с граничными условиями

$$u(l) = -V,\ u(-l) = V,\ v(l) = v(-l) = 0,$$

где V — скорость плиты вдоль оси $0x_1$; $2l$ — расстояние между плитами.

Автор выражает благодарность Б. Д. Аннину за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 12 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., Мир, 1964.
2. **Ольшак В., Мруз З., Пежина П.** Современное состояние теории пластичности. М., Мир, 1964.
3. **Аннин Б. Д.** Одно точное решение осесимметричной задачи идеальной пластичности.— ПМТФ, 1973, № 2.
4. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М., Наука, 1966.
5. **Липпман Г.** Теория главных траекторий при осесимметричной пластической деформации.— Сб. пер. Механика, 1963, № 3.
6. **Шилд Р. Т.** Пластическое течение в сходящемся коническом канале.— Сб. пер. Механика, 1965, № 3.
7. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956.
8. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
9. **Hill R.** A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, N 1.
10. **Прагер В.** Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии.— Сб. пер. Механика, 1958, № 3.
11. **Задоян М. А.** Об одном частном решении уравнений идеальной пластичности.— ДАН СССР, 1964, т. 156, № 1.
12. **Ивлев Д. Д.** Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 11.

УДК 539.3

ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА

В. М. Александров, Е. В. Коваленко

(*Москва*)

В данной работе предложен эффективный метод решения плоских контактных задач для неклассических областей [1] при наличии изнашивания. Инерционные силы, возникающие от движения штампа [2, 3], не учитываются.

1. Постановка задачи. Экспериментально установлено [4, 5], что скорость изнашивания — функция касательных усилий и осредненного модуля скорости скольжения, причем для абразивного изнашивания используется, как правило, линейная зависимость

$$w = k_1 V\tau(x,\ t), \tag{1.1}$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала. Отсюда следует, что перемещение штампа в направлении, перпендикулярном поверхности области, вследствие ее изнашивания, имеет вид

$$v_* = k_1 V \int\limits_0^t \tau(x, t)\, dt = \varkappa \int\limits_0^t q(x, t)\, dt \quad (\varkappa = k_1 k_2 V), \tag{1.2}$$

где k_2 — коэффициент трения; $q(x, t)$ — контактное давление. Для нормального перемещения штампа ширины $2a$ вследствие упругого деформирования области имеет место формула [1]

$$v = \frac{1}{\pi\theta} \int\limits_{-a}^{a} q(\xi, t) K\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right) d\xi \quad (|x| \leqslant a); \tag{1.3}$$

$$K(y) = \int\limits_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos uy\, du \quad \left(y = \frac{\xi - x}{\mu}\right), \tag{1.4}$$

где θ — некоторая комбинация упругих постоянных, определяемая конкретными задачами. Считаем, что:

1) функция $L(u)u^{-1}$ непрерывна, вещественна и четна на действительной оси;

2) функция

$$L(u)u^{-1} > 0 \quad (|u| < \infty); \tag{1.5}$$

3) функция

$$L(u) = Au + O(u^2) \ (u \to 0), \quad \frac{L(u)}{u} = C^2 u^{-2p}[1 + O(u^{-s})] \ (u \to \infty), \quad 0{,}25 < p < 1, \tag{1.6}$$

A, C, p, s — постоянные, причем $s > p$ при $p \geqslant 0{,}5$, $s > 1 - p$ при $p < 0{,}5$.

Условие контакта штампа и области, очевидно, имеет вид

$$v + v_* = \gamma(t) + \beta(t)x - f(x) \quad (|x| \leqslant a). \tag{1.7}$$

Здесь $\gamma(t) + \beta(t)x$ — жесткое перемещение штампа под действием приложенных к нему силы $P(t)$ и момента $M(t)$; $f(x)$ — функция, описывающая форму основания штампа.

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.7), получим интегральное уравнение для определения неизвестных контактных напряжений

$$\int\limits_{-a}^{a} q(\xi, t) K\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right) d\xi = \pi\theta[\gamma(t) + \beta(t)x - f(x)] - \pi\varkappa\theta \int\limits_0^t q(x, t)\, dt \quad (|x| \leqslant a); \tag{1.8}$$

$$P(t) = \int\limits_{-a} q(\xi, t)\, d\xi, \quad M(t) = \int\limits_{-a}^{a} \xi q(\xi, t)\, d\xi. \tag{1.9}$$

Переходя в (1.8), (1.9) к безразмерным переменным и обозначениям по формулам

$$\xi' a = \xi, \ x' a = x, \ \lambda = \mu/a, \ t = at'/\pi\varkappa\theta, \ \gamma(t) = a\gamma'(t'), \ \beta(t) = \beta'(t'),$$
$$f(x) = af'(x'), \ q(\xi, t) = \theta\varphi(\xi', t'), \ P(t) = aP'(t'), \ M(t) = a^2 M'(t')$$

(штрихи в дальнейшем будем опускать), получим интегральное уравнение плоской контактной задачи с износом

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi, t) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi [\gamma(t) + \beta(t) x - f(x)] - \int_{0}^{t} \varphi(x, t)\, dt \quad (|x| \leqslant 1); \tag{1.10}$$

$$P(t) = \int_{-1}^{1} \varphi(x, t)\, dx, \quad M(t) = \int_{-1}^{1} x\varphi(x, t)\, dx. \tag{1.11}$$

Здесь и далее предполагаем $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, где величина T достаточно большая, но такая, что $\gamma(t)$ и $\beta(t)$ имеют порядок перемещений в линейной теории упругости.

Заметим, что при $t = 0$ интегральное уравнение (1.10) принимает известный из теории статических контактных задач [1] вид

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi, 0) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi [\gamma(0) + \beta(0) x - f(x)] \quad (|x| \leqslant 1). \tag{1.12}$$

Прежде чем приступить к решению (1.10), установим важные в дальнейшем свойства его ядра.

В работе [6] доказана следующая

Лемма. При $y = (\xi - x)\lambda^{-1} \to 0$ справедливы оценки

$$K(y) = O(|y|^{2p-1}),\ p < 0{,}5;\ K(y) = O(\ln|y|),\ p = 0{,}5;$$
$$K(y) = O(1),\ p > 0{,}5.$$

При $|y| > \varepsilon > 0$ функция $K(y)$ непрерывна и исчезает при $|y| \to \infty$.

С учетом неравенства

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)\right]^2 d\xi dx = N^2 < \infty \quad (N = \text{const}),$$

вытекающего из леммы, следует

Теорема 1. Оператор

$$B\varphi = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \quad (|x| \leqslant 1,\ 0 < \lambda < \infty)$$

действует из $L_2(-1,1)$ в $L_2(-1,1)$ вполне непрерывно.

Здесь $L_2(-1,1)$ — пространство функций, суммируемых на отрезке $[-1,1]$ с квадратом.

Заметим еще, что оператор $B\varphi$ в силу представления (1.4) является самосопряженным. Поэтому по общей теории [7] самосопряженных, вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве он имеет счетное множество нетривиальных четных собственных функций $\varphi_{2k}(x)$ $(k \geqslant 1)$ с характеристическими числами α_{2k} и счетное множество нетривиальных нечетных собственных функций $\varphi_{2k+1}(x)$ $(k \geqslant 1)$ с характеристическими числами α_{2k+1}. При этом все α_j вещественны и $|\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant \ldots \ldots \leqslant |\alpha_n| < \infty$, $\lim\limits_{j\to\infty} |\alpha_j| = \infty$.

Кроме того, с учетом формул (1.4), (1.5) и результатов работы [6] можно легко доказать теорему.

Теорема 2. Оператор $B\varphi$ положительно определен в $L_2(-1,1)$. Из последней следует, что все $\alpha_j > 0$ $(j \geqslant 1)$ и система собственных функций оператора $B\varphi$ полна в $L_2(-1,1)$.

2. Случай линейного изменения во времени жесткого перемещения штампа. Пусть жесткое перемещение штампа изменяется во времени по закону

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t, \ \beta(t) = \beta_0 + \beta_1 t.$$

Наряду с уравнением (1.10) рассмотрим

$$(2.1) \qquad \int_{-1}^{1} [\varphi(\xi, t) - \varphi(\xi, 0)] K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi =$$

$$= \pi [\gamma_1 t + \beta_1 t x] - \int_0^t \varphi(x, t)\, dt \qquad (|x| \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$$

и будем искать его решение в виде

$$(2.2) \qquad \varphi(x, t) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{2k}(t)\varphi_{2k}(x) + c_{2k+1}(t)\varphi_{2k+1}(x)];$$

$$(2.3) \qquad \alpha_{2k} \int_{-1}^{1} \varphi_{2k}(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \varphi_{2k}(x) \qquad (|x| \leqslant 1, \ k \geqslant 1);$$

$$(2.4) \qquad \alpha_{2k+1} \int_{-1}^{1} \varphi_{2k+1}(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \varphi_{2k+1}(x) \qquad (|x| \leqslant 1, \ k \geqslant 1).$$

Подставляя (2.2) в (2.1), полагая

$$(2.5) \qquad \varphi_0(x) = \pi\gamma_1, \ \varphi_1(x) = \pi\beta_1 x$$

и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при собственных функциях оператора $B\varphi$ одинакового номера, получим

$$(2.6) \qquad \alpha_{2k} \int_0^t c_{2k}(\tau)\, d\tau + c_{2k}(t) = c_{2k}(0);$$

$$(2.7) \qquad \alpha_{2k+1} \int_0^t c_{2k+1}(\tau)\, d\tau + c_{2k+1}(t) = c_{2k+1}(0) \qquad (k \geqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Решая (2.6), (2.7), найдем

$$(2.8) \qquad c_{2k}(t) = c_{2k}(0)\, e^{-\alpha_{2k} t}, \quad c_{2k+1}(t) = c_{2k+1}(0)\, e^{-\alpha_{2k+1} t}.$$

Рассмотрим далее четный случай, когда $f(x)$ — четная функция, $\beta(t) \equiv 0$, имея в виду, что для нечетного случая может быть сделано все аналогично.

Будем искать $\varphi_{2k}(x)$ в (2.3) в виде

$$(2.9) \qquad \varphi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(k)} P_{2m}^*(x),$$

$\{P_n^*(x)\}$ — замкнутая в $L_2(-1,1)$ система нормированных полиномов Лежандра [7].

Разлагая функцию $K(y)$ в двойной ряд по указанным полиномам

$$(2.10) \qquad K(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{ij}(\lambda) P_{2i}^*(\xi) P_{2j}^*(x)$$

и используя интеграл [8]

$$\int_0^1 P_{2n}(x)\cos ux\,dx = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\, J_{\frac{1}{2}+2n}(u),$$

представим коэффициенты разложения в (2.10) в форме

$$e_{ij}(\lambda) = (-1)^{i+j}\pi\lambda\sqrt{4i+1}\sqrt{4j+1}\int_0^\infty \frac{L(u)}{u^2} J_{\frac{1}{2}+2i}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{\frac{1}{2}+2j}\left(\frac{u}{\lambda}\right) du.$$

Подставляя (2.9), (2.10) в (2.3), используя свойство ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая коэффициенты правой и левой частей полученного соотношения при многочленах одинакового номера, будем иметь

$$\alpha_{2k}\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(k)} e_{jm}(\lambda) = a_j^{(k)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.11}$$

Опираясь на результаты леммы и теоремы 1, можно показать, что оператор, стоящий в левой части (2.11), действует в пространстве l_2 и является там вполне непрерывным при $\lambda \in (0, \infty)$. Здесь l_2 — полное пространство квадратично-суммируемых последовательностей.

Таким образом, к бесконечной системе (2.11) применима теорема Гильберта [9] о ее разрешимости. Чтобы существовало нетривиальное решение системы, приравняем нулю ее определитель; получим уравнение для нахождения счетного множества характеристических значений α_{2k}. Определив α_{2k}, найдем затем $a_m^{(k)}$, выразив их через $a_0^{(k)}$,

$$a_m^{(k)} = a_0^{(k)} b_m^{(k)} \qquad \left(b_0^{(k)} = 1\right). \tag{2.12}$$

В результате будем иметь

$$\varphi_{2k}(x) = a_0^{(k)}\psi_{2k}(x), \qquad \psi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(k)} P_{2m}^*(x) \qquad (k \geqslant 1). \tag{2.13}$$

Подберем теперь постоянные $a_0^{(k)}$ в (2.12), (2.13) из условия нормировки собственных функций $\varphi_{2k}(x)$ оператора $B\varphi$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} \varphi_{2k}(x)\varphi_{2n}(x)\,dx = a_0^{(k)} a_0^{(n)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(k)} b_m^{(n)} = \delta_{kn} \tag{2.14}$$

$$(k, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(δ_{kn} — символ Кронекера).

После нахождения $a_0^{(k)}$ из системы (2.14) будут определены искомые собственные функции оператора $B\varphi$. Удовлетворим теперь интегральному уравнению (1.12) соответствующим выбором счетного множества постоянных $c_{2k}(0)$ $(k \geqslant 1)$. Предположим, что $f(x) \in L_2(-1,1)$, и разложим ее в ряд Фурье по собственным функциям оператора $B\varphi$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\varphi_{2i}(x). \tag{2.15}$$

Учитывая (2.2), (2.8) и соотношение

$$1 = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_0^{(k)}\varphi_{2k}(x),$$

получим

$$\varphi(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{2}\,\pi\gamma_1 a_0^{(k)}+c_{2k}(0)\right]\varphi_{2k}(x). \tag{2.16}$$

Подставляя (2.15), (2.16) в (1.12), используя свойство ортогональности функций $\varphi_{2k}(x)$ и приравнивая в полученном выражении коэффициенты правой и левой частей при функциях одинакового номера, будем иметь

$$c_{2k}(0)=\pi\sqrt{2}\,a_0^{(k)}(\alpha_{2k}\gamma_0-\gamma_1)-\pi f_k\alpha_{2k}\quad (k\geqslant 1). \tag{2.17}$$

После определения $c_{2k}(0)$ из (2.17) построим формальное решение задачи $\varphi(x,\ t)$ по формуле (2.2). При этом по формуле (1.11) найдем силу, действующую на штамп,

$$P(t)=2\pi\gamma_1+\sum_{k=1}^{\infty}P_k e^{-\alpha_{2k}t}, \tag{2.18}$$

$$P_k=c_{2k}(0)\int_{-1}^{1}\varphi_{2k}(x)\,dx=\sqrt{2}\,a_0^{(k)}c_{2k}(0),$$

откуда

$$P(0)=\pi\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{2k}a_0^{(k)}\left[\sqrt{2}\,a_0^{(k)}\gamma_0-f_k\right],\qquad P(\infty)=2\pi\gamma_1. \tag{2.19}$$

Таким образом, согласно (2.19), величина γ_0 (начальное внедрение штампа) связана с начальной величиной вдавливающей силы, а конечное значение ее зависит лишь от скорости поступательного перемещения штампа γ_1. Точно так $M(\infty)=2\pi/3\beta_1$, т. е. зависит лишь от угловой скорости поворота штампа.

Следуя [10] с учетом формул (2.8), (2.17)—(2.19), можно утверждать, что ряд (2.2) сходится в $L_2(-1,1)$ равномерно по t на $[0,\ T]$ при всех $T>0$ и определяет, следовательно, обобщенное решение поставленной задачи в $L_2(-1,1)\times C(0,\ T)$. Здесь $C(0,\ T)$ — пространство непрерывных на $[0,\ T]$ функций.

Таким образом, обоснована структура решения (2.2) интегрального уравнения (1.10).

3. Случай постоянных во времени усилий, вдавливающих штамп. Пусть $P=M=\mathrm{const}$. Допустим при этом, что жесткое перемещение штампа вследствие изнашивания поверхности области изменяется во времени по закону

$$\gamma(t)=\gamma t+\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k e^{-\alpha_{2k}t},\quad \beta(t)=\beta t+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k e^{-\alpha_{2k+1}t}, \tag{3.1}$$

где α_k, γ, β — постоянные, $\alpha_0=\alpha_1=0$. Задание $\gamma(t)$, $\beta(t)$ в форме (3.1) оправдано тем, что, как показано в п. 2, при достаточно большом t некоторым постоянным значениям P и M соответствует линейный износ.

Согласно п. 2, будем искать решение уравнения (1.10) в виде

$$\varphi(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi_{2k}(x)\,e^{-\alpha_{2k}t}+\varphi_{2k+1}(x)\,e^{-\alpha_{2k+1}t}\right] \tag{3.2}$$

$$(\alpha_i=\mathrm{const},\quad \alpha_0=\alpha_1=0).$$

После подстановки (3.1), (3.2) в (1.10) и приравнивания коэффициентов левой и правой частей при t^0, t^1, $(1-e^{-\alpha_{2k}t})$, $(1-e^{-\alpha_{2k+1}t})$, получим

$$\varphi_0(x)=\pi\gamma,\quad \varphi_1(x)=\pi\beta x; \tag{3.3}$$

$$\alpha_{2k}\int_{-1}^{1}\varphi_{2k}(\xi)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\gamma_k\alpha_{2k}+\varphi_{2k}(x)\qquad(|x|\leqslant 1,\ k\geqslant 1);\tag{3.4}$$

$$\alpha_{2k+1}\int_{-1}^{1}\varphi_{2k+1}(\xi)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\beta_k\alpha_{2k+1}x+\varphi_{2k+1}(x)\tag{3.5}$$

$$(|x|\leqslant 1,\ k\geqslant 1).$$

Из (3.4), (3.5) видно, что нужно найти решение интегрального уравнения Фредгольма (в силу леммы) второго рода вида

$$(E-\alpha B)\varphi+\pi\alpha g(x)=0,\tag{3.6}$$

где оператор $B\varphi$ дается формулой (2.7), а $g(x)=\gamma$ или $g(x)=\beta x$.

Отметим, что в силу свойств оператора $B\varphi$, указанных в п. 2, уравнение (3.6) почти при всех α однозначно разрешимо в $L_2(-1,1)$. При этом $\lambda\in(0,\ \infty)$.

Далее будем рассматривать только четный случай, имея в виду, что для нечетного случая все делается аналогично. Заметим, что

$$P=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi,t)\,d\xi=\sum_{k=0}^{\infty}P_k e^{-\alpha_{2k}t};\tag{3.7}$$

$$P_0=P=\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)\,d\xi=2\pi\gamma,\quad P_k=\int_{-1}^{1}\varphi_{2k}(\xi)\,d\xi=0\qquad(k\geqslant 1).\tag{3.8}$$

Ищем решение уравнения (3.4) в форме

$$\varphi_{2k}(x)=\pi\sqrt{2}\,\gamma_k\psi_{2k}(x),\quad \psi_{2k}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{(k)}P_{2m}^{*}(x).\tag{3.9}$$

Подставляя (2.9), (3.9) в (3.4), используя условие ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты правой и левой частей при многочленах одинакового номера, получим

$$\alpha_{2k}\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{(k)}e_{nm}(\lambda)-a_n^{(k)}=\delta_{0n}\qquad(n=0,1,2,\ldots).\tag{3.10}$$

Заметим, что в силу (3.8), (3.9)

$$P_k=\int_{-1}^{1}\varphi_{2k}(\xi)\,d\xi=2\pi\gamma_k\alpha_{2k}a_0^{(k)}=0,\quad a_0^{(k)}=0\qquad(k\geqslant 1).\tag{3.11}$$

Условие (3.11) служит для определения неизвестных величин α_{2k}. Действительно, из системы (3.10) имеем $a_0^{(k)}=\Delta_1/\Delta$, где Δ — определитель системы (3.10); Δ_1 — определитель, который получается из Δ заменой в нем первого столбца элементами $\{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Определитель Δ_1 симметричный, поэтому корни его $\alpha=\alpha_{2k}(k=1, 2, \ldots)$ вещественные. Кроме того, ранее было отмечено, что при достаточно большом времени постоянным P и M соответствует линейный износ, поэтому суммы по экспонентам в (3.1) должны исчезать при $t\to\infty$. Отсюда, в частности, следует, что $\alpha_i\geqslant 0$, в чем можно также убедиться непосредственно с помощью следующего вычислительного критерия [11]. Для каждой конкретной задачи построим набор главных миноров определителя Δ_1. Из их неотрицательности будет следовать и неотрицательность чисел α_{2k} $(k\geqslant 1)$.

Таблица 1

ij	$e_{ij}(1)$	ij	$e_{ij}(1)$	ij	$e_{ij}(1)$
00	1,20168	11	0,74072	23	—0,12009
01	—0,16220	12	—0,17450	33	0,30896
02	—0,04062	13	—0,02811		
03	—0,00863	22	0,44640		

Определив числа α_{2k}, найдем затем из неоднородной системы (3.10) $a_m^{(l)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и, таким образом, построим систему функций $\varphi_{2k}(x)$ $(k \geqslant 1)$. Далее найдем

$$\varphi(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) = \pi\sqrt{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}\gamma_k \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(k)} P_{2m}^*(x) + \gamma P_0^*(x)\right]. \tag{3.12}$$

Теперь постоянные $\gamma_k (k \geqslant 1)$ нужно определить из условия удовлетворения уравнения (1.12) при $\beta(0) \equiv 0$. Представляя $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i P_{2i}^*(x)$, подставляя (2.10), (3.12) и (1.12), получим

$$\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}\gamma_k \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(k)} \sum_{j=0}^{\infty} e_{mj}(\lambda) P_{2j}^*(x) + \sqrt{2}\,\gamma \sum_{j=0}^{\infty} e_{0j}(\lambda) P_{2j}^*(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sqrt{2}\,\gamma(0)\,\delta_{0m} - f_m\right] P_{2m}^*(x). \tag{3.13}$$

Приравняв в соотношении (3.13) коэффициенты правой и левой частей при полиномах Лежандра одинакового номера, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}\gamma_k \sum_{m=1}^{\infty} e_{mj}(\lambda)\, a_m^{(k)} + \gamma e_{0j}(\lambda) = [\gamma(0)\,\delta_{0j} - f_j 2^{-1/2}] \quad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.14}$$

Здесь $\gamma(0)$ можно считать не зависимым от γ_k $(k \geqslant 1)$, ибо

$$\gamma(0) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k. \tag{3.15}$$

После решения системы (3.14) функции $\varphi_{2k}(x)$ будут полностью определены, а вместе с тем будет определено и решение задачи $\varphi(x, t)$. Поскольку в ходе решения бесконечной алгебраической системы (3.14) постоянная γ выразится через $\gamma(0)$, то вдавливающую силу P можно связать с начальным внедрением $\gamma(0)$ штампа в слой.

4. **Числовые примеры**. В качестве примера рассматривалась плоская контактная задача с износом для упругого изотропного слоя толщины h, с упругими постоянными (G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона), жестко защемленного по основанию. При этом $f(x) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 0$, $\lambda = h/a$ (a — полуширина штампа), $\theta = G(1 - \nu)^{-1}$,

$$L(u) = \frac{2\sigma \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\sigma \operatorname{ch} 2u + 1 + \sigma^2 + 4u^2} \quad (\sigma = 3 - 4\nu).$$

Коэффициенты $e_{ij}(\lambda)$, входящие в бесконечные системы, подсчитаны с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$ при $\lambda = 1$, $\nu = 0{,}3$ и занесены в табл. 1.

В случае линейного изменения во времени жесткого перемещения штампа бесконечную систему (2.11) будем решать методом редукции, ограничиваясь рассмотрением первых трех уравнений. Получим для определения α_{2k} алгебраическое уравнение третьего порядка, откуда найдем α_2, α_4, α_6. Соответственно этому будет построена система функций $\varphi_{2k}(x)$ вида (2.13), (2.14).

Таблица 2

k	1	2	3
α_{2k}	0,7979 1,2148	1,2758 2,1721	2,8433 4,7050

Определяя постоянные $c_{2k}(0)$ ($k \geqslant 1$) из (2.17) при $f_k \equiv 0$, построим решение задачи по формулам (2.8), (2.2).

Для случая постоянных во времени усилий, вдавливающих штамп, бесконечную систему (3.10) также будем решать методом редукции. Взяв в (3.10) четыре первых уравнения, найдем неизвестные числа α_2, α_4, α_6.

Таблица 3

	0	1	2	3	4	∞
$P(t)/P(0)$	0,99	0,41	0,18	0,08	0,03	0,00
$\gamma(t)/\gamma(0)$	1,000	1,916	2,794	3,669	4,543	∞

Построив систему функций $\varphi_{2k}(x)$ вида (3.3), (3.9), содержащих четыре произвольные постоянные γ, γ_1, γ_2, γ_3, определим затем последние из урезанной бесконечной системы (3.14).

В табл. 2 даны значения чисел α_{2k} для двух задач соответственно, а в табл. 3 — значения относительной величины вдавливающей силы $P(t)/P(0)$ для первой задачи и относительной величины поступательного перемещения штампа $\gamma(t)/\gamma(0)$ для второй задачи, посчитанные по формулам (2.18), (2.19), (3.1), (3.15). При этом предполагалось, что $P(\infty) = 0$ в случае первой задачи и $P(0) = 5{,}52\gamma_0$ [1].

Таблица 4

x	0	0,20	0,50	0,80	0,90	1,00
$\varphi(x,1)/\gamma_0$	1,084	1,108	1,228	1,126	1,016	0,833
$\varphi(x,1)/\gamma(0)$	2,604	2,607	2,687	2,927	2,977	2,929
$\varphi(x,2)/\gamma_0$	0,535	0,538	0,549	0,429	0,350	0,236
$\varphi(x,2)/\gamma(0)$	2,692	2,700	2,742	2,792	2,796	2,782
$\varphi(x,4)/\gamma_0$	0,121	0,118	0,107	0,0710	0,0553	0,0366
$\varphi(x,4)/\gamma(0)$	2,739	2,740	2,744	2,748	2,748	2,747

В табл. 4 приведены значения $\varphi(x,t)/\gamma_0$ и $\varphi(x,t)/\gamma(0)$ для первой и второй задачи соответственно при различных значениях t. Отметим, что при $t = 0$ для обоих случаев решения определяются формулами работы [1], а при $t = \infty$ имеют место соотношения

$$\varphi(x, \infty) = \pi\gamma'(\infty), \quad P(\infty) = 2\pi\gamma'(\infty),$$

вытекающие из того, что $\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t$, а также из формул (2.2), (3.1), (1.11) и $\varphi(x, \infty)/\gamma_0 = 0$, $\varphi(x, \infty)/\gamma(0) = 2{,}744$.

Поступила 5 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Наука, 1974.
2. **Коровчинский М. В.** Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей.— В кн.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., Наука, 1971.
3. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости при наличии износа. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
4. **Проников А. С.** Износ и долговечность станков. М., Машгиз, 1957.
5. **Хрущев М. М., Бабичев М. А.** Абразивное изнашивание. М., Наука, 1970.
6. **Бабешко В. А.** Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
7. **Люстерник Л. А., Соболев В. И.** Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.
8. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963.
9. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959.
10. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., Наука, 1976.
11. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. «Конечномерные линейные пространства». М., Наука, 1969.

УДК 539.30

РАЗВИТИЕ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННОГО РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ

В. А. Сарайкин

(*Новосибирск*)

Рассматривается рост трещины при внезапно приложенном равномерно распределенном давлении на берегах. Эта плоская задача является частным случаем задачи о распространении трещины с произвольной переменной скоростью [1—4], так как закон движения трещины здесь не произволен, а определяется из критерия разрушения для динамики [5, 6].

В предположении, что удельная поверхностная энергия неизменна, в работе вычислен закон движения полубесконечной трещины, развивающейся в хрупком материале. Наряду с точным решением теории упругости, для сравнения построены зависимости, описывающие тот же самый процесс приближенно (о приближенной модели трещины см. работы [3, 4, 7, 8]). На продолжении трещины сопоставлены осциллограммы напряжений, определяемые теорией упругости и приближенной моделью.

Отметим, что развитие трещины при антиплоской деформации исследовано в [9].

Пусть положение трещины в момент времени $t = 0$ задается в декартовой системе координат следующим образом: $-l_0^- < x < l_0^+$, $-\infty < y < < \infty$, $z = 0$ $\left(l_0^\pm > 0\right)$. Источником возмущений является равномерное давление, внезапно приложенное к берегам трещины при $t = 0$. Касательное напряжение равно нулю. Вершины трещины при $t > 0$ перемещаются: вправо по закону $x = l^+(t)$, влево по закону $x = -l^-(t)$, причем $l^\pm(0) = l_0^\pm$. При этом указанные выше напряжения возникают и на вновь образовавшихся поверхностях трещины. Из-за симметрии нагрузки относительно плоскости трещины на продолжении отсутствуют касательное напряжение и перемещение точек вдоль оси z. Начальные условия задачи нулевые.