или, заменив в первом члене квадратной скобки $dT\,/\,dp$ по формуле Клайперона — Клаузиуса на $T\,(v'' - v')\,/\,r$, а $v'\,(1 - x) + v''x$ на v,получим выражение (8); откуда следует, что уравнение (5) — (7) эквивалентно уравнению (1).

Итак, показано, что как уравнения (2) — (4) Н.И.Белоконя,так и уравнения (5) — (7) В. В. Сычева для показателя адиабаты влажного и насыщенного паров не отличаются от предложенного значительно ранее аналитического выражения для зависимости k от T уравнения (1) и представляют собой лишь иную форму написания этого уравнения. Заменив в уравнении (1) величину c_s' через равную ей величину

$$\frac{di'}{dT} + v'\frac{dp}{dT}$$

получим уравнение (3) — (5) Н. И. Белоконя, а заменив c_s' через эквивалентную величину

$$c_v'^* + T\frac{dv'}{dT}\frac{dp}{dT}$$

получим уравнение В. В. Сычева.

Поступила
12 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Вукалович М. П., Новиков И. И. Техническая термодинамика. Госэнергоиздат, 1955, стр. 172.
2. Новиков И. И. ДАН СССР, 1948, т. 59, № 8, 1425.
3. Авдонин В. И., Новиков И. И. Скорость звука на кривой фазового равновесия пар — жидкость. ПМТФ, 1960, № 1.
4. Белоконь Н. И. Термодинамика. Госэнергоиздат, 1954.
5. Сычев В. В. Новое уравнение для показателя адиабаты влажного пара. Теплоэнергетика. Госэнергоиздат, 1961, № 3, 67.

О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

Г. А. Беда

(Москва)

Рассматривается установившееся течение жидкой пленки, образующейся в результате вдува жидкости через пористую пластину в турбулентный пограничный слой. Принимается, что течение в жидкой пленке ламинарное и нет испарения на ее внешней границе. Уравнения, описывающие это течение, имеют вид:

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

Уравнение движения

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\frac{d^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

Уравнение энергии

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3}$$

Здесь u, v — составляющие скорости по осям x и y соответственно, μ — динамический коэффициент вязкости, T — температура, a — коэффициент температуропроводимости, ρ — плотность.

Граничными условиями на пористой пластине ($y = 0$) будут

$$u = 0, \qquad v = v_w(x), \qquad T = T_w = \text{const} \tag{4}$$

На внешней поверхности жидкой пленки, т. е. при $y = \delta(x)$, где δ толщина пленки, необходимо потребовать равенство касательных напряжений и тепловых потоков, т. е.

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=\delta} = \tau_\delta, \qquad \lambda\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=\delta} = q_\delta$$

Кроме того, при отсутствии испарения внешняя граница жидкой пленки является линией тока, поэтому

$$v_\delta = u_\delta\frac{d\delta}{dx} \tag{5}$$

Из многочисленных исследований турбулентного пограничного слоя следует, что, по крайней мере, до чисел Рейнольдса 10^7 τ_δ и q_δ пропорциональны $x^{-0.2}$. Поэтому будем считать, что

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = a_0 x^{-0.2} \quad \text{при } y = \delta, \qquad \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = b_0 x^{-0.2} \quad \text{при } y = \delta \tag{6}$$

Здесь a_0 и b_0 постоянные. Введем функцию тока

$$\psi = \frac{1}{3} x^{0.6} f(\eta) \qquad \left(\eta = \frac{\rho}{5\mu} y x^{-0.4} = \frac{1}{5\nu} y x^{-0.4}\right) \tag{7}$$

Тогда

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{15\nu} x^{0.2} f'(\eta), \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{5} x^{-0.4}\left[f(\eta) - \frac{2}{3}\eta f'(\eta)\right] \tag{8}$$

и уравнение движения (2) с граничными условиями (4) — (6) приводится к виду

$$f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) - f'^2(\eta) = 0$$

$$\eta = 0 \quad (y = 0), \qquad f'(0) = 0, \qquad f(0) = \text{const} \tag{9}$$

$$\eta = \eta_* \quad (y = \delta), \qquad f''(\eta_*) = \frac{75 a_0 \nu^2}{\mu}, \qquad f(\eta_*) = 0$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по η. При этом условию автомодельности соответствует следующий закон вдува жидкости:

$$v_w = -\frac{1}{5} f(0) x^{-0.4}$$

Толщина жидкой пленки δ изменяется пропорционально $x^{0.4}$.

Рассмотрим уравнение энергии (3). Будем считать, что $T = T(x, \eta)$; тогда

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{2}{5}\frac{\eta}{x} T_\eta', \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{5\nu} T_\eta' x^{-0.4} \tag{10}$$

Подставляя соотношения (8), (10) в уравнение (3), получим

$$T_\eta'' + P T_\eta' = \frac{5}{3} P f' x \frac{\partial T}{\partial x} \qquad \left(P = \frac{\nu}{a}\right) \tag{11}$$

где P — число Прандтля. Решение уравнения (11) представим в виде

$$T(x, \eta) = T + t(\eta) X(x) \qquad (X(x) = x^n)$$

в котором функция $t(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$t'' + P f t' = \frac{5}{3} P n f' t$$

Здесь n — произвольная величина. Нетрудно видеть, что $t(0) = 0$.

Для определения n подставим выражение

$$T(x, \eta) = T_w + x^n t(\eta)$$

в граничное условие (7). Получим, что $n = 0.2$, а

$$t'(\eta_*) = \frac{5\nu b_0}{\lambda}$$

Таким образом, решение уравнения (11) сводится к решению уравнения

$$t'' + P f t' = \frac{1}{3} P f' t$$

при следующих граничных условиях:

$$\eta = 0, \qquad t(0) = 0, \qquad \eta = \eta_*, \qquad t'(\eta_*) = \frac{5\nu b_0}{\lambda}$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$T(x, \eta) = T_w + x^{0.2} t(\eta)$$

Заметим, что для ламинарного пограничного слоя аналогичная задача рассмотрена Г. Г. Черным в [1].

Поступила
4 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Ламинарные движения в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.