Проблемы логики и методологии науки

УДК 164.07

СУБЪЕКТИВНАЯ МАТЕМАТИКА ГЕДЕЛЯ: САМООЧЕВИДНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ МАТЕМАТИКИ И АРТЕФАКТЫ СИНТАКСИЧЕСКИХ СТРУКТУР*

В.В. Целищев

В статье рассматривается соотношение между субъективной, или человеческой, математикой и объективной математикой, введенное К. Геделем при интерпретации им теорем о неполноте. Показывается связь этого различения с понятием математической определенности как эпистемологической характеристики математического мышления. Установлена связь понятия математической определенности с понятием очевидных истин математики в виде аксиом. Рассмотрено отличие очевидных истин элементарной арифметики от высших синтаксических структур, связанных с эффектом кодирования.

Ключевые слова: Гедель, очевидная истина, субъективная математика, объективная математика, теоремы о неполноте, аксиома

Публикация так называемой Гиббсовской лекции Геделя [1] породила значительную литературу о концепции незавершаемости математики и абсолютной неразрешимости некоторых математических утверждений. В некоторой тени осталась эпистемологическая концепция Геделя о различении объективной и субъективной математики. Одним из немногих представлений этого весьма сложного материала явилась статья Н. Салмона «Пределы человеческой математики» [2]. Однако в значительной степени ее автор опирается на недостаточно ясные замечания самого Геделя, что затрудняет понимание самой проблемы. В частности, это касается критики Салмоном замечаний Дж. Булоса

* Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны грантом Российского гуманитарного научного фонда (проект № 13-03-00073).

о неясности постановки Геделем проблемы эквивалентности человеческого ума и машины [3].

Первая теорема Геделя о неполноте арифметики утверждает, что в формальной системе существуют предложения истинные, но недоказуемые в этой системе (вопрос о классе таких формальных систем здесь не имеет значения). Геделевы неразрешимые предложения могут оказаться разрешимыми в более сильной системе, получаемой, например, добавлением к исходной формальной системе неразрешимого утверждения в качестве аксиомы. Для новой системы опять-таки можно эффективно получить новое геделево неразрешимое предложение. Итерация этого процесса дает расширение арифметики, которое оказывается бесконечным. В этом смысле Гедель говорит о «незавершаемости» математики. На каждом этапе конструируется новое неразрешимое предложение, которое оказывается разрешимым при следующем расширении системы. Возникает вопрос: существуют ли такие предложения, которые являются «абсолютно» неразрешимыми?

Предположение Геделем существования абсолютно неразрешимых утверждений многие исследователи связывают с его платонизмом, согласно которому математические истины существуют вне и независимо от человеческого сознания и в этом смысле некоторые математические истины недоступны для человеческого познания. В понимании Геделя, это «объективная математика», а ту часть математики, которая доступна, он называет «субъективной математикой», или «человеческой математикой». (Термин «человеческая математика» как синоним геделевской субъективной математики ввел Н. Салмон). Именно субъективная математика может бесконечно расширяться через добавление неразрешимых предложений.

Два вида математики тесно связаны со второй теоремой Геделя о неполноте. «Именно эта теорема делает незавершенность математики очевидной. Потому что она делает невозможным, что можно установить определенную систему аксиом и правил и непротиворечиво сделать следующее утверждение о ней: все аксиомы и правила, которые я воспринимаю (с математической определенностью), должны быть правильными, и, больше того, я верю, что они содержат всю математику. А если кто-то делает такое утверждение, он противоречит самому себе. …Очевидно, никакая вполне определенная система правильных аксиом не может объять всю объективную математику, так как утверждение, которое устанавливает непротиворечивость системы истинно, но недоказуемо в системе. Однако что касается субъективной математики, никоим образом не возбраняется, что должно существовать конечное правило для произведения всех ее очевидных аксиом [1].

Ясно, что под субъективной математикой понимается система всех доказуемых математических утверждений, в то время как под математикой объективной понимается система всех истинных математических утверждений. Разделение математики на объективную и субъективную имеет важное значение для решения вопроса о соотношении в математическом познании человеческого ума и машины. Субъективная математика тесно связана с феноменом понимания математического доказательства человеческим умом.

Если у нас есть доказывающая теоремы машина Тьюринга, на выходе которой получается множество предложений, выражающих точно те же самые математические предложения, которые могут быть доказаны человеческим умом, тогда имеется истинное математическое предложение, которое может быть понято, но не может быть доказано тем же самым умом, а именно, математически равносильное предположение о собственной непротиворечивости. Для машины Тьюринга из второй теоремы Геделя о неполноте следует, что никакая перенумеровывающая теоремы машина не печатает предложение, равносильное предложению о своей собственной непротиворечивости. Это означает, что речь идет о возможности доказывать теоремы с математической определенностью. По мнению Н. Салмона, «аргумент Геделя не относится к гипотетическим умам с точно определенной способностью. Он относится к способности человеческого ума к приобретению математической определенности. Он касается пределов человеческой математики – ее исходной точки и ее высших пределов» [2].

Математическая определенность есть некоторая эпистемологическая характеристика чистой математики, обязанная доказательству, и поэтому истинность в чистой математике не дает гарантий математической определенности. Именно это указывает на возможность существования таких математических истин, которые в принципе не могут быть разрешены человеческим умом. Если объективная математика может включать проблемы, не являющиеся неразрешимыми для человеческого ума, то субъективная математика включает лишь познаваемые утверждения. Ясно, что эти познаваемые утверждения будут представлять собой лишь часть всех истинных математических утверждений. Более точно, класс истинных утверждений, которые человеческий ум способен постичь с математической определенностью, представляет собой подкласс всех истинных утверждений математики. Важно отметить, что этот подкласс включает все те утверждения, которые познаваемы в принципе, а не только те, что известны к настоящему времени.

Концепция математической определенности связана с постижимостью человеческим умом математических истин. Прежде всего следует отметить, что речь идет не об индивидуальной способности отдельного человека, а о некотором общем свойстве человеческого ума. Далее следует также признать, что постижение математических истин с «математической определенностью» является окончательным эпистемическим свойством, примером которого может быть психологическое ощущение, что доказательство понято. Это известный эффект «ага!» (gotcha) у М. Гарднера [3]. Классическим образцом математической определенности является демонстрация решения задачи об удвоении квадрата путем увеличения стороны последнего, представленная в диалоге Платона «Менон» [4]. В нем Сократ показывает юноше-рабу, что для решения этой задачи надо построить квадрат на диагонали исходного квадрата, и юноша находит этот аргумент убедительным; важно и то, что присутствующие при этом также признают его таковым. Ход самого доказательства заставляет принять результат, и именно постижение доказательства является причиной убедительности аргумента.

Соотношение между субъективной математикой и математикой объективной не является чем-то строго зафиксированным, помимо того, что первая есть подкласс второй, но не обязательно собственный подкласс. В частности, не предполагается ни их совпадения, ни их жесткого различия. Для Геделя утверждения субъективной математики представляют собой совокупность математических истин, познаваемых человеком с математической определенностью. Это последнее понятие является ключевым во всем предприятии Геделя. В самом деле, Гедель не предполагает, что субъективная математика содержит математические утверждения, которые должны быть истинными. Предполагается лишь то, что она содержит познаваемые истины, но именно в силу познаваемости они являются истинными. При этом речь идет о настоящих истинных утверждениях, а не о тех, которые в силу разных причин могли быть лишь ошибочно приняты за истинные. Далее, если все утверждения субъективной математики истинны, она является непротиворечивой. Таким образом, имеется цепочка «познаваемость – истинность – непротиворечивость», в которой как ее части, так и переходы требуют объяснения.

Рассмотрим, что подразумевается под познаваемостью математических истин. Если есть утверждение, прокламируемое в виде знания, например «число 91 является составным», тогда не является человечески познаваемым утверждение «число 91 является простым» [5]. Утверждение о составной природе числа 91 считается истинным, и возникает вопрос: зачем нам нужно приумножать характеристики утверждения, называя его и познаваемым, и истинным? Дело в том, что для Геделя познаваемость является важной, потому что познаваемость влечет за собой эпистемическое обоснование, которое представляет собой более базисную характеристику, чем просто истинность. Почему мы считаем утверждение истинным? Потому что существуют определенные эпистемические механизмы, благодаря которым мы приходим к знанию, и главной особенностью такого механизма является получение знания с математической определенностью. Механизм подобного рода присущ человеческому уму, который функционирует так, что некоторые математические аргументы невозможно подвергнуть сомнению, в чем, по сути, и заключается математическая определенность.

Математическая определенность в этом смысле представляет собой убежденность, достигаемую постижением доказательства, о котором говорилось выше. Также было уже указано и то, что математическая определенность должна быть присуща исходным посылкам любого доказательства, т.е. очевидным аксиомам. Природа этих очевидных истин отлична от природы доказуемых истин как раз в плане понимания того, что такое математическая определенность в постижении аксиом.

Если главным эпистемическим средством достижения математической определенности является доказательство, то возникает вопрос о математической определенности исходных утверждений доказательства. Таким образом, в центре внимания при анализе понятия математической определенности оказывается эпистемический статус аксиом. Дело в том, что познание исходных утверждений с математической определенностью должно быть по своему характеру особым: согласно долгой традиции в математике, аксиомы должны быть самоочевидными.

Очевидность зиждется на интуитивной ясности или на возможности непосредственного «узревания истины». Гедель в последние годы активно изучал феноменологию Э. Гуссерля, пытаясь найти очищенную сущность интуитивного схватывания истины. Коль скоро речь идет о субъективной, или человеческой, математике, аксиомы, на которые она опирается, полагаются истинными по двум основаниям: либо это результат «непосредственного знания», которое может иметь характер, например, «знания-знакомства» Рассела, либо это результат интуиции математика. Сам Гедель предостерегал против отождествления интуиции с непосредственным знанием: «Следует заметить, что математическая интуиция не должна рассматриваться как способность получения непосредственного знания о соответствующих объектах. Скорее, как и в случае физического опыта, мы образуем наши идеи относительно этих объектов на основании чего-то такого, что нам дано непосредственно. Только это “что-то” – не ощущения и не главным образом ощущения. То, что это “что-то” помимо ощущений действительно дано нам непосредственно, следует из того факта, что даже наши идеи касательно физических объектов содержат конституенты, качественно отличные от ощущений или просто их комбинаций, например идею самого объекта, а с другой стороны, в нашем мышлении мы не можем создать качественно новых элементов, но можем лишь воспроизвести и скомбинировать только то, что дано. Очевидно, что “данное” в математике близко соотносится с абстрактными элементами, которые содержатся в наших эмпирических идеях» [6].

Аксиомы, видимо, должны содержать эти абстрактные элементы, которые и являются основой познания математических истин с математической определенностью. Вопрос, который интересует Геделя, заключается в том, при каких условиях очевидные аксиомы могут служить базисом того, что будет считаться корпусом истин, полученных с математической определенностью. Можно предположить, что мы знаем непосредственно, с математической определенностью (с помощью интуиции или еще какого-либо когнитивного процесса) истинность каждой отдельной аксиомы. Для понимания того, как функционирует целая математическая система, требуется понимание роли целого множества аксиом, которые, предположительно, схватывают всю математику. Крайним случаем является возможность, когда все известные с математической определенностью истины берутся в качестве аксиом. При этом возникает проблема, связанная с природой субъективной математики. Если мы знаем некоторое количество истин непосредственно, можно получить полную и непротиворечивую формальную систему субъективной математики. Действительно, если все истины теории взять в качестве аксиом, тогда каждая выразимая истина арифметики доказуема в теории единой строкой. В этом случае такая дедуктивная система непротиворечива и полна. Как следствие, процедура получения неразрешимого утверждения, по первой теореме Геделя о неполноте, неосуществима. Но такая формальная теория не представляет интереса, поскольку не может дать нетривиальных результатов. Действительно, предположим, что сформулирована некоторая математическая гипотеза. В отношении нее мы не будем знать, является ли она аксиомой нашей теории или нет. С точки зрения обычной математической практики эта гипотеза, если она будет доказана, и будет математическим утверждением, полученным с математической определенностью. Предложенная же формальная система ничего не может дать, поскольку отсутствует доказательство как таковое, и прямое постижение истинности гипотезы не отвечает стандартам математической определенности. В реальном математическом исследовании ум постигает арифметические истины с математической определенностью совсем иным образом, чем с помощью полных и непротиворечивых теорий вроде описанной выше. Похоже, что неполнота формальных систем является неизбежной платой за возможность того, что дедуктивные системы приближаются к тому способу, которым человеческий ум получает математическое знание.

Таким образом, аксиоматическая система, все истины которой представляют собой аксиомы, не является той формальной системой, в которой могут быть выражены истины арифметики. Хао Ван приводит следующую формулировку первой теоремы Геделя о неполноте, которая эквивалентна приведенному выше утверждению о характере логической формальной системы: «Никакая формальная система математики не может быть одновременно непротиворечивой и полной; или, альтернативно, любая непротиворечивая формальная теория математики должна содержать неразрешимые предложения» [7].

Таким образом, аксиоматический базис субъективной, или человеческой, математики, состоящий из чисто математических истин, познаваемых человеческим умом с математической определенностью без независимого математического доказательства (вместе с правилами вывода) не может быть представлен формальной системой.

Ситуация полного перечня познаваемых с математической определенностью математических истин в качестве аксиом является неудовлетворительной не только в техническом аспекте, но и в философском. Технические затруднения обусловлены не в последнюю очередь возможностью существования бесконечного числа аксиом. Это же обстоятельство ставит под сомнение возможность постижения человеческим умом бесконечного числа истин в их целостности. Исходя из этих соображений целесообразно принять обычную математическую практику рассмотрения дедуктивной системы, примитивный базис которой рекурсивно перечислим. В этом случае дедуктивная система специфицируется конечным описанием.

В этом смысле проблема с дедуктивной системой в этом смысле состоит в том, чтобы дать обоснование убедительности дедуктивного вывода, т.е. сделать его объектом теоретического исследования в строгой форме. Именно в этом направлении идет Гедель. Пусть имеется перечень аксиом в виде рекурсивно-перечислимого перечня. Пусть, далее, правила вывода дедуктивной системы также рекурсивно-перечислимы. Гедель показал, как вывод из аксиоматического базиса может быть представлен в объектно-теоретической форме. Теоремы Геделя о неполноте говорят о доказуемости и непротиворечивости, т.е. о свойствах выражений формальной системы. Поскольку речь идет о свойствах выражений языка, сами эти свойства выражаются в метаязыке. Гедель сконструировал предложение φ_{cons}, которое выражающее математическое утверждение cons, относительно которого мы знаем с математической определенностью, что оно эквивалентно формальной непротиворечивости формальной системы. Конструирование формулы φ_{cons} включает ресурсы для обозначения любой рекурсивной функции целых чисел. Вторая теорема Геделя утверждает, что φ_{cons} недоказуемо в соответствующем аксиоматическом базисе.

Используемый Геделем прием важен для понимания роли аксиом. Н. Салмон комментирует эту ситуацию следующим образом: «Понятие математической аксиомы, в смысле фундаментальной, чисто математической истины, познаваемой человеком с математической определенностью без независимого математического доказательства, само по себе не является чисто математическим понятием и не выразимо в соответствующем языке. Взамен… эти утверждения могут быть косвенно специфицированы формулой φ_{cons} посредством прямой, чисто математической спецификации рекурсивной функции *f*, которая перенумеровывает геделевы числа предложений, выражающих те самые утверждения. …Формула φ_{cons} не говорит строго семантически, что выражает понятие доказательства из таких-то и таких-то аксиом и непротиворечивости таких-то и таких-то аксиом и правил вывода соответственно. Математические понятия, выраженные семантически, однако, доказательно эквивалентны этим метатеоретическим понятиям» [8]. Все это означает, что cons есть чисто математическая истина, которая не принадлежит к субъективной математике. В свете этой аргументации знаменитая дилемма Геделя [9] может быть переформулирована следующим образом: либо аксиоматический базис несводим к рекурсивноперечислимому множеству аксиом, либо чисто математические истины, включая математически закодированное утверждение о непротиворечивости субъективной математики, в принципе непознаваемы человеческим умом с математической определенностью.

Интерес Геделя к эпистемическому механизму порождения «очевидных» аксиом напрямую связан с вышеприведенной дилеммой. Субъективная математика может быть продуктом двух источников мышления: человеческого мозга, работающего как некоторый механизм, либо человеческого ума, который превосходит человеческий мозг в порождении математических истин с математической определенностью. Как полагал сам Гедель, его теоремы о неполноте проливают свет на соотношение мозга и ума, что и находит отражение в его дилемме. Если очевидные аксиомы порождаются мозгом и в этом отношении вполне допустим вопрос о том, является ли человеческий ум эквивалентным конечной машине, тогда можно говорить о «конечном правиле» порождения очевидных аксиом.

Обсуждение Геделем процесса порождения очевидных аксиом не касается психологических или неврологических аспектов работы мозга как конечной машины; он исследует логические ограничения в функционировании конечного правила. Более специфически, есть два вопроса в этом отношении. Является ли множество порожденных аксиом рекурсивно перечислимым, и не приводит ли применение этого конечного правила к противоречию.

Что касается первого вопроса, ответ на него касается соотношения ума и машины. Если множество порожденных истин не является рекурсивно перечислимым, тогда способность ума к математической определенности превосходит аналогичную возможность машины, поскольку действие последней ограничено рекурсивными процедурами. Второй вопрос касается следствий второй теоремы Геделя о неполноте, согласно которой утверждение о непротиворечивости множества порожденных аксиом не обладает математической определенностью.

Эти вопросы напрямую связаны с глобальной программой аксиоматизации математики. Идеалом, как известно, при этом является ситуация, при которой множество аксиом «схватывает» всю математику, истинность утверждений которой гарантируется очевидностью аксиом. Гедель, по свидетельству Хао Вана, говорит, что это идеал неосуществим в силу двух причин [10]. Если все аксиомы очевидны, тогда в число таких очевидных утверждений должно входить утверждение о непротиворечивости аксиоматической системы, что противоречит второй теореме о неполноте. Ну а в случае бесконечного числа аксиом речь заходит о рекурсивной перечислимости.

Основой полемики менталистов и механицистов о соотношении возможностей человеческого ума и машины является утверждение первых о том, что человеческий ум видит истинность геделева предложения, что невозможно в случае машины. Салмон предлагает радикально новое объяснение «видения» умом этой истинности, которое парадоксальным образом подрывает позицию менталистов.

Ум может доказать, что аксиомы не могут доказать своей собственной непротиворечивости, и в то же время видеть (без доказательства этого из имеющихся аксиом), что те же самые аксиомы правильны, будучи непротиворечивыми. Ум тем самым расширяет свой дедуктивный базис, усилив себя до возможности доказательства неполноты предыдущих аксиом из нового множества. Ум может тогда повторить этот маневр в отношении нового дедуктивного базиса, и тогда опять уже с новым базисом, и т.д. [11].

Если имеется некоторое конечное правило порождения аксиом, получаемый аксиоматический базис должен быть эффективно перечислимым. Это утверждение чрезвычайно важно для понимания соотношения человека и машины в отношении математического мышления. Если каждая чисто математическая проблема разрешима человеком в принципе, тогда не существует эффективной процедуры для перечисления аксиом человеческой математики. Требование эффективности аксиоматического базиса человеческой математики реализуется прежде всего в том, что самые элементарные математические истины представлены примитивно-рекурсивными структурами математического мышления.

Важность этих структур устанавливается теоремой VII классической статьи К. Геделя:

Каждое рекурсивное отношение является арифметическим [12].

Существует определенный контраст между истинами элементарной арифметики и истинными геделевыми предложениями. Неполнота элементарной арифметики, доказанная теоремой Геделя, является результатом использования сложных синтаксических структур. Одной из составляющих метода Геделя является феномен кодирования. Геделевская примитивно-рекурсивная арифметизация синтаксиса позволяет отобразить исследование синтаксических манипуляций в саму арифметику, и установить их внутри формальной системы арифметики. Проблема состоит в том, в какой степени теорема Геделя о неполноте в применении к первопорядковой Арифметике Пеано свидетельствует о том, что некоторые истины этой арифметики недоказуемы. Арифметические свойства объектов Арифметики Пеано интуитивно очевидны, и вряд ли в них можно сомневаться. Опять-таки, мы имеем дело с различием субъективной, или человеческой математики, и высших синтаксических размышлений об аксиоматизации интуитивно ясной области математики. Действительно, геделево предложение имеет с точки зрения интуитивной математики весьма специфический вид, и по характеру своему не является в интуитивном смысле арифметическим. Теорема Геделя есть скорее результат размышлений над природой аксиоматизации, в которой выражены обычные интуитивно очевидные арифметические свойства. Некоторые исследователи полагают даже, что феномен геделевской неполноты не есть феномен неполноты собственно элементарной арифметики, поскольку неразрешимое геделево предложение можно считать артефактом кодирования [13].

Общая структура аргументации Геделя поддерживает убеждение, что неразрешимое предложение может быть добавлено в качестве аксиомы к системе, в которой оно получено. Но в применении к Арифметике Пеано вряд ли такое добавление будет естественным, поскольку налицо искусственный характер геделева предложения. Любая аксиоматическая система должна быть «естественной» в том смысле, что схватывает интуитивно очевидные математические факты. В этом смысле Арифметика Пеано плюс неразрешимое в ней предложение не составляло бы чисто арифметическое расширение ее, поскольку мотивация такого расширения выходила бы за пределы собственно арифметики. Вряд ли такое положение вещей можно было бы признать удовлетворительным. Дело в том, что истинность нового неразрешимого предложения не обосновывалось бы при этом арифметическими соображениями. Между тем, с точки зрения высших синтаксических соображений получение все более новых аксиоматических систем путем добавления все более новых неразрешимых предложений является вполне естественным процессом.

Анализ феномена кодирования показывает, что он есть результат подобия между формальными манипуляциями над символами и элементарными вычислениями с натуральными числами. При этом некоторые арифметические истины, особенно связанные с рекурсивными равенствами, являются артефактом синтаксических рассмотрений. Это поднимает более общий вопрос о том, в какой степени можно считать, что синтаксические операции являются столь же фундаментальными, как и вычислительные операции над натуральными числами. Этот вопрос возвращает нас к проблеме эффективности рационального мышления, воплощением которого является математическое мышление.

Примечания

1. *Гедель К.* Некоторые основные теоремы в основаниях математики и их следствия // Хинтикка Я. О Геделе. – М. Канон+, 2014. – С. 174–175.
2. *Salmon N.* The limits of human mathematics // Philosophical Papers. – Vol. 1: Metaphysics, Mathematics, and Meaning. – Oxford: Clarendon Press, 2005. – P. 249.
3. *Гарднер М.* А Ну-ка, догадайся! – М., 1984.
4. *Платон.* Менон // Платон. Сочинения. – М., Мысль, 1968. – Т. 1.
5. Пример приведен Дж. Брюсом (см.: *Boolos G.* Introductory note to *1951* // Gödel K. Collected Works. Vol. III: Unpublished Essays and Lectures / Eds. Feferman et al. – Oxford University Press, 1995. – P. 290–304).
6. *Gödel K.* What is Cantor's continuum problem // Philosophy of Mathematics / Eds. Benacerraf P., Putnam H. – Cambridge University Press, 1964. – P. 271–272.
7. *Wang Hao.* A Logical Journey: From Gödel to Philosophy. – MIT Press, 1966. – P. 3.
8. *Salmon N.* The Limits of Human Mathematics. – P. 254.
9. *Гедель К.* Некоторые основные теоремы в основаниях математики и их следствия. – С. 174–175.
10. *Wang Hao.* A Logical Journey: From Gödel to Philosophy. – MIT Press, 1966. – P. 187.
11. *Salmon N.* The limits of human mathematics. – P. 259.
12. *Gödel K.* On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related System. I // From Frege to Gödel / Ed. J. van Heijenoort. – Harvard University Press, 1967. – P. 596–617.
13. *Isaacson D.* Arithmetic Truth and Hidden High-Order Concepts // The Philosophy of Mathematics / Ed. Hart W. – Oxford University Press, 1997.

Дата поступления 16.03.2015
Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск
leitval@gmail.com

Tselishchev V.V. **Gödel's subjective mathematics and self-evident truths**

The article discusses the relationship between subjective or human mathematics and objective mathematics, introduced by K. Gödel for the interpretation of his incompleteness theorems. It is shown the connection of this distinction with the concept of a mathematical certainty as epistemological characteristic of mathematical thinking. The connection between the concepts of mathematical determinacy and the notion of obvious truths of mathematics in the form of axioms is established. The difference between obvious truths of elementary arithmetic and of higher syntactic structures associated with the effect of coding is considered.

Keywords: Gödel, obvious truth, subjective mathematics, objective mathematics, incompleteness theorem, axiom