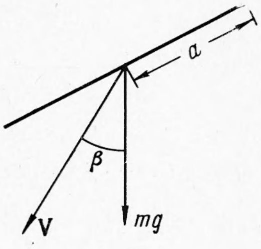
# О РАЗЛЕТЕ ПАКЕТА ПЛАСТИН В АТМОСФЕРЕ

*В. П. Беломытцев* (*Воронеж*)

Рассматривается вопрос о разлете пакета жестких, однородных пластин прямоугольной формы большого удлинения при бросании его с большой высоты в атмосфере.

При падении пакета пластинок для каждой из них рано или поздно возникнет явление авторотации, т. е. пластинка начинает вращаться вокруг длинной оси и, как следствие, приобретает горизонтальную составляющую скорости. Пакет таких пластинок будет разлетаться и образует в пространстве фигуру, ограниченную движущимися пластинками.




Ставится задача о форме этой фигуры, ее положении в пространстве и поверхностной плотности пластинок в зависимости от времени в предположении отсутствия турбулентности атмосферы.

Будем предполагать падение пластинки правильным в том смысле, что центр тяжести пластинки во все время движения находится в одной плоскости и длинная ось пластинки располагается горизонтально. На пластинку действуют сила веса и аэродинамические силы. Сопротивление среды принимается пропорциональным квадрату скорости.

Уравнение движения для установившегося случая в естественной системе координат в проекции на ось, совпадающую по направлению со скоростью $\mathbf{V}$, будет [1]

$$mg \cos \beta = kV^2 \tag{1}$$

Здесь $m$ — масса пластинки, $\beta$ — угол наклона траектории центра тяжести пластинки к вертикали, $g$ — ускорение свободного падения, $k$ — коэффициент сопротивления.

В формулу (1) входят неизвестные параметры $k$ и $\beta$. С использованием соображений теории размерностей [2] для них получены выражения

$$k = 2\rho a l \psi\left(\frac{m}{\rho a^3}, \frac{\omega l}{V}, R\right) \tag{2}$$

$$\cos \beta = \varphi\left(\frac{m}{\rho a^3}, \frac{\omega l}{V}, R\right) \tag{3}$$

Здесь $l$ — длина пластинки, $a$ — половина ширины пластинки, $\omega$ — угловая скорость вращения пластинки, $\rho$ — плотность воздуха, $R$ — число Рейнольдса, $\psi$ и $\varphi$ — неизвестные функции трех безразмерных параметров. Можно оставить только одну безразмерную комбинацию $m / \rho a^3 \equiv A$. Как известно [1], приближенно $V = 2a\omega$. Следовательно, параметр $\omega l / V$ для пластинок данного удлинения есть const. Относительно числа Рейнольдса $R$ можно сказать, что движение от него зависит в значительно меньшей степени, чем от параметра $A$.

Приближенное выражение функций $\psi$ и $\varphi$ в зависимости от параметра $A$ получено на основе обработки экспериментальных данных по бросанию пластинок с некоторой высоты. Приведем здесь только конечные полуэмпирические формулы скорости и угла наклона траектории центра тяжести к вертикали

$$V = 2.5 \sqrt{(ga^2 / l)\, A^{0.92}}, \qquad \cos \beta = 0.54 A^{0.093} \tag{4}$$

Точность формулы (4) в диапазоне изменения $A$ от 3 до 50 выше 90%.

Отметим далее, что изменение плотности воздуха с высотой в атмосфере приближенно выражается формулой $\rho = \rho_0 \exp(-\tau y)$, где $\rho_0$ — плотность при $y = 0$ и $\tau = \text{const}$. Разбивая участок падения пластинки на отрезки и принимая плотность воздуха на каждом из них постоянной, будем знать скорость падения пластинки $V$, выражаемую формулой (4).

На основании изложенного можно сказать, что известен в некотором приближении к действительности закон движения одной авторотирующей пластинки при ее падении в атмосфере.

Перейдем далее к основному вопросу о разлете пакета пластин.

Пусть в воздухе с некоторой высоты $h$ бросается пакет из очень большого числа $N$ штук одинаковых пластинок. Очевидно, что явление авторотации возникнет не для всех пластинок одновременно. В пространстве образуется некоторая фигура, ограниченная разлетающимися пластинками, которые, как будем предполагать, летят правильно. Необходимо определить форму и положение в пространстве этой фигуры, а также поверхностную плотность пластинок в зависимости от времени, считая движение одной пластинки известным, на основании предыдущих выводов.

Решим теперь вопрос, когда же каждая из $N$ штук пластинок начнет ротировать. За параметр, характеризующий это, выберем величину пути, проходимого пластинкой без ротации после начала падения, считая началом координат точку бросания пакета и направляя ось $y$ вниз. Указать какое-то конкретное значение $y$ и сказать, что в этой точке пластинка начнет ротировать, очевидно, невозможно, так как это значение зависит от множества величин, причем зачастую случайных. Следовательно, можно только говорить о величине вероятности того, что данная пластинка начнет авторотировать в данном интервале от $y$ до $y + \Delta y$.

Предположим, что эта вероятность подчиняется закону распределения Максвелла. В этом случае в данном интервале от $y$ до $y + \Delta y$ из общего числа $N$ штук пластинок начнет авторотировать $\Delta N(y)$, удовлетворяющее формуле

$$\Delta N(y) = 4\pi N (\sigma / \pi)^{3/2} y^2 \exp(-\sigma y^2) \Delta y \tag{5}$$

где $\sigma$ — неизвестный параметр, характеризующий распределение и зависящий прежде всего от плотности воздуха и характеристик пластинки.

Естественно считать, что во все стороны от вертикали пластинки полетят равновероятно. Все ротирующие пластинки, летящие в данном направлении, будут двигаться вместе, так как они одинаковые и будут иметь одну и ту же скорость, определяемую формулой (4). Однако авторотировать они начали в разное время. Следовательно, пластинки, летящие в данном направлении, распределяются по прямой, которая будет образующей конической поверхности. Если учитывать изменение плотности воздуха с высотой, то эта поверхность будет несколько отличной от конуса. Кроме того, необходимо отметить, что поверхность будет размыта, т. е. будет иметь некоторую толщину, в силу различных случайных причин.

В случае не хаотического, а упорядоченного выброса пакета пластин осевой симметрии не будет, так как разлет пластинок по различным направлениям уже не будет равновероятным, но в данной постановке задачи этот вопрос не рассматривается, так же как и вопрос о влиянии наложенных потоков воздуха.

Можно считать, что все пластинки до начала ротации падают со скоростью $V_1$, равной скорости падения пластинки в воздухе без вращения. Тогда вершина конуса опускается со скоростью $V_1$, так как в ней опускаются не ротирующие пластинки.

Исходя из геометрических соображений и из того, что скорость ротирующей пластинки есть $V$, а угол наклона траектории центра тяжести к вертикали $\beta$, выводятся величины: радиус основания, высота и площадь боковой поверхности конуса в зависимости от времени.

Приведем для примера только величину боковой поверхности

$$S = \pi V t^2 \sqrt{V^2 + V_1^2 - 2VV_1 \cos\beta} \sin\beta \tag{6}$$

Зная площадь боковой поверхности конуса, можно определить среднюю поверх ностную плотность пластинок в зависимости от времени

$$c = \frac{1}{S} \int_0^y \Delta N(y) \qquad \left(y = \int_0^t V_1 \, dt\right) \tag{7}$$

Местная поверхностная плотность, определяемая в некотором поясе единичной высоты поверхности конуса, будет изменяться так же, как и функция закона распределения.

Рассмотрим далее вопрос о величине параметра $\sigma$, который характеризует максимум распределения, т. е. дает то значение $y = 1 / \sqrt{\sigma}$, в котором наиболее вероятно начало авторотации пластинки. Этим значением $y^*$ будет то, в котором пластинка достигает максимума скорости в своем падении без ротации. В этот момент создаются наилучшие условия для срыва пластинки и начала вращения. В связи с этим необходимо решить задачу о падении пластинки в воздухе без вращения, считая плотность переменной, и найти то значение $y^*$, при котором достигается наибольшая скорость.

Уравнение движения пластинки, падающей в воздухе без вращения, при учете изменения плотности с высотой будет

$$m \, dV_1 / dt = mg - k\rho s V_1^2 \qquad (\rho = \rho_0 e^{-\tau y}) \tag{8}$$

Здесь $s$ — площадь пластинки. Уравнение записано для оси $y$, направленной вверх, с началом отсчета на уровне $\rho = \rho_0$ при $y = 0$. Начальные условия: $V_1 = 0$; $y = y_1$, т. е. пластинка бросается с высоты $y_1$. Это уравнение сводится к уравнению Бернулли, решая которое, имеем

$$V_1 = \left(\frac{2g}{\tau} e^{-u} \int_{u_1}^{u} e^u \frac{du}{u}\right)^{1/2} \qquad \left(u = \frac{2k\rho_0 s}{\tau m} e^{-\tau y}\right) \tag{9}$$

Для определения положения максимума скорости получаем соотношение

$$\int_{u_1}^{u} \frac{e^u}{u}\, du = \frac{e^u}{u} \tag{10}$$

Требуется определить, при каком значении $u^*$ выполняется (10). Зная это, получим $y^*$, а отсюда

$$\sigma = \tau^2 \left(\ln \frac{\tau m u^*}{2k\rho_0 s}\right)^{-2} \tag{11}$$

Поступила 14 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Собр. соч. Гостехиздат, 1948, т. 4, стр. 41—68.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.

## О СТОЛКНОВЕНИИ АТОМА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*В. В. Мажуга (Москва)*

Изучение процессов обмена энергией между атомом и твердым телом очень важно для теории адсорбции, теории катализа, а также для теории различных химических процессов, в которых активную роль играет взаимодействие исходных или промежуточных частиц с поверхностью кристалла. Ленард-Джонс с сотрудниками рассматривали взаимодействие атома с решеткой в однофононном приближении [1,2]. Согласно экспериментальным данным [3,4], конденсация атомов происходит с вероятностью порядка единицы, когда величина их поступательной энергии равняется энергии возбуждения в твердом теле нескольких фононов. Следовательно, эффективность обмена энергией между атомом и твердым телом много выше той, которая предсказывалась в работах [1,2]. Ввиду сложности квантовомеханического рассмотрения этой задачи приходится пользоваться простыми моделями и описывать движение атомов в рамках классической механики.

В литературе имеется ряд работ, посвященных этому вопросу [5-9]. Для упрощения задачи твердое тело обычно аппроксимируется полубесконечной линейной цепочкой упруго связанных атомов, причем крайний атом цепочки играет роль атома поверхности, с которым взаимодействует атом, налетающий из газовой фазы. Кабрера и Цванциг [6,7] нашли замкнутое решение уравнений движения для этой системы в предположении, что все силовые константы взаимодействия атомов равны между собой для двух частных случаев: а) масса всех атомов одинакова, б) масса налетающего атома в два раза меньше массы каждого из атомов цепочки. Мак-Каррол и Эрлих [8], Леонас [9] для нескольких значений массы налетающего атома и силовой константы взаимодействия атома газовой фазы с поверхностью произвели численное решение уравнений движения этой системы частиц на электронно-счетной машине. Ниже будет приведено решение этой задачи в замкнутом виде при произвольных значениях массы налетающего атома и произвольных значениях силовой константы, описывающей взаимодействие атома с поверхностью твердого тела.

**1. Постановка задачи.** В указанной выше модели все межатомные расстояния предполагаются равными. Так как силы межатомного взаимодействия быстро убывают с расстоянием, приближенно можно ограничиться учетом взаимодействия каждого атома с его двумя ближайшими соседями. Взаимодействие атомов рассматривается в гармоническом приближении. Силовую постоянную цепочки будем обозначать через $K$, а массу каждого атома — через $M$. Эта цепочка атомов взаимодействует с атомом $A$ (фиг. 1), налетающим из газовой фазы, масса которого равна $M_0$. На фиг. 2 показан потенциал взаимодействия между атомом $A$ и крайним атомом цепочки $B$, представляющий обрезанный гармонический осциллятор с силовой константой $K_0$. У этого осциллятора расстояние обрезания имеет фиксированное значение $x(0)$ и энергия связи $Q$ изменяется согласно соотношению $Q = {}^1/_2 K_0 x^2(0)$. Нумерация атомов ясна из фиг. 1. Система уравнений, описывающая движение автомов, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} M_0 r_0^{\cdot\cdot}(t) &= -K_0(r_0 - r_1) \\ M r_1^{\cdot\cdot}(t) &= K_0(r_0 - r_1) - K(r_1 - r_2) \\ M r_n^{\cdot\cdot}(t) &= K(r_{n-1} - 2r_n + r_{n+1}) \qquad (n \geqslant 2) \end{aligned} \tag{1}$$

где $r_n$ — отклонение от положения равновесия $n$-го атома.