/2})/(2\Gamma_0))^{1/2} =$$

Таблица 1

	I	II	$\perp$
I	II(1), $\perp$(3)	II(2)	$\perp$(2)
II	I(1),$\perp$(2)	$\perp$(2)	$\perp$(4)
$\perp$	I(1)	II(2)	—

Таблица 2

	I	II	$\perp$
I	$\perp$ (2)	II(1)	$\perp$(4)
II	I(3), $\perp$ (3)	$\perp$ (3), I(1)	$\perp$ (1)
$\perp$	I(1)	II(3)	—

$$= ((c_1(1+Z^2) + æ_1(\lambda^{(1)} + Z^2\lambda^{(2)}) + ((c_1(1+Z^2) + æ_1(\lambda^{(1)} + Z^2\lambda^{(2)}))^2 - \\ - 4\Gamma_0(1+Z^2)(c_2(1+Z^2) + æ_2(\lambda^{(1)} + Z^2\lambda^{(2)})))^{1/2})/(2\Gamma_0))^{1/2}, \qquad (4.1)$$

где $Z = n_2/n_1$.

Если уравнение (4.1) имеет рациональный корень Z, то выполняются условия трехцугового резонанса (3.1), т. е. поперечная волна и продольная волна второго рода могут вступить в резонансное взаимодействие, в результате которого образуется продольная волна первого рода. Если корень уравнения (4.1) не является рациональным числом, то этого можно добиться малой вариацией параметров задачи. Аналогичным образом можно проанализировать все возможные варианты пространственного взаимодействия упругих волн.

Проведенные авторами расчеты при характерных значениях параметров подтвердили возможность реализации всех указанных режимов взаимодействия волн. Ниже рассмотрим случаи взаимодействия, когда две исходные волны распространяются в ортогональных направлениях $k^{(j)}$, определяемых собственными векторами $\Lambda^{(j)}$ тензора фонового напряженного состояния.

Результаты численных расчетов при $|k^{(1)}| = |k^{(2)}| = 1$ приведены в табл. 1 (для пористой среды, насыщенной жидкостью) и в табл. 2 (для газонасыщенной пористой среды). Здесь через I, II и $\perp$ обозначены продольные волны первого рода, продольные волны второго рода и поперечные волны соответственно. На пересечении строки и столбца указано, какая волна образуется в результате резонансного взаимодействия первой (по вертикали) и второй (по горизонтали) исходных волн. Число в скобках обозначает, какой из перечисленных выше вариантов взаимодействия волн реализуется. Прочерк в таблице соответствует случаю взаимодействия двух поперечных волн, когда не выполняются необходимые условия трехцугового резонанса (3.1).

Нетрудно видеть качественные отличия резонансного взаимодействия волн при насыщении пористой среды жидкостью или газом. Так, при взаимодействии двух продольных волн первого рода в пористой среде, насыщенной жидкостью, могут образоваться продольная волна второго рода и поперечная волна, а в газонасыщенной пористой среде — только поперечная волна. При взаимодействии двух продольных волн второго рода в пористой среде, насыщенной жидкостью, генерируется поперечная волна, а в газонасыщенной пористой среде — поперечная волна и продольная волна первого рода. Как видно из табл. 1, 2, распределение энергии в системе взаимодействующих волн для пористой среды, насыщенной жидкостью, и газонасыщенной пористой среды различается почти во всех случаях. Только при взаимодействии поперечной волны и продольной волны первого рода трехцуговый резонанс происходит одинаковым образом: генерируется новая продольная волна первого рода, которая «отбирает» энергию у первоначальных волн, и полная энергия системы остается постоянной.

Особо выделим режимы взаимодействия, приводящие к взрывной неустойчивости и, следовательно, к разрушению волн. В этом смысле распространение волн в газонасыщенной среде является менее устойчивым, чем в среде, насыщенной слабосжимаемой жидкостью, например водой. В газонасыщенной среде эффект взрывной неустойчивости может реализоваться практически для всех типов волн. Этот результат хорошо согласуется с общепринятыми представлениями о сильном затухании волн в газонасыщенных пластах.

Отметим, что значения констант взаимодействия зависят от значений параметров, в частности от волновых векторов, и при их варьировании меняются (вплоть до смены знака), так что может измениться тип резонансного взаимодействия волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (номер гранта JET100).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузнецов О. Л., Симкин Э. М.** Преобразование и взаимодействие геофизических полей в литосфере. М.: Недра, 1990.
2. **Николаев А. В.** Эффект сейсмических воздействий на залежи нефти и подземных вод // Сейсмическое вибровоздействие на нефтяную залежь. М.: ИФЗ РАН, 1993. С. 7–13.
3. **Николаевский В. Н.** Вибрация горных массивов и конечная нефтеотдача пласта // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 110–119.
4. **Летников Ф. А.** Синергетика геологических систем. Новосибирск: Наука, 1992.
5. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. **Ионов А. М., Сироткин В. К., Сумин Е. В.** Распространение нелинейных продольных волн в пористых насыщенных средах // ПМТФ. 1988. № 6. С. 138–144.
7. **Крылов А. Л., Николаевский В. Н., Эль Г. А.** Математическая модель нелинейной генерации ультразвука сейсмическими волнами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 6. С. 1340–1345.
8. **Ганиев Р. Ф., Петров С. А., Украинский Л. Е.** О некоторых нелинейных волновых эффектах в насыщенной жидкостью пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 74–79.
9. **Крылов А. Л., Мазур Н. Г., Николаевский В. Н., Эль Г. А.** Градиентно-согласованная нелинейная модель генерации ультразвука при распространении сейсмических волн // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 6. С. 100–109.
10. **Максимов А. М., Радкевич Е. В.** О модулированных волнах в модели Био — Николаевского // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 4. С. 432–435.
11. **Максимов А. М., Радкевич Е. В., Эдельман И. Я.** Резонансные режимы распространения волн в газонасыщенной пористой среде // Докл. РАН. 1994. Т. 336, № 6. С. 745–749.
12. **Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids I. Low frequency range and II. High frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. P. 168–186.
13. **Nikolaevskij V. N.** Mechanics of Porous and Fractured Media. Singapore: World Scientific, 1990.
14. **Абловиц М., Сигур Х.** Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987.
15. **Маслов В. П.** Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987.

16. **Арнольд В. И.** Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 6. С. 91–192.
17. **Goloshubin G. M., Krauklis P. V., Molotkov L. A., Helle H. B.** Slow wave phenomenon at seismic frequencies // Proc. 63rd Ann. Int. SEG Meeting, Sept. 26–30, Washington, 1993. P. 809–811.
18. **Маслов В. П., Омельянов Г. А.** Взаимодействие трех волн с учетом эффектов удвоения частот // Изв. вузов. Физика. 1986. № 3. С. 3–23.

Поступила в редакцию 6/X 1994 г.,
в окончательном варианте — 1/II 1995 г.