

УДК 539.3

## УПРАВЛЕНИЕ МОЩНОСТЬЮ ВОЛНОВОГО ПОТОКА В ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНЕ L-ОБРАЗНОЙ ФОРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АКТУАТОРА

Ц.-С. Ли, Ч.-Б. Чень, И.-Х. Цзяо

Школа машиностроения и электротехники Харбинского технологического института,  
Харбин, Китай  
E-mails: lijiaxing-abc@163.com, chenzb@hit.edu.cn, jiaoyh@hit.edu.cn

Изучается задача управления мощностью волнового потока в пластине L-образной формы. Мощность волнового потока уменьшается закрепленной на пластине пьезоэлектрической вставкой, являющейся актуатором. Для расчета оптимальных значений управляющих моментов актуатора используется метод наименьших квадратов. Исследуется работа актуатора при управляющих моментах, близких к оптимальным, с учетом влияния волн, распространяющихся в плоскости пластины.

**Ключевые слова:** пластина L-образной формы, пьезоэлектрический актуатор, активный контроль, волновое приближение, мощность потока.

DOI: 10.15372/PMTF20170421

**Введение.** Во многих инженерных конструкциях (обшивках корабля, деталях самолета, автомобилях и др.) в качестве элементов используются пластины. Волновая энергия, создаваемая внешними силами, распространяется через пластины по всей конструкции и вызывает ее вибрацию. Колебания на средних и высоких частотах приводят к ухудшению устойчивости конструкции, вызывают ее усталость, а также создают шум. Применение актуаторов позволяет существенно уменьшить вибрацию конструкции. При анализе колебаний пластин, используемых в большинстве инженерных конструкций, их можно считать пластинами с защемленными торцами [1]. Поэтому исследование методов, позволяющих уменьшить вибрацию таких пластин, представляет практический интерес.

В работе [2] аналитически (с использованием метода плоских волн) и экспериментально исследованы колебания прямоугольной свободно опертой пластины и показано, что результаты аналитических расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными. В [3] аналитически и экспериментально изучено распространение изгибных волн в полубесконечной пластине. Установлено, что использование актуаторов позволяет уменьшать волновую энергию изгибных волн.

В работе [4] теоретически и экспериментально исследовалась эффективность гашения вибраций в балке с помощью актуаторов. Использовались пьезоэлектрические вставки и пьезоэлектрические датчики деформаций, изготовленные из поливинилиденфторида. Изгибные и продольные колебания изучались с помощью метода наименьших квадратов

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального научного фонда Китая (грант № 11172075).

© Ли Ц.-С., Чень Ч.-Б., Цзяо И.-Х., 2017

с применением х-фильтров. Установлено, что актуаторы способны эффективно гасить гармонические колебания.

В работе [5] исследовалась мощность волнового потока при низких и высоких частотах в пластине L-образной формы с учетом распространения волн в ее плоскости. Из результатов численных решений следует, что волны, распространяющиеся в плоскости пластины, существенно увеличивают мощность волнового потока на резонансных частотах.

В работе [6] для гашения изгибных и крутящих колебаний лопастей ротора использовались распределенные актуаторы. Установлено, что для эффективного управления смещениями двух взаимно перпендикулярных пластин можно использовать пару однослойных актуаторов с различными напряжениями.

В работах [7, 8] с использованием алгоритма упреждения изучалось управление колебаниями связанных пластин с помощью актуатора. Для гашения колебаний использовались несколько управляющих сил и датчик рассогласования. Из результатов численных и экспериментальных исследований, проведенных в [7, 8], следует, что использование нескольких независимых управляющих сил является более эффективным по сравнению с использованием зависимых управляющих сил. В работе [9] аналитически и численно исследовались способы гашения вибраций в консольной балке и консольно закрепленной пластине с использованием в качестве актуаторов пьезоэлектрических вставок и датчиков деформаций. В работе [10] с помощью метода наименьших квадратов изучались способы управления колебаниями прямоугольной составной пластины. В [11, 12] с использованием алгоритма упреждения с отрицательной скоростью обратной связи исследовались способы управления ультразвуковыми колебаниями балок и слоистых пластин. Установлено, что при использовании одновременно актуатора и сенсорного датчика можно существенно уменьшить флаттер балки и слоистой пластины. В [13] при исследовании колебаний цилиндрических авиационных конструкций с помощью алгоритмов упреждения использовались пьезоэлектрические керамические вставки. Изучено влияние положения актуаторов и их размеров на устойчивость работы контролирующей системы.

В данной работе с помощью метода бегущих волн исследуется мощность волнового потока в пластине L-образной формы с закрепленным на ней пьезоэлектрическим актуатором. Торцы пластины считаются заземленными. Для нахождения оптимального управляющего момента актуатора используется метод наименьших квадратов. Исследуется влияние волн, распространяющихся в плоскости пластины, на мощность контролируемого волнового потока при низких и высоких частотах возбуждающих его колебаний.

**1. Постановка задачи.** На рис. 1 показана пластина L-образной формы постоянной толщины с заземленными торцами и пьезоэлектрической вставкой, состоящая из пластины 1 длиной  $L_{x1}$  и пластины 2 длиной  $L_{x2}$ . Обе пластины имеют одну и ту же толщину и изготовлены из одного и того же материала. На пластине 2 расположен датчик рассогласования. Пьезоэлектрический актуатор толщиной  $h_p$  симметрично закреплен на верхней и нижней поверхностях пластины 1 в интервале  $x_{s1} \leq x_1 \leq x_{s2}$ . На рис. 1 показана также система координат.

В данной работе используется теория пластин Кирхгофа.

Внешняя сосредоточенная возбуждающая сила действует на пластину 1 в точке  $(x_0, y_0)$ . Поперечное смещение, вызванное этой силой, удовлетворяет уравнению [1]

$$\nabla^4 w - k_p^4 w = -(F/D)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (1)$$

поперечное смещение, вызванное линейным моментом, параллельным оси  $y$  и расположенным в точке  $x$ , — уравнению

$$\nabla^4 w - k_p^4 w = -(M/D)\delta'(x - x_0). \quad (2)$$

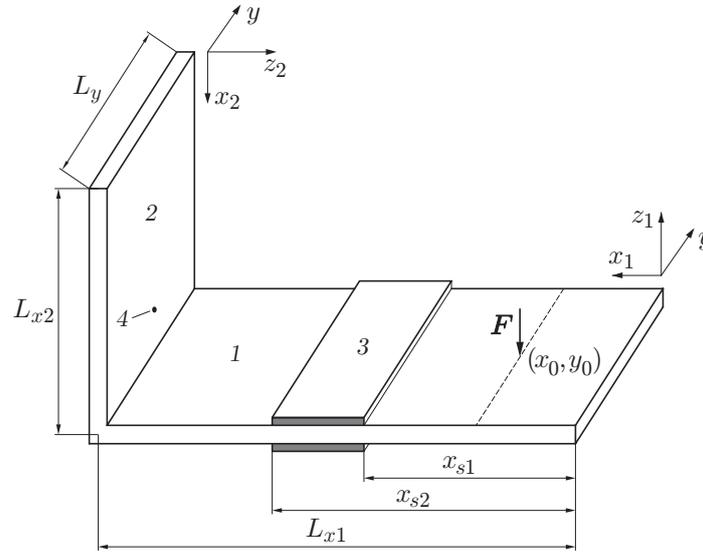


Рис. 1. Геометрия пластины L-образной формы и система координат:  
1 — пластина 1, 2 — пластина 2, 3 — пьезоэлектрический актуатор, 4 — датчик рас-  
согласования

В (1), (2)  $\nabla^4 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2$ ;  $\delta$  — функция Дирака;  $\delta'$  — производная функции Дирака;  $k_p = (\rho h \omega^2 / D)^{1/4}$  и  $D = \tilde{E} h^3 / [12(1 - \nu^2)]$  — изгибное волновое число и изгибная жесткость соответственно;  $\rho$ ,  $h$  — плотность и толщина пластин соответственно;  $\omega$  — круговая частота внешней силы;  $\tilde{E} = E(1 + j\eta)$  — комплексный модуль Юнга;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $\eta$  — коэффициент демпфирования материала;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $F$  — сосредоточенная внешняя сила, приложенная в точке  $(x_0, y_0)$ ;  $M$  — внешний момент, приложенный по линии  $x = x_0$ .

Поперечное смещение можно представить в виде разложения по бегущим волнам [1]:

$$w(x, y, t) = \sum_n (A_{1n} e^{jk_x x} + A_{2n} e^{k_n x} + A_{3n} e^{-jk_x x} + A_{4n} e^{-k_n x}) \varphi_n(y) e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Здесь  $A_{1n}$ ,  $A_{2n}$ ,  $A_{3n}$ ,  $A_{4n}$  — амплитуды волн;  $k_x = \{[(\alpha_n^2 - 1)k_n^4 + k_p^4]^{1/2} + \alpha_n k_n^2\}^{1/2}$  и  $k_{nx} = \{[(\alpha_n^2 - 1)k_n^4 + k_p^4]^{1/2} - \alpha_n k_n^2\}^{1/2}$  — волновые числа возрастающих и затухающих в направлении  $x$  волн соответственно [1]; константы  $\alpha_n$ ,  $k_n$  определены ниже. Для упрощения анализа зависящий от времени гармонический множитель  $e^{i\omega t}$  далее опускается.

Функции формы для защемленной пластины  $\varphi_n(y)$  совпадают с функциями формы для защемленной на обоих торцах балки [14]:

$$\varphi_n(y) = \text{sh } k_n y - \sin k_n y - \beta_n (\text{ch } k_n y - \cos k_n y).$$

Здесь  $\beta_n = (\text{sh } k_n L_y - \sin k_n L_y) / (\text{ch } k_n L_y - \cos k_n L_y)$ ;  $k_n$  — волновое число изгибных мод:

$$k_n = [\pi / (2L_y)] (3, 5, 7, \dots, 2n + 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$L_y$  — длина пластины в направлении оси  $y$ .

Константы  $\alpha_n$  определяются следующим образом:  $\alpha_n = \Lambda_n^* / \Lambda_n$ , где [1, 14]

$$\Lambda_n^* = \int_0^{L_y} \varphi_n^2(y) dy, \quad \Lambda_n = \int_0^{L_y} \varphi_n^*(y) \varphi_n(y) dy.$$

В плоскостях обеих пластин возникают изгибные продольные и поперечные волны. При низких частотах влияние на поток энергии волн, распространяющихся в плоскости пластин, является незначительным по сравнению с влиянием поперечных волн. Однако при высоких частотах оно становится существенным. Поэтому при исследовании потока волновой энергии эти волны необходимо учитывать [5]. Уравнения для продольных и сдвиговых волн, распространяющихся в плоскости пластины, имеют вид [15]

$$\begin{aligned} B(1 + \gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B\gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \rho\omega^2 u &= 0, \\ B(1 + \gamma) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho\omega^2 v &= 0, \end{aligned}$$

где  $B = E/[2(1 + \nu)]$ ;  $\gamma = (1 + \nu)(1 - \nu)$  [15];  $u, v$  — смещения в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно. Выражения для смещений  $u, v$  записываются в виде разложений [5, 10]

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_n (\lambda_1 B_{1n} e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 B_{2n} e^{\lambda_2 x} + k_y B_{3n} e^{\lambda_3 x} + k_y B_{4n} e^{\lambda_4 x}) \cos(k_y y), \\ v(x, y) &= \sum_n (k_y B_{1n} e^{\lambda_1 x} + k_y B_{2n} e^{\lambda_2 x} + \lambda_3 B_{3n} e^{\lambda_3 x} + \lambda_4 B_{4n} e^{\lambda_4 x}) \sin(k_y y), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $k_y = n\pi/L_y$ ;  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k_y^2 - k_L^2}$  и  $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{k_y^2 - k_s^2}$  — собственные числа задачи о колебаниях пластины в ее плоскости;  $k_L = \omega\sqrt{\rho(1 - \nu^2)/E}$  и  $k_s = \omega\sqrt{2\rho(1 + \nu)/E}$  — волновые числа продольных и сдвиговых волн соответственно. Соотношения (3), (4) являются общим решением задачи о колебаниях пластины.

**2. Колебания пластины под действием сосредоточенной силы.** Для пластины 1 выражения для поперечного смещения и смещений в ее плоскости записываются в виде [5]

$$\begin{aligned} w_{1I}(x_1, y) &= \sum_n (A_{1n} e^{jk_x x_1} + A_{2n} e^{knx_1} + A_{3n} e^{-jk_x x_1} + A_{4n} e^{-knx_1}) \varphi_n(y), \quad 0 \leq x_1 \leq x_0, \\ w_{1II}(x_1, y) &= \sum_n (A_{5n} e^{jk_x x_1} + A_{6n} e^{knx_1} + A_{7n} e^{-jk_x x_1} + A_{8n} e^{-knx_1}) \varphi_n(y), \quad x_0 \leq x_1 \leq L_{x1}, \\ u_1(x_1, y) &= \sum_n (\lambda_1 B_{1n} e^{\lambda_1 x_1} + \lambda_2 B_{2n} e^{\lambda_2 x_1} + k_y B_{3n} e^{\lambda_3 x_1} + k_y B_{4n} e^{\lambda_4 x_1}) \cos(k_y y), \\ v_1(x_1, y) &= \sum_n (k_y B_{1n} e^{\lambda_1 x_1} + k_y B_{2n} e^{\lambda_2 x_1} + \lambda_3 B_{3n} e^{\lambda_3 x_1} + \lambda_4 B_{4n} e^{\lambda_4 x_1}) \sin(k_y y), \end{aligned}$$

для пластины 2 — в виде [5]

$$\begin{aligned} w_2(x_2, y) &= \sum_n (A_{9n} e^{jk_x x_2} + A_{10n} e^{knx_2} + A_{11n} e^{-jk_x x_2} + A_{12n} e^{-knx_2}) \varphi_n(y), \quad 0 \leq x_1 \leq L_{x2}, \\ u_2(x_2, y) &= \sum_n (\lambda_1 B_{5n} e^{\lambda_1 x_2} + \lambda_2 B_{6n} e^{\lambda_2 x_2} + k_y B_{7n} e^{\lambda_3 x_2} + k_y B_{8n} e^{\lambda_4 x_2}) \cos(k_y, y), \\ v_2(x_2, y) &= \sum_n (k_y B_{5n} e^{\lambda_1 x_2} + k_y B_{6n} e^{\lambda_2 x_2} + \lambda_3 B_{7n} e^{\lambda_3 x_2} + \lambda_4 B_{8n} e^{\lambda_4 x_2}) \sin(k_y, y), \end{aligned}$$

где  $A_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) и  $B_{jn}$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) — неизвестные амплитуды колебаний, для определения которых используются восемь краевых условий заземления торцов пластины

L-образной формы при  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} w_1|_{x_1=0} &= \frac{\partial w_1}{\partial x}|_{x_1=0} = u_1|_{x_1=0} = v_1|_{x_1=0} = 0, \\ w_2|_{x_2=0} &= \frac{\partial w_2}{\partial x}|_{x_2=0} = u_2|_{x_2=0} = v_2|_{x_2=0} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

четыре условия непрерывности решения в точке приложения сосредоточенной силы

$$\begin{aligned} w_{1I}|_{x_1=x_0} &= w_{1II}|_{x_1=x_0}, \quad \frac{\partial w_{1I}}{\partial x}|_{x_1=x_0} = \frac{\partial w_{1II}}{\partial x}|_{x_1=x_0}, \quad w_{1I}M_{xx1I}|_{x_1=x_0} = M_{xx1II}|_{x_1=x_0}, \\ Q_{x1I}|_{x_1=x_0} - Q_{x1II}|_{x_1=x_0} &= F\delta(y - y_0) \end{aligned}$$

и восемь условий сопряжения двух пластин [5, 10]

$$\begin{aligned} w_1|_{x_1=L_{x1}} &= -u_2|_{x_2=L_{x2}}, \quad u_1|_{x_1=L_{x1}} = -w_2|_{x_2=L_{x2}}, \quad v_1|_{x_1=L_{x1}} = v_2|_{x_2=L_{x2}}, \\ \frac{\partial w_1}{\partial x}|_{x_1=L_{x1}} &= \frac{\partial w_2}{\partial x}|_{x_2=L_{x2}}, \\ M_{xx1}|_{x_1=L_{x1}} &= M_{xx2}|_{x_2=L_{x2}}, \quad N_{xy1}|_{x_1=L_{x1}} = -N_{xy2}|_{x_2=L_{x2}}, \\ Q_{x1}|_{x_1=L_{x1}} + \frac{\partial M_{xy1}}{\partial x}|_{x_1=L_{x1}} &= N_{xx2}|_{x_2=L_{x2}}, \quad Q_{x2}|_{x_2=L_{x2}} + \frac{\partial M_{xy2}}{\partial x}|_{x_2=L_{x2}} = N_{xx1}|_{x_1=L_{x1}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $M_{xx}$ ,  $N_{xx}$ ,  $N_{xy}$ ,  $Q_x$ ,  $M_{xy}$  — изгибающий момент, продольная сила, сдвиговая сила, перерезывающая сила и крутящий момент соответственно [5, 10]:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad N_{xx} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right), \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения неизвестных коэффициентов разложений из условий (6) получаем систему алгебраических уравнений

$$[c]\{X\} = \{F\},$$

где  $[c]$  — матрица размером  $20 \times 20$ ;  $\{X\}$ ,  $\{F\}$  — векторы, компонентами которых являются неизвестные амплитуды смещений и действующие на пластину силы соответственно:

$$\{X\} = \{A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{12n}, B_{1n}, \dots, B_{8n}\}^T, \quad \{F\} = \{R_1, R_2, \dots, R_g, \dots, R_{20}\}^T,$$

$$R_{12} = F_0\varphi(y_0)/D; \quad R_g = 0 \quad (g \neq 12).$$

**3. Возбуждение пьезоэлектрического актуатора.** Многие авиационные конструкции представляют собой пластины или цилиндрические оболочки. Шумы и колебания в таких конструкциях эффективно гасятся с помощью пьезоэлектрических актуаторов [16, 17]. Наличие на пластине актуатора (см. рис. 1) приводит к возникновению двух противоположных моментов на линиях  $x_1 = x_{s1}$  и  $x_2 = x_{s2}$  [18]:

$$x = x_{s1}: \quad M_1 = b_p M_x, \quad x = x_{s2}: \quad M_2 = -b_p M_x$$

( $b_p = L_y$  — ширина пьезоэлектрического актуатора;  $M_x$  — управляющий момент). Толщина слоя, скрепляющего актуатор с пластиной, мала по сравнению с размерами актуатора,

поэтому его влиянием на колебания пластины пренебрегается. Выражение для управляющего изгибающего момента записывается в виде [18]

$$M_x = \frac{E_p h^3 (h + h_p) d_{31} V}{4[h^3/4 + (E_p/E)h_p(3h^2/2 + 2h_p^2 + 3hh_p)],}$$

где  $V = V_p e^{j\omega t}$  — внешнее напряжение в пьезоэлектрическом актуаторе;  $E_p$  — модуль Юнга материала актуатора;  $h_p$  — толщина актуатора;  $d_{31}$  — константа, зависящая от характеристик материала актуатора.

Общее решение для поперечного смещения и смещений в плоскости пластины, обусловленных действием моментов  $M_1$  и  $M_2$ , определяется формулами (3), (4). Неизвестные амплитуды смещений вычисляются из решения системы уравнений

$$[c_{M_1}]\{X_{M_1}\} = \{F_{M_1}\}, \quad [c_{M_2}]\{X_{M_2}\} = \{F_{M_2}\},$$

где  $\{X_{M_t}\} = \{A_{1n}^{st}, A_{2n}^{st}, \dots, A_{12n}^{st}, B_{1n}^{st}, B_{2n}^{st}, \dots, B_{8n}^{st}\}$ ,  $\{F_{M_t}\} = \{C_1^t, C_2^t, \dots, C_j^t, \dots, C_{20}^t\}$ ,

$t = 1, 2$ ;  $C_{11}^t = \frac{M_t}{D} \int_0^{L_y} \varphi(y) dy$ ;  $C_j^t = 0$  ( $j \neq 11$ ) — векторы, компонентами которых являются

неизвестные амплитуды колебаний и силы, обусловленные действием актуатора, соответственно. Условия непрерывности решения на линиях сопряжения актуатора с пластиной имеют вид

$$\begin{aligned} w_{1I}|_{x_1=x_{st}} = w_{1II}|_{x_1=x_{st}}, \quad \frac{\partial w_{1I}}{\partial x}|_{x_1=x_{st}} = \frac{\partial w_{1II}}{\partial x}|_{x_1=x_{st}}, \\ M_{xx1I}|_{x_1=x_0} - M_{xx1II}|_{x_1=x_0} = M_t, \quad Q_{x1I}|_{x_1=x_{st}} = Q_{x1II}|_{x_1=x_{st}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\begin{aligned} A_{kn}^s = A_{kn}^{s1} + A_{kn}^{s2}, \quad A_{(k+4)n}^s = A_{(k+4)n}^{s1} + A_{kn}^{s2}, \\ A_{(k+8)n}^s = A_{(k+4)n}^{s1} + A_{(k+4)n}^{s2}, \quad A_{(k+12)n}^s = A_{(k+12)n}^{s1} + A_{(k+12)n}^{s2}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

При определении амплитуд смещений, обусловленных наличием актуатора, используются уравнения (5), (6), (8).

**4. Активное управление процессом колебаний.** Минимизация потока энергии, переносимой колебаниями по конструкции, позволяет существенно уменьшить интенсивность колебаний [19]. Величина энергии в зоне расположения датчика рассогласования является параметром упреждения, который используется в качестве функционала цели при решении задачи управления с использованием метода наименьших квадратов. Управляющие моменты, создаваемые пьезоэлектрической вставкой, применяются для минимизации энергии внешних сил и энергии актуатора. При этом в силу малой толщины слоя, скрепляющего актуатор с пластиной, его влиянием на колебания пренебрегается [18]. Выражение для мощности колебаний на единицу ширины пластины L-образной формы, обусловленных наличием поперечных колебаний и колебаний в плоскости пластины, записывается в следующем виде [5]:

$$P_x(t) = -\left(\dot{w}Q_x - \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} M_{xx} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} M_{xy} + \dot{w}N_{xx} + \dot{w}N_{xy}\right).$$

Осредненная по времени мощность потока энергии поперечных колебаний и колебаний в плоскости пластины, проходящего через заданное сечение с координатой  $x$ , определяется следующим образом [5]:

$$P_x = -\frac{1}{2} \int_0^{L_y} \operatorname{Re} \left\{ (j\omega w)^* Q_x - \left[ j\omega \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]^* M_{xx} - \left[ j\omega \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]^* M_{xy} + \right. \\ \left. + (j\omega u)^* N_{xx} + (j\omega v)^* N_{xy} \right\} dy. \quad (9)$$

Выражения для изгибных колебаний и колебаний в плоскости пластины L-образной формы, возникающих под действием внешней сосредоточенной силы и моментов, создаваемых актуатором, записываются в виде [10]

$$w(x, y) = w_{xf}(x, y)F_0 + w_{xm}(x, y)M_x, \quad u(x, y) = u_{xf}(x, y)F_0 + u_{xm}(x, y)M_x, \\ v(x, y) = v_{xf}(x, y)F_0 + v_{xm}(x, y)M_x. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7), получаем выражения для моментов и усилий

$$M_{xx} = -D \left[ \left( \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial y^2} \right) F_0 + \left( \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial y^2} \right) M_x \right], \\ M_{xy} = -D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial x \partial y} F_0 + \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial x \partial y} M_x \right), \\ Q_x = -D \left[ \left( \frac{\partial^3 w_{xf}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_{xf}}{\partial x \partial y^2} \right) F_0 + \left( \frac{\partial^3 w_{xm}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_{xm}}{\partial x \partial y^2} \right) M_x \right], \\ N_{xx} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[ \left( \frac{\partial u_{xf}}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_{xf}}{\partial y} \right) F_0 + \left( \frac{\partial u_{xm}}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_{xm}}{\partial y} \right) M_x \right], \\ N_{xy} = \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \left[ \left( \frac{\partial u_{xf}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xf}}{\partial x} \right) F_0 + \left( \frac{\partial u_{xm}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xm}}{\partial x} \right) M_x \right]. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), находим

$$P_x = -\frac{1}{2} \int_0^{L_y} \operatorname{Re} (AF_0^* F_0 + BF_0^* M_x + CF_0 M_x^* + HM_x^* M_x) dy, \quad (12)$$

где

$$A = j\omega \left\{ D \left[ w_{xf}^* \left( \frac{\partial^3 w_{xf}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_{xf}}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial w_{xf}^*}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial y^2} \right) - (1 - \nu) \frac{\partial w_{xf}^*}{\partial y} \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial x \partial y} \right] - \right. \\ \left. - \frac{Eh}{1 - \nu^2} u_{xf}^* \left( \frac{\partial u_{xf}}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_{xf}}{\partial y} \right) - \frac{Eh}{2(1 + \nu)} v_{xf}^* \left( \frac{\partial u_{xf}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xf}}{\partial x} \right) \right\}, \\ B = j\omega \left\{ D \left[ w_{xm}^* \left( \frac{\partial^3 w_{xm}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_{xm}}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial w_{xm}^*}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial y^2} \right) - (1 - \nu) \frac{\partial w_{xm}^*}{\partial y} \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial x \partial y} \right] - \right. \\ \left. - \frac{Eh}{1 - \nu^2} u_{xm}^* \left( \frac{\partial u_{xm}}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_{xm}}{\partial y} \right) - \frac{Eh}{2(1 + \nu)} v_{xm}^* \left( \frac{\partial u_{xm}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xm}}{\partial x} \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
C &= j\omega \left\{ D \left[ w_{xm}^* \left( \frac{\partial^3 w_{xf}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_{xf}}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial w_{xm}^*}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial y^2} \right) - (1 - \nu) \frac{\partial w_{xm}^*}{\partial y} \frac{\partial^2 w_{xf}}{\partial x \partial y} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{Eh}{1 - \nu^2} u_{xm}^* \left( \frac{\partial u_{xf}}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_{xf}}{\partial y} \right) - \frac{Eh}{2(1 + \nu)} v_{xm}^* \left( \frac{\partial u_{xf}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xf}}{\partial x} \right) \right\}, \\
H &= j\omega \left\{ D \left[ w_{xm}^* \left( \frac{\partial^3 w_{xm}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_{xm}}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial w_{xm}^*}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial y^2} \right) - (1 - \nu) \frac{\partial w_{xm}^*}{\partial y} \frac{\partial^2 w_{xm}}{\partial x \partial y} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{Eh}{1 - \nu^2} u_{xm}^* \left( \frac{\partial u_{xm}}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_{xm}}{\partial y} \right) - \frac{Eh}{2(1 + \nu)} v_{xm}^* \left( \frac{\partial u_{xm}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xm}}{\partial x} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Приравняв к нулю действительную и мнимую части мощности энергии колебаний, получаем оптимальное значение для управляющего момента актуатора

$$M_x^{opt} = - \left( \int_0^{L_y} B^* dy + \int_0^{L_y} C dy \right) / \left( 2 \int_0^{L_y} \operatorname{Re}(H) dy \right). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), находим минимальное значение мощности энергии колебаний в сечении с координатой  $x$ .

**5. Результаты вычислений и их обсуждение.** В расчетах использовались следующие константы материала пьезоэлектрической вставки:  $E_p = 69 \cdot 10^9$  Па,  $\mu_p = 0,29$ ,  $\rho_p = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $d_{31} = 11 \cdot 10^{11}$ , константа демпфирования равна 0,001. Характеристики материала пластины L-образной формы имели следующие значения:  $E_s = 200 \cdot 10^9$  Па,  $\mu_s = 0,3$ ,  $\rho_s = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Коэффициент демпфирования конструкции вводится через комплексный модуль Юнга  $E(1 + j\eta)$  ( $\eta = 0,001$  — коэффициент механических потерь материала). Ширина пластины  $L_y = 0,8$  м, толщина пластины  $h = 0,005$  м, длины пластин 1 и 2 равны  $L_{x1} = 1,5$  м,  $L_{x2} = 1,2$  м. Длина пьезоэлектрической вставки  $l_p = 0,3$  м, ширина  $b_p = 0,6$  м, толщина  $h_p = 0,0008$  м. Вставка расположена в интервале  $1,0 \text{ м} \leq x_s \leq 1,3 \text{ м}$ . Возбуждающая сила  $F_0$  находится на пластине 1 в точке с координатами  $x_0 = 0,4$  м,  $y_0 = 0,4$  м, амплитуда силы равна  $F_0 = 1$  Н. Датчик рассогласования расположен на пластине 2 в точке с координатами  $x_e = 0,1$  м,  $y_e = 0,4$  м.

Для оценки эффективности метода бегущих волн проведены расчеты с помощью этого метода и метода конечных элементов (МКЭ) с использованием пакета MSC/NASTRAN. На рис. 2 показана зависимость поперечного смещения от частоты колебаний, возбуждаемых сосредоточенной силой при отсутствии управления потоком. Результаты приведены для пластины L-образной формы в случае отсутствия на ней пьезоэлектрической вставки и датчика рассогласования. На рис. 2 представлены результаты двух расчетов с помощью МКЭ. В одном расчете для пластины 2 использовалось 2400 конечных элементов, во в другом расчете — 864 конечных элемента. При низких частотах расчетные зависимости, полученные с использованием МКЭ и метода бегущих волн, практически совпадают. На резонансных частотах, равных 119, 137, 175 и 190 Гц, собственные частоты, полученные с использованием МКЭ и метода бегущих волн, различаются, причем с увеличением возбуждающей силы различие возрастает. С увеличением числа конечных элементов собственные частоты, полученные с помощью МКЭ, сходятся к собственным частотам, полученным методом бегущих волн. Это различие обусловлено тем, что при использовании МКЭ увеличивается ошибка аппроксимации на модах высокого порядка. Кроме того, на высоких частотах конструкция должна покрываться мелкой конечно-элементной сеткой, что приводит к увеличению степеней свободы расчетной модели и тем самым к уменьшению возможностей вычислительной машины [5]. Таким образом, при решении динамических задач в случае средних и высоких частот метод бегущих волн является более предпочтительным по сравнению с МКЭ.

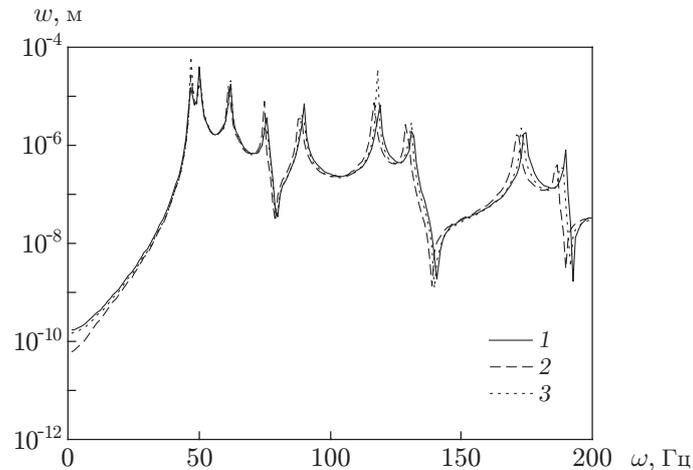


Рис. 2. Зависимость поперечного смещения от частоты в точке с координатами  $x_2 = 0,6$  м,  $y_2 = 0,4$  м, расположенной на пластине 2:  
 1 — расчет с использованием волнового метода, 2, 3 — расчет с использованием МКЭ (2 — 864 элемента, 3 — 2400 элементов)

На рис. 3,а представлена зависимость мощности волнового потока в пластине 2 от частоты при низких частотах колебаний возбуждающей силы как при наличии пьезоэлектрической вставки, так и в ее отсутствие. Из приведенных результатов следует, что при низких частотах возбуждающей силы мощность волнового потока в пластине 2 уменьшается при оптимальном значении управляющего момента. Незначительное уменьшение управляющего момента по сравнению с его оптимальным значением практически не оказывает влияния на величину мощности волнового потока в пластине 2. Незначительное уменьшение управляющего момента приводит к изменению только минимальных значений мощности волнового потока.

На рис. 3,б представлена зависимость мощности волнового потока в пластине 2 от частоты при высоких частотах колебаний возбуждающей силы как при наличии пьезоэлектрической вставки, так и в ее отсутствие. Из приведенных результатов следует, что при высоких частотах возбуждающей силы мощность волнового потока в пластине 2 также уменьшается при оптимальном значении управляющего момента. Незначительное уменьшение управляющего момента по сравнению с его оптимальным значением практически не оказывает влияния на величину мощности волнового потока в пластине 2.

На рис. 4 представлены зависимости мощности волнового потока в пластине 2 от частоты при низких и высоких частотах колебаний возбуждающей силы при наличии пьезоэлектрической вставки как с учетом колебаний в плоскости пластины, так и без их учета. Из результатов, приведенных на рис. 4, следует, что при расчете эффективности уменьшения мощности волнового потока с помощью пьезоэлектрического актуатора необходимо учитывать колебания в плоскости пластины.

**Заключение.** Изучена задача управления мощностью волнового потока в пластине L-образной формы с использованием пьезоэлектрической вставки в качестве актуатора. При исследовании вибраций пластины L-образной формы применялись метод бегущих волн и метод разложения решения по собственным функциям. Для вычисления оптимальных значений управляющих моментов актуатора использован алгоритм упреждения на основе метода наименьших квадратов. Исследовано влияние волн, распространяющихся в плоскости пластины, на работу актуатора. Получены следующие результаты.

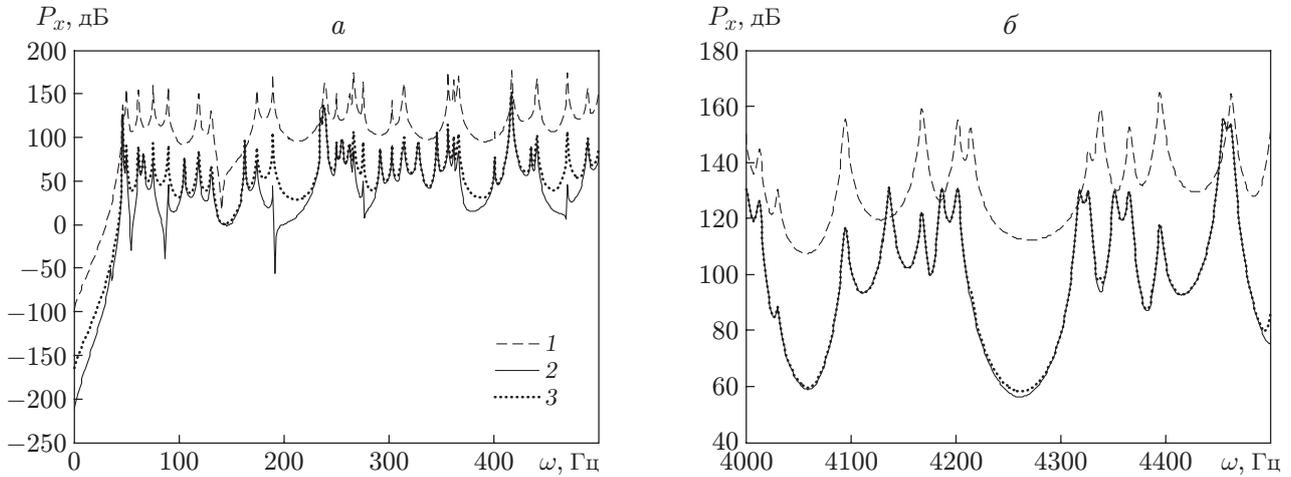


Рис. 3. Зависимость мощности волнового потока в пластине 2 от частоты (отсчетная мощность равна  $10^{-12}$  Вт):

$a$  —  $0 \leq \omega \leq 500$  Гц,  $b$  —  $4000 \text{ Гц} \leq \omega \leq 4500$  Гц; 1 — результаты, полученные в отсутствие управляющего момента, 2 — результаты, полученные при оптимальном управляющем моменте, 3 — результаты, полученные при управляющем моменте, составляющем 98 % оптимального управляющего момента

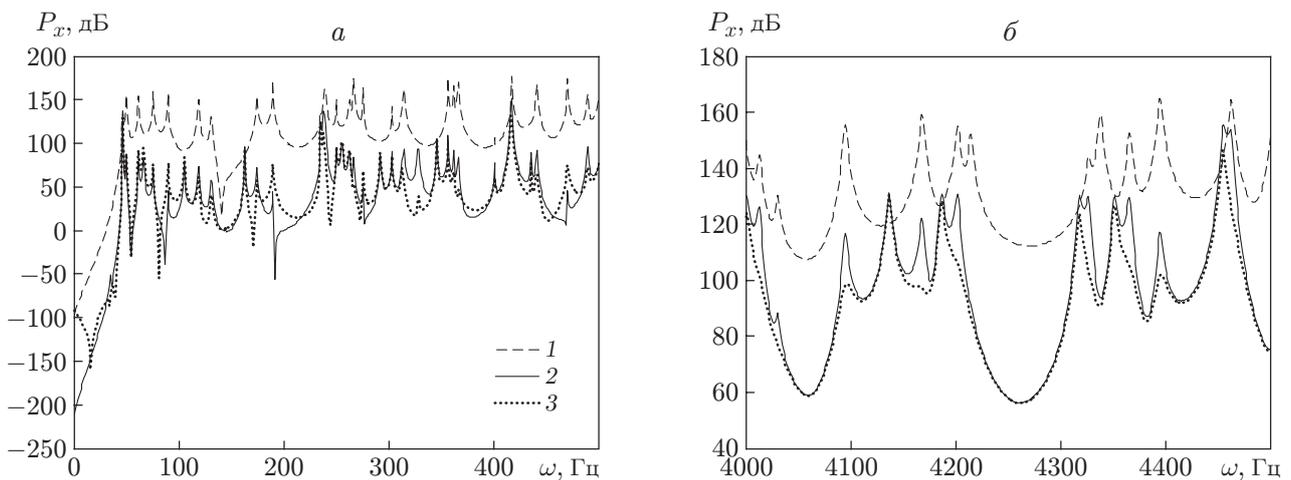


Рис. 4. Зависимость мощности волнового потока в пластине 2 от частоты (отсчетная мощность равна  $10^{-12}$  Вт):

$a$  —  $0 \leq \omega \leq 500$  Гц,  $b$  —  $4000 \text{ Гц} \leq \omega \leq 4500$  Гц; 1 — результаты, полученные в отсутствие управляющего момента, 2 — результаты, полученные с учетом колебаний в плоскости пластины, 3 — результаты, полученные без учета колебаний в плоскости пластины

При малых частотах возбуждающей силы результаты, полученные с помощью метода конечных элементов и метода бегущих волн, совпадают. При высоких частотах следует использовать метод бегущих волн.

Мощность волнового потока в пластине 2 можно существенно уменьшить с помощью пьезоэлектрического актуатора. Наличие актуатора с управляющими моментами, незначительно отличающимися от оптимальных значений, практически не влияет на эффективность подавления вибраций.

Волны, распространяющиеся в плоскости пластины, влияют на мощность волнового потока. Максимальные значения мощности волнового потока на резонансных частотах без учета волн, распространяющихся в плоскости пластины, меньше, чем в случае их учета. В диапазоне высоких частот это различие увеличивается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Lin T. R.** An analytical and experimental study of the vibration response of a clamped ribbed plate // *J. Sound Vibrat.* 2012. V. 331. P. 902–913.
2. **Arreola-Lucas A., Franco-Villafañe J. A., Báez G., Méndez-Sanchez R. A.** In-plane vibrations of a rectangular plate: Plane wave expansion modelling and experiment // *J. Sound Vibrat.* 2015. V. 342. P. 168–176.
3. **Kessissoglou N. J.** Active attenuation of the wave transmission through an L-plate junction // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2001. V. 110, N 1. P. 267–277.
4. **Masson P., Audrain P., Berry A., et al.** A novel implementation of active structural flow control // *Smart Structures Materials.* 2001. V. 4327. P. 560–569.
5. **Kessissoglou N. J.** Power transmission in L-shape plates including flexural and in-plane vibration // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2004. V. 115. P. 1157–1169.
6. **Shevtsov S., Soloviev A., Bragin S.** Structural optimization of distributed actuation system for improve an efficiency of smart composite spar vibration damping // *Proc. of the 4th Intern. conf. on noise and vibration engineering — ISMA 2008, Leuven (Belgium), Sept. 16–19, 2008.* Leuven: S. n.: 2008. P. 360–374.
7. **Keir J., Kessissoglou N. J., Norwood C. J.** Active control of connected plates using signal and multiple actuators and error sensors // *J. Sound Vibrat.* 2005. V. 281. P. 73–97.
8. **Keir J., Kessissoglou N. J., Norwood C. J.** An analytical investigation of single actuator and error sensor control in connected plates // *J. Sound Vibrat.* 2004. V. 271. P. 635–649.
9. **Qiu Z.-C., Han J. D., Zhang X., et al.** Active vibration control of a flexible beam using a non-collocated acceleration sensor and piezoelectric patch actuator // *J. Sound Vibrat.* 2009. V. 326. P. 438–455.
10. **Liu C.-C., Li F.-M., Fang B., et al.** Active control of power flow transmission in finite connected plate // *J. Sound Vibrat.* 2010. V. 329. P. 4124–4135.
11. **Song Z.-G., Li F.-M.** Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic composite laminated plate // *Composite Structures.* 2012. V. 94, N 2. P. 702–713.
12. **Song Z.-G., Li F.-M.** Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic beams using the piezoelectric actuator/sensor pairs // *Smart Materials Structures.* 2011. V. 20. P. 1–12.
13. **Shevtsov S., Flek M., Acopyan V., Axenov V.** On the active vibration control and stability of the tubular structures by piezoelectric patch-like actuators // *Math. Engng Sci. Aerospace.* 2011. V. 2, N 2. P. 145–157.
14. **Rao S. S.** *Mechanical vibrations.* Upper Saddle River itc.: Prentice Hall, 2004.

15. **Bercin A. N., Langley R. S.** Application of the dynamic stiffness technique to the in-plane vibrations of plate structures // *Comput. Structures*. 1996. V. 59. P. 869–875.
16. **Grewal A., Zimcik D. J., Hurtubise L., Leigh B.** Active cabin noise and vibration control for turboprop aircraft using multiple piezoelectric actuators // *J. Intelligent Material Systems Structures*. 2000. V. 11. P. 438–447.
17. **Lee J.-C., Chen J.-C.** Active control of sound radiation from rectangular plates using multiple piezoelectric actuators // *Appl. Acoust.* 1999. V. 57. P. 327–343.
18. **Audrain P.** Investigation of active structural intensity control in finite beams theory and experiment // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2000. V. 108. P. 612–623.
19. **Zhao Y., Wang Y. Y., Ma W. L.** Active control of power flow transmission in complex space truss structures based on the advanced Timoshenko theory // *J. Vibrot. Control*. 2013. V. 21, N 8. P. 1594–1607.

*Поступила в редакцию 9/III 2016 г.,  
в окончательном варианте — 15/VIII 2016 г.*

---