УДК 519.64

Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования

Л.Ю. Плиева[1,2]

[1]Южный математический институт – филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук» (ЮМИ ВНЦ РАН), ул. Ватутина 53, Владикавказ, Республика Северная Осетия-Алания, 362025

[2]Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, ул. Ватутина, 44, Владикавказ, Республика Северная Осетия-Алания, 362025

E-mail: plieva-21@mail.ru

Плиева Л.Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 419–428.

Рассматривается гиперсингулярный интеграл на отрезке интегрирования с весовой функцией. Доказываются спектральные соотношения для гиперсингулярных интегралов на отрезке $[-1, 1]$. Строятся квадратурные формулы интерполяционной степени точности для интегралов с определенными весовыми функциями. Дается оценка погрешности.

DOI: 10.15372/SJNM20160406

Ключевые слова: *гиперсингулярный интеграл, квадратурная формула, оценка погрешности.*

Plieva L.Yu. Quadrature interpolation type formulas for hypersingular integrals in the interval of integration. // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 419–428.

A hypersingular integral on the interval of integration with the weight function is considered. We prove the spectral ratios for hypersingular integrals on $[-1, 1]$. The quadrature formulas for certain integrals with the weight function are constructed. The estimation error is presented.

Keywords: *hypersingular integral, quadrature formula, the estimation error.*

1. Введение

Важность разработки приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов обусловлена тем, что они имеют широкое приложение в теории упругости, теории дифракции, теории вибраторных антенн, аэродинамике и т. д. Методы вычисления гиперсингулярных интегралов, понимаемых в смысле конечного значения по Адамару, исследованы мало и практически только начинают разрабатываться. Их вычисление в аналитическом виде возможно лишь в весьма частных случаях. В связи с этим представляет интерес изучение методов приближенного вычисления указанных интегралов.

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p(t)\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt, \quad x\in(-1,1), \tag{1}$$

где $p(t)$ — заданная на отрезке $[-1,1]$ конкретная суммируемая весовая функция, в частности $p(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, $(\alpha,\ \beta>-1)$, функция $\varphi(t)$ достаточно гладкая функция, принадлежащая классу $H_r(\alpha)$, $(r\geq 1,\ 0<\alpha\leq 1)$. $H_r(\alpha)$ — это класс функций, имеющих непрерывные производные до $r-1$ порядка, а производная r-го порядка принадлежит классу Гельдера с показателем α.

Интеграл (1) понимается в смысле конечной части по Адамару, а именно как предел [1–3]:

$$\int_{-1}^{1} p(t)\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{x-\varepsilon} p(t)\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{1} p(t)\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt-\frac{2p(x)\varphi(x)}{\varepsilon}\right], \quad x\in(-1,1).$$

Из теории гиперсингулярных интегралов известно, что если плотность $\varphi_0(t)$ на концах отрезка интегрирования обращается в нуль, то гиперсингулярный интеграл сводится к сингулярному интегралу вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0'(t)}{t-x}\,dt, \quad x\in(-1,1),$$

что позволяет применить к гиперсингулярному интегралу такого типа приближенные методы, полученные ранее для сингулярных интегралов, с учетом того, что плотность $\varphi_0'(t)$ принадлежит классу Гельдера с показателем α.

В данной работе строятся квадратурные формулы интерполяционного типа для приближенного вычисления интегралов вида (1), основанные на приближении функции $\varphi(t)$ интерполяционными многочленами, построенными по значениям соответствующей функции в узлах, являющихся нулями ортогональных многочленов на отрезке $[-1,1]$ по весу $p(t)$. Кроме этого, получены и доказаны спектральные соотношения для гиперсингулярных интегралов с определенными весовыми функциями на отрезке интегрирования, т. е. для определенных гиперсингулярных интегралов получены аналитические представления. Полученные спектральные соотношения используются при построении квадратурных формул для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования.

2. Квадратурные формулы интерполяционного типа

Итак, рассмотрим гиперсингулярный интеграл вида (1), где весовая функция имеет один из следующих видов:

$$p(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad p(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \qquad p(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

Гиперсингулярные интегралы с такими весовыми функциями часто встречаются в приложениях, например в некоторых задачах аэродинамики [2, 3].

Ранее в работе [3] была построена квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла (1) с весовой функцией $p(t)=\sqrt{1-t^2}$ на отрезке интегрирования $[-1,1]$. В ходе построения квадратурной формулы было использовано следующее спектральное соотношение:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{U_n(t)}{(t-x)^2}\, dt = -\pi(n+1)U_n(x), \quad x \in (-1,1),$$

где $U_n(x) = \dfrac{\sin\left((n+1)\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ — многочлен Чебышева второго рода.

В зависимости от весовой функции плотность $\varphi(t)$ в интеграле (1) будем в дальнейшем приближать интерполяционными многочленами, построенными по узлам нулей многочленов, ортогональных по весу $p(t)$ на отрезке $[-1,1]$.

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\, dt, \quad x \in (-1,1). \tag{2}$$

Справедлива теорема [7].

Теорема 1. *Если плотность* $\varphi(t)$ *в интеграле* (2) *равна многочлену Чебышева первого рода, то для интеграла*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, \frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\, dt, \quad x \in (-1,1), \tag{3}$$

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t),$$

справедлива формула

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, \frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\, dt = \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2}, \quad x \in (-1,1). \tag{4}$$

Доказательство. Над интегралом (3) произведем следующие преобразования:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, \frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{T_n(t)}{(1-t^2)(t-x)^2}\, dt$$

$$= \frac{2x}{(1-x^2)^2}\, \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{T_n(t)}{t-x}\, dt + \frac{1}{1-x^2}\, \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\, dt +$$

$$\frac{1}{2(1-x)^2}\, \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{T_n(t)}{1-t}\, dt + \frac{1}{2(1+x)^2}\, \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{T_n(t)}{1+t}\, dt.$$

В интегралах

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{T_n(t)}{t-x}\, dt, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\, dt$$

заменим многочлен $T_n(t)$ через многочлены Чебышева второго рода по формуле [4]:

$$T_n(t) = \frac{1}{2}\Big(U_n(t) - U_{n-2}(t)\Big).$$

Далее, используя формулы обращения [2]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\frac{U_n(t)}{t-x}dt = -T_{n+1}(x), \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\frac{U_n(t)}{(t-x)^2}dt = -(n+1)U_n(x)$$

для интеграла (3), после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt = \frac{2x}{1-x^2}\,U_{n-1}(x) - \frac{nT_n(x) + xU_{n-1}(x)}{1-x^2} = \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2}.$$

□

Учитывая, что производная первого порядка многочлена Чебышева $U_{n-1}(x)$ имеет вид

$$U'_{n-1}(x) = \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2},$$

формулу (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt = U'_{n-1}(x), \quad x \in (-1,1).$$

Для построения квадратурной формулы для интеграла (2) аппроксимируем плотность $\varphi(t)$ в интеграле интерполяционным многочленом по узлам, являющимся нулями многочлена Чебышева первого рода:

$$\varphi(t) \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\,\frac{(-1)^{k-1}T_n(t)}{t-x_k}\,\varphi(x_k), \tag{5}$$

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\,\pi, \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставим (5) в интеграл (2), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,\varphi(x_k)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x_k)(t-x)^2}\,dt.$$

Преобразуя полученное выражение и используя формулу (4), получим следующую квадратурную формулу:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt$$
$$\approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k}\left[\frac{U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x)}{x-x_k} + \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2}\right]\varphi(x_k), \tag{6}$$

где $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ — узлы Чебышева первого рода.

При $x = x_j$ понимается соответствующий предел, а именно

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x_j)^2}\,dt$$

$$\approx \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{x_j-x_k}\left[\frac{U_{n-1}(x_k)-U_{n-1}(x_j)}{x_j-x_k}+\frac{x_jU_{n-1}(x_j)-nT_n(x_j)}{1-x_j^2}\right]\varphi(x_k)+$$

$$\frac{1}{n}\lim_{x\to x_j}\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}}{x-x_j}\left[\frac{U_{n-1}(x_j)-U_{n-1}(x)}{x-x_j}+\frac{xU_{n-1}(x)-nT_n(x)}{1-x^2}\right]\varphi(x_j).$$

Таким образом, в случае когда значение параметра x совпадает с узлами интерполирования, после раскрытия неопределенности, получаем следующую квадратурную формулу:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x_j)^2}\,dt$$

$$\approx \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{x_j-x_k}\left[\frac{U_{n-1}(x_k)-U_{n-1}(x_j)}{x_j-x_k}+\frac{x_jU_{n-1}(x_j)-nT_n(x_j)}{1-x_j^2}\right]\varphi(x_k)+$$

$$\frac{1+2x_j^2+n^2(x_j^2-1)}{2\left(1-x_j^2\right)^2}\varphi(x_j).$$

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt, \quad x\in(-1,1). \tag{7}$$

Справедлива теорема [7].

Теорема 2. *Если плотность $\varphi(t)$ в интеграле (7) имеет вид $\varphi(t)=C_n(t)$, где*

$$C_n(t)=\frac{\cos\dfrac{2n+1}{2}\theta}{\cos\dfrac{\theta}{2}}, \quad \theta=\arccos t,$$

есть многочлен степени n, ортогональный по весу $p(t)=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$ на отрезке $[-1,1]$, то справедлива формула

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{C_n(t)}{(t-x)^2}\,dt=\frac{(1+n)U_{n-1}(x)-nU_n(x)}{1-x}, \quad x\in(-1,1). \tag{8}$$

Доказательство. Преобразуем интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{C_n(t)}{(t-x)^2}\,dt, \tag{9}$$

используя представление многочлена $C_n(t)$, через многочлены Чебышева первого рода

$$C_n(t) = \frac{T_n(t)+T_{n+1}(t)}{1+t}. \tag{10}$$

Будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{C_n(t)}{(t-x)^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_{n+1}(t)}{(t-x)^2}\,dt. \tag{11}$$

Используя формулу (4), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{C_n(t)}{(t-x)^2}\,dt = \frac{(1+n)U_{n-1}(x)-nU_n(x)}{1-x}, \quad x\in(-1,1).$$

□

Заменим в интеграле (7) плотность $\varphi(t)$ интерполяционным многочленом, построенным по узлам корней многочлена $C_n(t)$:

$$\varphi(t) \approx \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,C_n(t)}{t-x_k}\,\cos\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\,\varphi(x_k).$$

Используя формулу (8), получим квадратурную формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt \approx \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k}\,\cos\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\times$$

$$\left[\frac{S_n(x_k)-S_n(x)}{x-x_k}+\frac{(1+n)U_{n-1}(x)-nU_n(x)}{1-x}\right]\varphi(x_k), \tag{12}$$

$$S_n(t) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta = \arccos t, \quad x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi.$$

Если в качестве значений параметра x брать узлы интерполирования, то будем рассматривать соответствующий предел, и в результате мы получим следующую квадратурную формулу:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x_j)^2}\,dt \approx \frac{2}{2n+1}\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{x_j-x_k}\,\cos\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\times$$

$$\left[\frac{S_n(x_k)-S_n(x_j)}{x_j-x_k}+\frac{(1+n)U_{n-1}(x_j)-nU_n(x_j)}{1-x_j}\right]\varphi(x_k)+$$

$$\frac{1}{2n+1}\,\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}}{1-x_j}\,\cos\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)}\times$$

$$\Big((2+n)U'_{n-1}(x_j)+(1-n)U'_n(x_j)\Big)\varphi(x_j).$$

Рассмотрим теперь гиперсингулярный интеграл вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt,\quad x\in(-1,1). \tag{13}$$

Справедлива теорема.

Теорема 3. *Если плотность $\varphi(t)$ в интеграле (13) имеет вид $\varphi(t)=S_n(t)$, где*

$$S_n(t)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},\quad \theta=\arccos t,$$

есть многочлен степени n, ортогональный по весу $p(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ на отрезке $[-1,1]$, то справедлива формула

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{S_n(t)}{(t-x)^2}\,dt=-\frac{(1+n)U_{n-1}(x)+nU_n(x)}{1+x},\quad x\in(-1,1). \tag{14}$$

Доказательство. Используя представление многочлена $S_n(t)$ через многочлены Чебышева первого рода

$$S_n(t)=\frac{T_n(t)-T_{n+1}(t)}{1-t} \tag{15}$$

для интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{S_n(t)}{(t-x)^2}\,dt, \tag{16}$$

будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{S_n(t)}{(t-x)^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}\,dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{T_{n+1}(t)}{(t-x)^2}\,dt. \tag{17}$$

Используя формулу (4), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{S_n(t)}{(t-x)^2}\,dt=\frac{(1+n)U_{n-1}(x)+nU_n(x)}{1+x},\quad x\in(-1,1).\qquad\square$$

Используя формулу (14) и аппроксимируя плотность $\varphi(t)$ интерполяционным многочленом по узлам, являющимся корнями многочлена $S_n(t)$, получим следующую квадратурную формулу для интеграла (13):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt\approx\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,\sin\frac{k}{2n+1}\pi}{x-x_k}\times$$
$$\left[\frac{C_n(x)-C_n(x_k)}{x-x_k}-\frac{(1+n)U_{n-1}(x)+nU_n(x)}{1+x}\right]\varphi(x_k),\tag{18}$$
$$x_k=\cos\frac{2k}{2n+1}\pi.$$

При $x=x_j$ понимается соответствующий предел

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x_j)^2}\,dt\approx\frac{2}{2n+1}\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,\sin\frac{k}{2n+1}\pi}{x_j-x_k}\times$$
$$\left[\frac{C_n(x_j)-C_n(x_k)}{x_j-x_k}-\frac{(1+n)U_{n-1}(x_j)+nU_n(x_j)}{1+x_j}\right]\varphi(x_k)+$$
$$\frac{2}{2n+1}\lim_{x\to x_j}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{1-x_j^2}\,\sin\frac{j}{2n+1}\pi}{x-x_j}\times$$
$$\left[\frac{C_n(x)-C_n(x_j)}{x-x_j}-\frac{(1+n)U_{n-1}(x)+nU_n(x)}{1+x}\right]\varphi(x_j).$$

В результате раскрытия предела мы получим следующую квадратурную формулу:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x_j)^2}\,dt\approx\frac{2}{2n+1}\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,\sin\frac{k}{2n+1}\pi}{x_j-x_k}\times$$
$$\left[\frac{C_n(x_j)-C_n(x_k)}{x_j-x_k}-\frac{(1+n)U_{n-1}(x_j)+nU_n(x_j)}{1+x_j}\right]\varphi(x_k)+$$
$$\frac{1}{2n+1}\,\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}}{1+x_j}\sin\frac{j\pi}{2n+1}\Big((1-n)U_n'(x_j)-(2+n)U_{n-1}'(x_j)\Big)\varphi(x_j).$$

Преимуществом полученых квадратурных формул является то, что они позволяют приближенно вычислить рассмотренные интегралы для любого значения параметра $x\in(-1,1)$.

Рассмотрим оценку погрешности для полученных квадратурных формул.

Теорема 4. *Если плотность $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_r(\alpha)$, $(r \geq 1,\ 0 < \alpha \leq 1)$, то для погрешности квадратурных формул справедлива оценка*

$$|R_n(\varphi, x)| \leq \frac{1}{1-x^2} O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{19}$$

где $1 \leq r < n$.

Доказательство. Плотность $\varphi(t)$ представим в виде [5]:

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) + \frac{\varphi'(t_k)}{1!}(t-t_k) + \frac{\varphi''(t_k)}{2!}(t-t_k)^2 + \cdots + \frac{\varphi^{(r)}(t_k)}{r!}(t-t_k)^r +$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{t_k}^{t}(t-u)^{r-1}\Big(\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(t_k)\Big)\,du,$$

где $t_0 = -1$, $t_k = -1 + kh$, $h = \dfrac{2}{n+1}$, $k = 1, \ldots, n$.

Для оценки погрешности имеем

$$|R_n(\varphi, x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(t)\frac{dt}{(t-x)^2}, \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{t_k}^{t} \left|(t-u)^{r-1}\right| \left|\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(t_k)\right| du\,dt.$$

Используя неравенство Гельдера $\left|\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(t_k)\right| \leq A|u - t_k|^{\alpha}$, после несложных преобразований получим

$$|R_n(\varphi, x)| \leq O(h^{r+\alpha}) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(t)\frac{dt}{(t-x)^2} \leq \frac{1}{1-x^2} O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \qquad \square$$

Полученная оценка дает представление о порядке точности и зависит от параметра x. Оценка постоянной в величине $O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ не зависит от параметра сингулярности x и n. Она явно не установлена.

Литература

1. **Бойков И.В.** Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть 2. Гиперсингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2009.
2. **Лифанов И.К.** Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: Изд-во "Янус", 1995.
3. **Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. — М.: Изд-во "Янус-К", 2001.
4. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. — М.: Наука, 1983.
5. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967.

6. **Хубежты Ш.С., Плиева Л.Ю.** О квадратурных формулах для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. — Сб. статей IX Междунар. научно-технической конф., 28–31 октября 2014 г. / И.В. Бойков. — Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. — С. 54–58.
7. **Плиева Л.Ю.** О приближенном вычислении гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Тр. молодых ученых Владикавказского научного центра РАН. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 40–46.

Поступила в редакцию 22 июня 2015 г.,
в окончательном варианте 16 декабря 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Boikov I.V.** Priblizhennye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Chast' 2. Gipersingulyarnye integraly. — Penza: Izd-vo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2009.
2. **Lifanov I.K.** Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii i chislennyi eksperiment. — M.: Izd-vo "Yanus", 1995.
3. **Vainikko G.M., Lifanov I.K., Poltavskii L.N.** Chislennye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya. — M.: Izd-vo "Yanus-K", 2001.
4. **Pashkovskii S.** Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva. — M.: Nauka, 1983.
5. **Krylov V.I.** Priblizhennoe vychislenie integralov. — M.: Nauka, 1967.
6. **Khubezhty Sh.S., Plieva L.Yu.** O kvadraturnykh formulakh dlya gipersingulyarnykh integralov na otrezke integrirovaniya // Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i social'nykh problem. — Sb. statei IX Mezhdunar. nauchno-tekhnicheskoi konf., 28–31 oktyabrya 2014 g. / I.V. Boikov. — Penza: Izd-vo PGU, 2014. — S. 54–58.
7. **Plieva L.Yu.** O priblizhennom vychislenii gipersingulyarnykh integralov na otrezke integrirovaniya // Tr. molodykh uchenykh Vladikavkazskogo nauchnogo centra RAN. — 2015. — T. 15, № 1. — S. 40–46.