УДК 517.957:532.529

РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ РЕАКЦИЯ — ДИФФУЗИЯ ТИПА ДИФФУЗИОННЫХ ВОЛН С ДВУМЯ ФРОНТАМИ

А. Л. Казаков, Л. Ф. Спевак*

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033 Иркутск, Россия

* Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН, 620049 Екатеринбург, Россия

E-mails: kazakov@icc.ru, lfs@imach.uran.ru

Для нелинейной параболической системы реакция — диффузия строятся и исследуются решения типа диффузионных волн. Впервые рассмотрена постановка задачи, которая предполагает задание несовпадающих нулевых фронтов для различных искомых функций. Доказана теорема существования и единственности решений в виде рядов в классе кусочно-аналитических функций. Для построения приближенных решений искомого типа предложен пошаговый итерационный алгоритм, основанный на методе коллокации и разложении по радиальным базисным функциям. Выполнены расчеты, для верификации результатов которых применялись отрезки рядов. Проведен численный анализ поведения построенных решений.

Ключевые слова: система реакция — диффузия, диффузионная волна, теорема существования и единственности, степенной ряд, радиальные базисные функции.

DOI: 10.15372/PMTF20220612

Введение. Нелинейные параболические уравнения и системы, являющиеся математическими моделями различных тепловых [1], фильтрационных [2, 3], диффузионных, конвективных процессов [4], при выполнении определенных дополнительных условий (вырождении) имеют класс решений, называемых диффузионными (тепловыми [1], фильтрационными [5]) волнами. Эти волны описывают возмущения, распространяющиеся по покоящемуся (абсолютно холодному, нулевому) фону с конечной скоростью. Наличие такого рода решений позволяет расширить область применимости параболических моделей в механике сплошных сред. В традиционном понимании диффузионная волна представляет собой составное решение параболического уравнения (системы), одна из частей которого является неотрицательной, вторая — тривиальной. Обе части непрерывно состыкованы вдоль некоторой достаточно гладкой линии (поверхности), называемой фронтом волны (нулевым фронтом), при этом производные, вообще говоря, имеют разрыв.

Ранее авторами данной работы рассматривались задачи построения и исследования свойств диффузионных волн при различных видах нелинейных параболических уравнений и постановках краевых условий. В последнее время полученные результаты обобщаются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-07-00407), Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства науки и технологии Тайваня (код проекта 20-51-S52003).

на случай системы. В настоящей работе, являющейся продолжением работ [6, 7], рассматривается новая задача, в которой нулевые фронты для двух неизвестных функций, вообще говоря, различаются. Данная постановка является не только более общей, но и более естественной, чем рассмотренная ранее. Решение при этом не является диффузионной волной в традиционном понимании, поскольку конструкция состоит не из двух, а из трех решений. Доказывается теорема существования и единственности кусочно-аналитического решения рассматриваемого вида. Поскольку теорема традиционно имеет локальный характер, предлагается алгоритм численного решения задачи на конечном промежутке времени. В созданных авторами данной работы на основе методов граничных элементов [8] и коллокации [9] пошаговых итерационных алгоритмах решения нелинейных параболических уравнений [10, 11] и систем [7] используются радиальные базисные функции (РБФ) [12]. Алгоритмы являются достаточно эффективными и точными. В настоящей работе предлагаемый подход применяется для решения системы (1), когда с помощью краевых условий заданы различные нулевые фронты для двух искомых функций. Вычислительный эксперимент на основе построенного алгоритма позволяет исследовать свойства решений на заданном промежутке времени.

Постановка задачи. Рассмотрим систему параболических уравнений типа реакция — диффузия

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}\, u_x^2 + F(u,v), \qquad v_t = vv_{xx} + \frac{1}{\delta}\, v_x^2 + G(u,v), \tag{1}$$

где u, v — искомые функции; время t и пространственная координата x — независимые переменные; $\sigma > 0$, $\delta > 0$ — константы; F, G — достаточно гладкие функции; $F(0,v) = G(u,0) = 0$. Для уравнения (1) зададим граничные условия

$$u(t,x)\big|_{x=a(t)} = 0, \qquad v(t,x)\big|_{x=b(t)} = 0. \tag{2}$$

Заметим, что в случае, когда $b(t) = a(t)$, функция $a(t)$ является аналитической в точке $t = 0$ и $a'(0) \neq 0$, задача (1), (2) согласно теореме 1 в работе [6] (см. также [7]) имеет единственное кусочно-аналитическое решение, представляющее собой диффузионную волну с фронтом $x = a(t)$. Постановка, рассматриваемая в настоящей работе, является достаточно общей и естественной.

Теорема существования. Очевидно, что задача (1), (2) имеет тривиальное решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$. Докажем, что у нее имеется также нетривиальное решение. Под аналитической в точке будем понимать функцию, которая в некоторой окрестности совпадает с ее тейлоровским разложением. Понятие диффузионной волны здесь и далее будем трактовать расширенно: составные неотрицательные решения, состоящие из непрерывно состыкованных между собой двух или более частей, как минимум одна из которых является тривиальной.

Теорема. *Пусть функции $F(u,v)$, $F(0,v) = 0$, $G(u,v)$, $G(u,0) = 0$ являются аналитическими в точке $u = 0$, $v = 0$; $a(t)$, $b(t)$ — аналитическими в точке $t = 0$; $a(0) = b(0)$, $a'(0)b'(0) > 0$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное кусочно-аналитическое решение, являющееся диффузионной волной.*

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы функция $u \equiv 0$ удовлетворяет первому уравнению (1) при всех v, а $v \equiv 0$ — второму уравнению при всех u. Без потери общности ввиду инвариантности (1) относительно замен $\tilde{x} = -x$ и $x^* = x + x_0$ будем полагать $a(0) = b(0) = 0$, $a'(0) > 0$, $b'(0) > 0$. Также положим для определенности, что $0 < a(t) < b(t)$ в некоторой проколотой окрестности точки $t = 0$. Отсюда следует, что $a(0) = b(0)$, $\ldots$, $a^{(k)}(0) = b^{(k)}(0)$, $a^{(k+1)}(0) < b^{(k+1)}(0)$, $k \geqslant 0$.

Доказательство теоремы состоит из двух этапов. Сначала строится аналитическое решение на множестве $a(t) \leqslant x \leqslant b(t)$, затем — при $x \leqslant a(t)$. При этом аналитичность на фронте $x = a(t)$, вообще говоря, нарушается (при сохранении непрерывности). Доказательство, основанное на методе специальных рядов [13], разработанном в научной школе А. Ф. Сидорова [5], изложим кратко, избегая повторения рассуждений, представленных в ранее опубликованных работах (см., например, [14]).

1. Пусть $a(t) \leqslant x \leqslant b(t)$. Поскольку данное множество лежит на плоскости Oxt правее линии $x = a(t)$, на нем выполняется равенство $u \equiv 0$. Подставляя это значение во второе уравнение (1), получаем задачу для одного уравнения

$$v_t = vv_{xx} + \frac{1}{\delta}\, v_x^2 + G(0, v), \qquad v\big|_{x=b(t)} = 0,$$

которая удовлетворяет ряду теорем, доказанных ранее (см., например, [15]), и имеет единственное нетривиальное аналитическое решение, которое можно представить в виде характеристического ряда

$$\begin{gathered} v(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^*(t)\, \frac{[x - b(t)]^k}{k!}, \\ v_0^*(t) \equiv 0, \qquad v_1^*(t) = -\delta b'(t) \neq 0, \qquad v_2^*(t) = \frac{\delta[b''(t) - G'_v(0, 0) b'(t)]}{(1 + \delta) b'(t)}. \end{gathered} \tag{3}$$

Прочие коэффициенты определяются по рекуррентной процедуре

$$v_{k+1}^* = \frac{1}{b'(t)(1 + k\delta)} \Big[\sum_{i=2}^{k} \Big(C_k^i + \frac{1}{\delta}\, C_k^{i-1} \Big) v_i^* v_{k+2-i}^* - \frac{dv_k^*(t)}{dt} + G_k \Big], \quad k = 1, \dots,$$

где $G_k = dG(0, v(t, x))/dt\big|_{x=0}$, т. е. дифференцируется сложная функция.

2. Пусть $0 \leqslant x \leqslant a(t)$. В этом случае для системы (1) необходимо рассмотреть граничные условия

$$u\big|_{x=a(t)} = 0; \tag{4}$$

$$v\big|_{x=a(t)} = f(t). \tag{5}$$

Условие (4) взято из (2), условие (5) следует из п. 1, причем из (3) получаем $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k^*(t)\, \dfrac{[a(t) - b(t)]^k}{k!}$, откуда, в частности, следует, что функция $f(t)$ является аналитической в точке $t = 0$. Задача (1), (4), (5) ранее не рассматривалась. Для удобства выполним замену $z = x - a(t)$, вследствие чего выражения (1), (4), (5) принимают вид

$$u_t = uu_{zz} + \frac{1}{\sigma}\, u_z^2 + a'(t) u_z + F(u, v), \qquad v_t = vv_{zz} + \frac{1}{\delta}\, v_z^2 + a'(t) v_z + G(v, u); \tag{6}$$

$$u(t, z)\big|_{z=0} = 0, \qquad v(t, z)\big|_{z=0} = f(t). \tag{7}$$

Решение задачи (6), (7) будем строить в виде кратных рядов

$$w(t, z) = \sum_{k,m=0}^{\infty} w_{k,m}(t)\, \frac{t^k z^m}{k!\, m!} = \sum_{k,m=0}^{\infty} w_{k,m}(t)\, \frac{t^k [x - a(t)]^m}{k!\, m!}, \quad w_{k,m} = \frac{\partial^{k+m} w}{\partial t^k\, \partial z^m}\Big|_{t=z=0}, \tag{8}$$

где параметр w принимает значения u, v.

В силу аналитичности функций $f(t)$, $a(t)$ справедливы разложения $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \dfrac{t^n}{n!}$, $a(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{t^n}{n!}$. Из краевого условия (7) следуют равенства $u_{n,0} = 0$, $v_{n,0} = f_n$, причем $f_0 = 0$. Остальные коэффициенты (8) определим рекуррентно с помощью метода индукции по суммарному порядку дифференцирования $n = k+m$. Сначала установим базу индукции, рассмотрев случай $k + m = 1$. Как указывалось выше, $u_{1,0} = 0$, $v_{1,0} = f_1$. Положим в (6) $t = z = 0$. Получаем систему двух квадратных уравнений

$$u_{0,1}^2 + \sigma a_1 u_{0,1} = 0, \qquad v_{0,1}^2 + \delta a_1 v_{0,1} = \delta f_1,$$

которая имеет четыре корня, однако только один из них соответствует диффузионной волне, расположенной слева от фронта $x = a(t)$:

$$u_{0,1} = -\sigma a_1, \qquad v_{0,1} = -\frac{\delta}{2}\bigl(a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4f_1}\,\bigr) = -\frac{\delta}{2}\,(a_1 + d). \tag{9}$$

Из определения функции $f(t)$ следует $f_1 = (b_1 - a_1)\,\delta b_1 \geqslant 0$, т. е. значение $v_{0,1} < 0$ является действительным.

Пусть известны $u_{k,m}$, $v_{k,m}$ при $k + m = 1, \ldots, n$. Дифференцируя уравнения (6) k раз по z, $n - k$ раз по t и полагая $t = z = 0$, получаем равенства

$$-\alpha_{n-k} v_{n-k-1,k+2} + \gamma_k v_{n-k,k+1} + v_{n-k+1,k} = Q_{n-k,k}, \qquad \beta_k u_{n-k,k+1} + u_{n-k+1,k} = P_{n-k,k},$$

где $\alpha_{n-k} = (n-k)f_1 \geqslant 0$; $\gamma_k = k\delta(a_1+d)/2 + d > 0$; $\beta_k = a_1(k\sigma+1) > 0$; $k = 0, \ldots, n$. Выражения для $Q_{n-k,k}$, $P_{n-k,k}$ не приводятся ввиду их громоздкости, для случая одного уравнения эти выражения приведены в работе [14]. Заметим лишь, что $Q_{n-k,k}$, $P_{n-k,k}$ зависят от коэффициентов, суммарный порядок которых не превышает n и которые известны в силу предположения метода индукции. При этом условие аналитичности функций $F(u,v)$, $G(u,v)$ обеспечивает бесконечную дифференцируемость уравнений системы (6).

Таким образом, для нахождения коэффициентов суммарного порядка $n + 1$ получена система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая, в свою очередь, разбивается на две подсистемы

$$A_{n+1}\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{P}_n; \tag{10}$$

$$B_{n+1}\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{Q}_n. \tag{11}$$

Здесь $\boldsymbol{u}_{n+1} = (u_{0,n+1}, u_{1,n}, \ldots, u_{n,1})^{\text{т}}$, $\boldsymbol{v}_{n+1} = (v_{0,n+1}, v_{1,n}, \ldots, v_{n,1})^{\text{т}}$ — векторы неизвестных; векторы $\boldsymbol{P}_n = (P_{0,n}, P_{1,n-1}, \ldots, P_{n,0})^{\text{т}}$, $\boldsymbol{Q}_n = (Q_{0,n}, Q_{1,n-1}, \ldots, Q_{n,0})^{\text{т}}$ и матрицы A_{n+1}, B_{n+1} известны.

Подсистемы (10), (11) являются крамеровскими. Действительно, матрица A_{n+1} является трехдиагональной и аналогична по структуре и форме матрице системы (11) в работе [14], невырожденность которой строго доказана. Матрица B_{n+1} является двухдиагональной, причем элементы β_k, стоящие на главной диагонали, положительны. Таким образом, коэффициенты рядов (8) определяются однозначно, решение построено.

Рассмотрим кратко доказательство сходимости рядов. Сходимость ряда (3) следует из ранее доказанной теоремы [15]. Задача (6), (7), как указывалось выше, ранее не рассматривалась, поэтому теоремы, обеспечивающей сходимость рядов (8), не существует. Тем не менее доказательство может быть проведено по стандартной схеме, ранее применявшейся для отдельных нелинейных параболических уравнений [14]. При этом для обеих неизвестных функций строится общая мажоранта [6]. Детали доказательства опускаются, поскольку являются повторением работ, опубликованных ранее.

Таким образом можно построить непрерывное кусочно-аналитическое решение задачи (1), (2), которое в области $\Omega_0 = \{x\colon x > b(t)\}$ является тривиальным решением, в области $\Omega_1 = \{x\colon a(t) < x < b(t)\}$ это решение $u \equiv 0$, $v(t,x) > 0$, определяемое рядом (3); в области $\Omega_2 = \{x\colon 0 < x < b(t)\}$ решение определяется рядами (8), причем $u(t,x) > 0$, $v(t,x) > 0$. Теорема доказана.

Алгоритм численного решения. Построим решение задачи (1), (2) на заданном конечном промежутке времени. Согласно численному алгоритму, предложенному в работе [7] для случая $a(t) = b(t)$, области определения двух искомых функций на каждом шаге по времени совпадают. В рассматриваемом случае эти области различны, поэтому разработанный ранее подход необходимо модифицировать.

Как и ранее, будем полагать, что $b(t) \geqslant a(t)$. На каждом шаге по времени $t = t_k = kh$ (h — размер шага) задачу (1), (2) будем решать в два этапа.

Этап 1. Решим задачу, соответствующую второму уравнению системы (1), на отрезке $x \in [a(t_k), b(t_k)]$:

$$V_{xx} = \frac{1}{V}\Big[V_t - \frac{1}{\delta}\,V_x^2 - G(0,V)\Big], \quad x \in [l,L], \qquad V\Big|_{x=L} = 0, \quad V_x\Big|_{x=L} = -\sigma b'(t). \tag{12}$$

Здесь $l = a(t_k)$; $L = b(t_k)$; граничное условие для производной в (12) следует из выражения для v_1^* (см. (3)).

Решение задачи (12) будем искать в виде $V(t_k,x) = P(x) + H(x)$, где $P(x)$ — частное решение уравнения в (12) в момент $t = t_k$; $H(x)$ — решение соответствующей задачи для однородного уравнения

$$H'' = 0, \qquad H\Big|_{x=L} = -P(L), \quad H'\Big|_{x=L} = -\sigma b'(t_k) - P'(L).$$

Итерационная процедура решения имеет вид

$$P^{(0)} \equiv 0, \qquad H^{(n)} = -[\sigma b'(t_k) + (P^{(n)})'(L)](x-L) - P^{(n)}(L); \tag{13}$$

$$P^{(n+1)} = \frac{1}{V^{(n)}}\Big(V_t^{(n)} - \frac{1}{\delta}\,(V_x^{(n)})^2 - G(0,V^{(n)})\Big), \tag{14}$$

где $P^{(n)}$, $H^{(n)}$, $V^{(n)} = P^{(n)} + H^{(n)}$ — n-е итерации решений. Для решения уравнения (14) его правая часть раскладывается по РБФ:

$$\frac{1}{V^{(n)}}\Big[V_t^{(n)} - \frac{1}{\delta}\,(V_x^{(n)})^2 - G(0,V^{(n)})\Big] = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^{(n+1)} f_i(x). \tag{15}$$

Здесь $f_i(x) = f_i(|x - x_i|)$ — РБФ, значения которых зависят от расстояния между текущей точкой и заданными точками коллокации $x_1, x_2, \ldots, x_m$, лежащими на отрезке $[l,L]$; для каждой $f_i(x)$ существует функция $\hat{u}_i$, такая что $f_i = \hat{u}_i{}''$. Коэффициенты $\beta_i^{(n+1)}$ $(i = 1,\ldots,m)$ находятся из СЛАУ, которая получается из равенства (15), записанного в точках коллокации. Производные по времени вычисляются с помощью метода конечных разностей. Найденные коэффициенты определяют $(n+1)$-ю итерацию $P^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i^{(n+1)} \hat{u}_i(x)$. Итерационный процесс (13)–(15) прекращается, когда $\max\limits_{x\in[l,L]} \dfrac{|V^{(n+1)} - V^{(n)}|}{|V^{(n+1)}|} < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — заданная точность). Тогда в качестве решения второго уравнения задачи (1), (2) в момент $t = t_k$ на отрезке $x \in [l,L]$ принимается непрерывная по x функция $V(t_k,x) = P^{(n+1)}(x) + H^{(n+1)}(x)$.

Этап 2. Решим задачу (1), (2) для момента t_k на отрезке $x \in [0, l]$, представив ее в виде

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} u_x^2 + F(u, W), \qquad W_t = WW_{xx} + \frac{1}{\delta} W_x^2 + G(u, W), \quad x \in [0, l]; \tag{16}$$

$$u\big|_{x=l} = 0, \qquad W\big|_{x=l} = V(t_k, l), \tag{17}$$

где величина $V(t_k, l)$ найдена на этапе 1. Из уравнения (9) следует граничное условие для производной функции u

$$u_x\big|_{x=l} = -\sigma a'(t). \tag{18}$$

Граничные условия для производной в (12), (18) получены из граничных условий (2). Получить аналогичное условие для второй искомой функции, обозначенной на этапе 2 через W, невозможно.

Для отыскания граничного условия для производной функции W рассмотрим второе уравнение системы (1) в точке $x = l$, где справедливы равенства $W_t = WW_{xx} + W_x^2/\delta + G(0, W)$, $V_t = VV_{xx} + V_x^2/\delta + G(0, V)$. Ввиду непрерывности $W(t_k, l) = V(t_k, l)$, $W_t(t_k, l) = V_t(t_k, l)$, с учетом чего получаем

$$W_x\big|_{x=l} = -\sqrt{\sigma V(t_k, l)[V_{xx}(t_k, l) - W_{xx}(t_k, l)] + V_x^2(t_k, l)}. \tag{19}$$

Решение задачи (16)–(19) будем искать в виде $u(t_k, x) = p(x) + h(x)$, $W(t_k, x) = \bar{P}(x) + \bar{H}(x)$, где $(p(x), \bar{P}(x))$ — частное решение системы (16); $(h(x), \bar{H}(x))$ — решение соответствующей задачи для однородной системы

$$h'' = 0, \quad h\big|_{x=l} = -p(l), \quad h'\big|_{x=l} = -\sigma a'(t_k) - p'(l), \quad \bar{H}'' = 0, \quad \bar{H}\big|_{x=l} = V(t_k, l) - \bar{P}(l),$$

$$\bar{H}'\big|_{x=l} = -\sqrt{\sigma V(t_k, l)[V_{xx}(t_k, l) - \bar{P}_{xx}(t_k, l)] + V_x^2(t_k, l)} - \bar{P}'(l).$$

Решение вновь строится итерационно следующим образом:

$$p^{(0)} \equiv 0, \qquad \bar{P}^{(0)} \equiv 0; \tag{20}$$

$$h^{(n)} = h_1^{(n)}(x - L) - p^{(n)}(L), \qquad \bar{H}^{(n)} = \bar{H}_1^{(n)}(x - L) + V(t_k, l) - \bar{P}^{(n)}(L); \tag{21}$$

$$p^{(n+1)} = \frac{1}{u^{(n)}} \Big[u_t^{(n)} - \frac{1}{\sigma} (u_x^{(n)})^2 - F(u^{(n)}, W^{(n)}) \Big]; \tag{22}$$

$$\bar{P}^{(n+1)} = \frac{1}{W^{(n)}} \Big[W_t^{(n)} - \frac{1}{\delta} (W_x^{(n)})^2 - G(u^{(n)}, W^{(n)}) \Big]. \tag{23}$$

Здесь $p^{(n)}$, $h^{(n)}$, $u^{(n)} = p^{(n)} + h^{(n)}$, $\bar{P}^{(n)}$, $\bar{H}^{(n)}$, $W^{(n)} = \bar{P}^{(n)} + \bar{H}^{(n)}$ — n-е итерации; $h_1^{(n)} = -\sigma a'(t_k) - (p^{(n)})'|_{x=L}$,

$$\bar{H}_1^{(n)} = -\sqrt{\sigma V(t_k, l)\big[V_{xx}(t_k, l) - (\bar{P}^{(n)})''\big|_{x=l}\big] + V_x^2(t_k, l)} - (\bar{P}^{(n)})'\big|_{x=l}.$$

Для решения уравнений (22), (23) их правые части раскладываются по РБФ:

$$\frac{1}{u^{(n)}} \Big[u_t^{(n)} - \frac{1}{\sigma} (u_x^{(n)})^2 - F(u^{(n)}, W^{(n)}) \Big] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(n+1)} f_i(x); \tag{24}$$

$$\frac{1}{W^{(n)}} \Big[W_t^{(n)} - \frac{1}{\delta} (W_x^{(n)})^2 - G(u^{(n)}, W^{(n)}) \Big] = \sum_{i=1}^{m} \bar{\beta}_i^{(n+1)} f_i(x), \tag{25}$$

коэффициенты $\alpha_i^{(n+1)}$, $\bar{\beta}_i^{(n+1)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ находятся из СЛАУ, которые получаются из равенств (24), (25), записанных в точках коллокации. Найденные коэффициенты определяют $(n+1)$-ю итерацию $p^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^{(n+1)} \hat{u}_i(x)$, $\bar{P}^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{\beta}_i^{(n+1)} \hat{u}_i(x)$. Итерационный процесс (20)–(25) завершается при выполнении неравенства

$$\max_{x \in [0,l]} \Big\{ \frac{|u^{(n+1)} - u^{(n)}|}{|u^{(n+1)}|}, \frac{|W^{(n+1)} - W^{(n)}|}{|W^{(n+1)}|} \Big\} < \varepsilon.$$

Тогда в качестве решения задачи (1), (2) в момент $t = t_k$ на отрезке $x \in [0, l]$ принимаются непрерывные по x функции $u(t_k, x) = p^{(n+1)}(x) + h^{(n+1)}(x)$, $W(t_k, x) = \bar{P}^{(n+1)}(x) + \bar{H}^{(n+1)}(x)$.

В результате выполнения расчетов на двух этапах получаем решение задачи (1), (2) в момент $t = t_k$ в виде

$$u(t_k, x), \quad x \in [0, a(t_k)], \qquad v(t_k, x) = \begin{cases} W(t_k, x), & x \in [0, a(t_k)], \\ V(t_k, x), & x \in [a(t_k), b(t_k)]. \end{cases}$$

Вычислительный эксперимент. Для верификации предложенного численного алгоритма сравним результаты расчетов с точными решениями. Рассмотрим два частных случая задачи (1), (2), в которых выполнены условия теоремы, причем $G(u, v)$ не зависит от u, и второе уравнение имеет точное решение, представимое в явном виде $v = v_*(t, x)$. Тогда для функции u получаем краевую задачу

$$u_t = u u_{xx} + u_x^2/\sigma + F(u, v_*), \qquad u\big|_{x=a(t)} = 0. \tag{26}$$

Пример 1. Пусть $F(u, v) = cuv$, $G(u, v) \equiv 0$, $a(t) = at$, $b(t) = bt$, $b > a > 0$. В этом случае

$$v_*(t, x) = b\delta(bt - x), \tag{27}$$

и решение задачи (26) строится в виде ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(t) \dfrac{z^k}{k!}$, коэффициенты которого определяются по формулам

$$u_0 = 0, \quad u_1 = -a\sigma, \quad u_2 = -\frac{\sigma B t}{\sigma + 1}, \quad u_3 = \frac{\sigma}{a(2\sigma + 1)} \Big(\frac{B^2 t^2}{(\sigma + 1)^2} + \frac{B}{\sigma + 1} + 2Aa \Big),$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{a(1 + k\sigma)} \Big[\sum_{i=2}^{k} \Big(C_k^i + \frac{1}{\sigma} C_k^{i-1} \Big) u_i u_{k+2-i} + (Bt - kA) u_k - u_k'(t) \Big], \quad k \geqslant 2,$$

где $A = bc\delta > 0$; $B = bc\delta(b - a) > 0$. Можно показать, что величины $u_k(t)$ являются полиномами степени $k - 1$.

Расчеты проводились для различных значений параметра c. В табл. 1 приведены значения невязки δ_1 уравнения (26) при подстановке отрезков рядов различных степеней n и $\sigma = \delta = 3$, $a = 0{,}9$, $b = 1$. Невязка уменьшается с увеличением степеней отрезков рядов. Это свидетельствует о том, что расчетные значения не выходят за пределы области сходимости. Таким образом, построенные ряды можно использовать для верификации численных решений. Заметим, что с увеличением параметра c невязки уравнения (26) увеличиваются.

Точность численных решений оценивалась при $\varepsilon = 10^{-10}$. Для функции $v(t, x)$ на обоих этапах первой итерации на каждом шаге по времени получаем точное решение (27). Результаты расчетов на этапе 2 показывают, что наибольшее различие численных и аналитических решений первого уравнения имеет место в точке $x = 0$, что соответствует

Таблица 1

Невязки δ_1 уравнения (26) для отрезков рядов в примере 1

n	δ_1		
	$c = 0{,}5$	$c = 1{,}0$	$c = 1{,}5$
5	$9{,}3 \cdot 10^{-3}$	$7{,}6 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-1}$
10	$5{,}2 \cdot 10^{-5}$	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$
15	$9{,}2 \cdot 10^{-8}$	$2{,}6 \cdot 10^{-5}$	$7{,}4 \cdot 10^{-4}$
20	$3{,}1 \cdot 10^{-10}$	$4{,}3 \cdot 10^{-7}$	$3{,}7 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

Погрешности δ_2 численных решений в примере 1

h	m	δ_2		
		$c = 0{,}5$	$c = 1{,}0$	$c = 1{,}5$
$t = 0{,}5$				
0,100	21	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9 \cdot 10^{-3}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$
0,100	51	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$	$2{,}8 \cdot 10^{-3}$	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$
0,050	21	$9{,}3 \cdot 10^{-4}$	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$	$3{,}0 \cdot 10^{-3}$
0,050	51	$8{,}6 \cdot 10^{-4}$	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$	$2{,}8 \cdot 10^{-3}$
0,010	21	$3{,}3 \cdot 10^{-4}$	$6{,}8 \cdot 10^{-4}$	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$
0,010	51	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$5{,}1 \cdot 10^{-4}$	$8{,}0 \cdot 10^{-4}$
0,005	21	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$	$4{,}8 \cdot 10^{-4}$	$7{,}5 \cdot 10^{-4}$
0,005	51	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$3{,}0 \cdot 10^{-4}$	$4{,}8 \cdot 10^{-4}$
$t = 1{,}0$				
0,100	21	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$	$9{,}4 \cdot 10^{-3}$	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$
0,100	51	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$	$8{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$
0,050	21	$2{,}6 \cdot 10^{-3}$	$5{,}9 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0 \cdot 10^{-2}$
0,050	51	$2{,}2 \cdot 10^{-3}$	$5{,}3 \cdot 10^{-3}$	$9{,}1 \cdot 10^{-3}$
0,010	21	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	$2{,}3 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$
0,010	51	$6{,}6 \cdot 10^{-4}$	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	$2{,}6 \cdot 10^{-3}$
0,005	21	$8{,}1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$	$3{,}1 \cdot 10^{-3}$
0,005	51	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$	$9{,}7 \cdot 10^{-4}$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$

краевым условиям (2). В табл. 2 приведены относительные погрешности δ_2 численных решений для отрезков рядов степени $n = 20$ при $x = 0$ и двух моментов времени. Расчеты выполнены при различных значениях шага по времени h и числа точек коллокации m. Результаты свидетельствуют о высокой точности решения, а также сходимости относительно шага по времени и числа точек коллокации.

Анализ результатов проведенных расчетов позволяет сделать следующие выводы о свойствах получаемых решений уравнения. Для каждого решения $u(t, x)$ существует момент времени $t = t_c$, зависящий от параметра c, такой что: 1) при $t \leqslant t_c$ функция $u(t, 0)$ возрастает по t, и при каждом значении t функция $u(t, x)$ монотонно убывает на отрезке $x \in [0, a(t)]$; 2) при $t > t_c$ функция $u(t, 0)$ убывает по t, и при каждом значении t функция $u(t, x)$ является немонотонной на отрезке $x \in [0, a(t)]$. Заметим, что время t_c уменьшается при увеличении c. В некоторый момент $t_0 > t_c$ $u(t_0, 0) = 0$. Это означает, что возникает "задний" нулевой фронт, т. е. решение имеет вид уединенной волны (солитона). Подобные объекты рассматривались в работах, посвященных исследованию точных решений нелинейного параболического уравнения теплопроводности [15]. Описанное поведение функции $u(t, x)$ показано на рис. 1, на котором приведены функция $u(t, x)$ при $c = 4$ в различные моменты времени и решения в момент $t = 1$ при различных значениях параметра c.

Пример 2. Пусть $F(u, v) = cuv$, $G(u, v) = v$, $a(t) = a(\mathrm{e}^t - 1)$, $b(t) = b(\mathrm{e}^t - 1)$, $b > a > 0$. Тогда

$$v_*(t, x) = b\delta\, \mathrm{e}^t [b(\mathrm{e}^t - 1) - x], \tag{28}$$

и решение задачи (26) вновь можно построить в виде ряда с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. В табл. 3 приведены значения невязки δ_1 уравнения (26) после подстановки отрезков рядов различных степеней n при $\sigma = \delta = 3$, $a = 0{,}4$, $b = 0{,}5$. Из результатов,

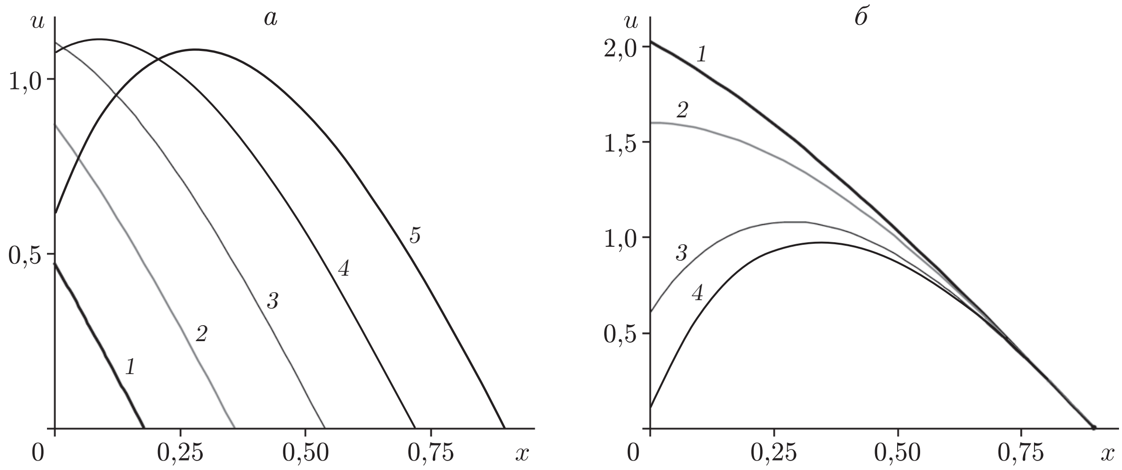

Рис. 1. Решения уравнения (26) в примере 1 при различных значениях c, t:
а — $c = 4$ (*1* — $t = 0{,}2$, *2* — $t = 0{,}4$, *3* — $t = 0{,}6$, *4* — $t = 0{,}8$, *5* — $t = 1$), *б* — $t = 1$ (*1* — $c = 1{,}0$, *2* — $c = 2{,}0$, *3* — $c = 4{,}0$, *4* — $c = 4{,}8$)

Таблица 3

Невязки δ_1 уравнения (26) для отрезков рядов в примере 2

n	δ_1		
	$c = 0{,}5$	$c = 1{,}0$	$c = 2{,}0$
5	$6{,}8 \cdot 10^{-3}$	$9{,}2 \cdot 10^{-3}$	$2{,}6 \cdot 10^{-1}$
10	$2{,}8 \cdot 10^{-5}$	$3{,}8 \cdot 10^{-4}$	$1{,}4 \cdot 10^{-2}$
15	$5{,}0 \cdot 10^{-8}$	$7{,}0 \cdot 10^{-7}$	$3{,}7 \cdot 10^{-4}$
20	$5{,}0 \cdot 10^{-10}$	$1{,}1 \cdot 10^{-8}$	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$

Таблица 4

Погрешности δ_2 численных решений в примере 2

h	m	δ_2		
		$u\vert_{x=0}$	$v\vert_{x=0}$	$v\vert_{x=a(t)}$
$t = 0{,}5$				
0,100	21	$4{,}7 \cdot 10^{-2}$	$4{,}7 \cdot 10^{-2}$	$3{,}0 \cdot 10^{-2}$
0,100	51	$4{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}6 \cdot 10^{-2}$	$2{,}9 \cdot 10^{-2}$
0,050	21	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	$2{,}4 \cdot 10^{-2}$
0,050	51	$3{,}1 \cdot 10^{-2}$	$3{,}1 \cdot 10^{-2}$	$2{,}3 \cdot 10^{-2}$
0,010	21	$9{,}6 \cdot 10^{-3}$	$9{,}6 \cdot 10^{-3}$	$8{,}2 \cdot 10^{-3}$
0,010	51	$9{,}0 \cdot 10^{-3}$	$9{,}4 \cdot 10^{-3}$	$7{,}9 \cdot 10^{-3}$
0,005	21	$5{,}5 \cdot 10^{-3}$	$4{,}7 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$
0,005	51	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$	$3{,}3 \cdot 10^{-3}$
$t = 1{,}0$				
0,100	21	$5{,}2 \cdot 10^{-2}$	$5{,}8 \cdot 10^{-2}$	$4{,}1 \cdot 10^{-2}$
0,100	51	$5{,}1 \cdot 10^{-2}$	$5{,}7 \cdot 10^{-2}$	$4{,}0 \cdot 10^{-2}$
0,050	21	$3{,}4 \cdot 10^{-2}$	$3{,}7 \cdot 10^{-2}$	$2{,}9 \cdot 10^{-2}$
0,050	51	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	$3{,}6 \cdot 10^{-2}$	$2{,}8 \cdot 10^{-2}$
0,010	21	$9{,}1 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0 \cdot 10^{-1}$	$9{,}0 \cdot 10^{-3}$
0,010	51	$8{,}0 \cdot 10^{-3}$	$9{,}5 \cdot 10^{-3}$	$8{,}1 \cdot 10^{-3}$
0,005	21	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$4{,}8 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$
0,005	51	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$	$3{,}3 \cdot 10^{-3}$

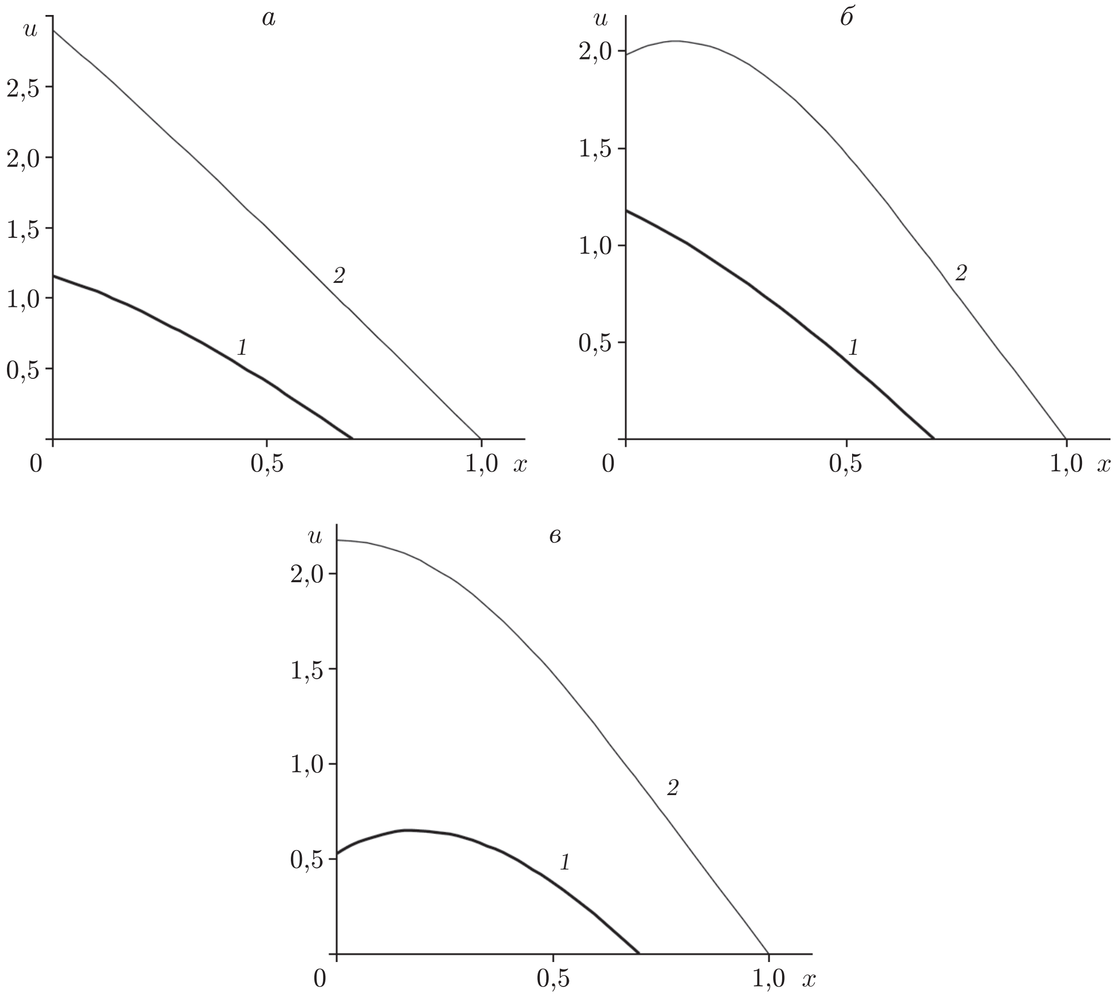

Рис. 2. Решения задачи (1), (2) в примере 3 при различных значениях c, d:
а — $c = 1$, $d = 1$, *б* — $c = 1$, $d = 10$, *в* — $c = 3$, $d = 10$; *1* — $u(1, x)$, *2* — $v(1, x)$

приведенных в табл. 3, так же как и в табл. 1, следует, что аналитические решения можно использовать для верификации численных решений.

Рассмотрим результаты сравнения численных решений с аналитическим, полученным при $c = 0{,}5$. В отличие от примера 1, в данном случае необходимо оценивать точность не только функции u, но и функции v. В табл. 4 приведены погрешности δ_2 функции u для отрезка ряда степени $n = 20$ и функции v для решения (28) при $x = 0$, а также погрешность функции v на первом этапе при $x = a(t)$. Вновь наблюдается сходимость относительно шага по времени и числа точек коллокации. При этом, как и в примере 1, величина шага по времени оказывает большее влияние на точность решения, чем число точек коллокации. Заметим, что использование сформулированного нового условия (19) для производной функции v приводит к сходимости значения производной, полученного при $x = a(t)$ на этапе 2, к значению, полученному на этапе 1. Таким образом, получаем гладкое решение $v(t, x)$ на отрезке $x \in [0, b(t)]$, как и должно быть, поскольку на обоих этапах решение (28) является точным.

Пример 3. Рассмотрим численное решение задачи (1), (2) в случае связанности обоих уравнений. На рис. 2 представлены решения в момент времени $t = 1$ при $F(u, v) = cuv$, $G(u, v) = duv$, $a(t) = 0{,}7t$, $b(t) = t$ и различных значениях коэффициентов c и d.

Заключение. В работе результаты построения решений типа диффузионной волны, полученные ранее для нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением, обобщены на принципиально более сложный случай, когда нулевые фронты для двух искомых функций, вообще говоря, различны. Вследствие этого использовалось новое, более общее определение диффузионной волны. Обоснована теорема существования и единственности решения искомого типа, доказательство которой разбивается на два этапа.

Поскольку теорема является локальной, как и большинство аналогов теоремы Коши — Ковалевской, актуальной проблемой является построение приближенных решений на заданном промежутке времени. Для ее решения предложен приближенный пошаговый итерационный алгоритм на основе метода коллокации и разложения по РБФ. Выполнены расчеты, для верификации результатов которых применялись отрезки рядов. Проведен численный анализ поведения построенных решений. Таким образом, показана применимость предложенного подхода для решения рассмотренных задач, что является значимым результатом, учитывая их сложность и отсутствие альтернативных подходов для численного исследования.

Полученные результаты являются частью разрабатываемого при участии авторов данной работы модельно-алгоритмического подхода для решения задач эволюции ледового покрова пресноводных водоемов (на примере оз. Байкал) с учетом температуры воздуха и физических свойств льда, в случае когда рассматриваются две границы: лед — воздух и вода — лед, а также для моделирования распространения загрязняющих примесей в прибрежной зоне. Следующим шагом должно стать исследование задач со свободной границей [4, 14] для рассмотренной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самарский А. А.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М.: Наука, 1987.
2. **Баренблатт Г. И.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1972.
3. **Леонтьев Н. Е.** Точные решения задачи о фильтрации суспензии с замедлением скачка концентрации в рамках нелинейной двухскоростной модели // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2017. Т. 52, № 1. С. 168–174.
4. **Андреев В. К.** Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. М.: Физматлит, 2008.
5. **Сидоров А. Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
6. **Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A.** Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. V. 12, N 6. 999.
7. **Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.** Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция — диффузия // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 4. С. 169–180.
8. **Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H.** Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // Engng Anal. Boundary Elements. 1999. V. 23. P. 285–296.
9. **Chen C. S.** Recent advances in radial basis function collocation methods / C. S. Chen, W. Chen, Z. J. Fu. Berlin; Heidelberg: Springer, 2013.
10. **Spevak L. F., Nefedova O. A.** Solving a two-dimensional nonlinear heat conduction equation with degeneration by the boundary element method with the application of the dual reciprocity method // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1785. 040077.

11. **Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A., Lempert A. A.** On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term // Symmetry. 2021. V. 12, N 6. 921.
12. **Buhmann M. D.** Radial basis functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
13. **Филимонов М. Ю.** Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 801–808.
14. **Казаков А. Л., Лемперт А. А.** О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
15. **Казаков А. Л.** О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1057–1068.

Поступила в редакцию 26/IV 2022 г.,
после доработки — 26/IV 2022 г.
Принята к публикации 26/V 2022 г.