Теплофизика и аэромеханика, 2018, том 25, № 3

УДК 536.3+536.42

Моделирование нагрева и таяния льда в приближении задачи Стефана с учетом излучения*

С.Д. Слепцов[1], Н.А. Рубцов[1], Н.А. Саввинова[2]

[1]*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

[2]*Северо-Восточный федеральный университет, Якутск*

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Методами математического моделирования поставлена и решена задача радиационно-кондуктивного нагрева и последующего таяния льда в климатической камере в однофазном приближении задачи Стефана с учетом возникающей тонкой пленки воды на облучаемой поверхности. Получены поля температур и плотности потока результирующего излучения, а также темпы таяния и нагрева необлучаемой поверхности льда. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными показало удовлетворительное согласование.

Ключевые слова: лёд, таяние, задача Стефана, радиционно-кондуктивный теплообмен, пленка воды.

Введение

Моделирование таяния льда необходимо как для понимания протекающих в природе процессов, так и для обеспечения безопасности строительных конструкций, техники и населения в северных широтах. Задача таяния льда является классической задачей фазового перехода. История постановок задачи Стефана представлена в работе [1]. В теоретическом и экспериментальном плане двух- и трехфазные задачи Стефана с учетом излучения хорошо изучены [2–7]. Математическое моделирование однофазной задачи Стефана с учетом излучения рассматривалось в серии работ (см., например, [8, 9]), однако экспериментальных работ, где можно было бы верифицировать постановку и метод решения крайне мало. Работа [10] является расчетно-экспериментальной. Здесь в климатической камере при постоянной температуре 0 °C под двумя видами ламп (галогеновой с температурой нити T_b = 3200 K и лампы с нихромовой нитью с T_b = 800 K) на вертикальной непрозрачной подложке находился лед. Рассматривалось таяние льда в условиях коротковолнового и длинноволнового излучений. В математической модели процесса авторы пренебрегли наличием талой пленки воды на поверхности и расчет проводили в однофазной постановке задачи Стефана. Они сравнили темпы таяния и нагрева необлучаемой стороны льда и получили удовлетворительное согласование, используя в расчетах подгоночные параметры и прямое интегрирование переноса излучения по закону Бугера.

* Работа выполнена в рамках бюджетного проекта III.18.2.2. «Теплофизические свойства и тепломассообмен в рабочих средах и материалах для энергетических технологий».

Было показано влияние коротковолнового излучения на появление сильно шероховатых поверхностей во льду. К расчетно-экспериментальным относится также работа [11], которая посвящена актуальной проблеме предотвращения обледенения различных поверхностей. Авторы проводили эксперимент на вертикальной подложке из прозрачных и непрозрачных для излучения материалов при комнатной температуре. Результаты экспериментов и расчетов показали, что лед лучше удаляется с непрозрачных материалов, чем с прозрачной акриловой подложки. При сравнении данных расчетов с экспериментом выявлено их хорошее согласование для тонких подложек.

В монографии [12] было подробно проанализировано современное состояние теплофизики снега и льда, приведены постановки нового класса задач, в которых снег и лед рассматривались как светорассеивающие среды, обладающие объемным поглощением и отражением. Этот подход позволяет объяснить ряд наблюдаемых эффектов метаморфизма в приповерхностных слоях гляциальных масс, а также описать закономерности динамики их теплового состояния и межфазного обмена.

В настоящей работе представлена математическая модель эксперимента [10] для верификации постановки задачи и метода решения радиационной части, использованной в работе [9], с опытными данными, также полученными в [10].

Постановка задачи

На рис. 1 приведена геометрическая схема задачи, предполагающая непрозрачную подложку из бакелита толщиной L_1 с приклеенным к нему слоем чистого, поглощающего излучение льда толщиной L_2, рассматриваемого в приближении серой среды. На правую сторону льда падает излучение от лампы с температурой нити T_b = 800 K, что примерно моделирует излучение Солнца в облачный день, полученные данные используются для последующего сравнения с результатами исследования [10]. Границы льда диффузно поглощают, отражают и пропускают излучение таким образом, что $A_i + R_i + D_i = 1$, где A_i, R_i, D_i — поглощательная, отражательная и пропускательная полусферические способности поверхности льда, i = 1, 2. Левая граница подложки $T_1(0, t)$ поддерживается при постоянной температуре T_{sub} = 256,15 K, окружающий воздух — при T_∞ = 273,15 K.

Решение задачи включает два этапа. На первом этапе рассматривается радиационно-кондуктивный теплообмен, он продолжается до момента достижения правой границей льда (с начальной температурой $T_2(L_2, t)$) температуры фазового перехода T_f. На втором этапе рассматривается задача Стефана с фиксированным значением T_f, на этом этапе возникающая тонкая пленка воды стекает под влиянием сил тяготения, оказывая при этом дополнительную тепловую нагрузку в виде конвекции и излучения. Положение границ раздела фаз $L_2(t)$ определяется из решения краевой задачи.

Уравнения сохранения энергии подложки с температурой $T_1(z, t)$ и льда с температурой $T_2(x, t)$ записываются следующим образом:

$$c_{p1}\rho_1 \frac{\partial T_1(z,t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1(z,t)}{\partial z^2},$$

$$0 < z < L_1, \qquad (1)$$

$$c_{p2}\rho_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} - E(x,t)\right),$$

$$0 < x < L_2, \qquad (2)$$

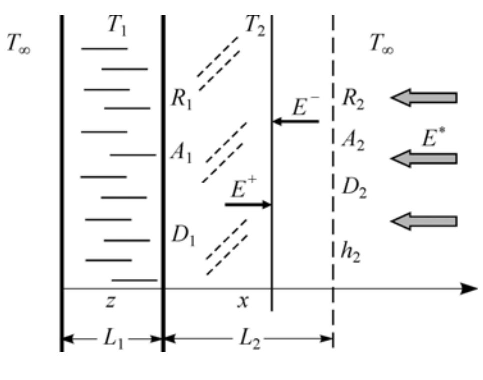

Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

здесь c_{pi} — теплоемкость при постоянном давлении, ρ_i — плотность, λ_i — коэффициент теплопроводности (i = 1, 2), $E(x,t) = 2\pi \int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)\mu d\mu$ — плотность потока результирующего излучения, записанная через интенсивности излучения $I(\tau, \mu)$, где $\tau = \alpha \cdot x$ — оптическая толщина, α — коэффициент объемного поглощения, μ — косинус угла между направлением распространения излучения и осью координат x. Граничные условия для первого этапа записываются в виде соотношений

$$T_1 = T_{\text{sub}}, \text{ при } z = 0, \tag{3}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} + D_1 E^-(x,t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + \left|E_{\text{res, 1}}\right| \text{ при } z = L_1 \text{ и } x = 0, \tag{4}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - h\left(T_2 - T_\infty\right) - \left|E_{\text{res, 2}}\right| = 0 \text{ при } x = L_2. \tag{5}$$

Радиационная составляющая $\left|E_{\text{res}, i}\right|$ в (4) и (5) определяется как

$$\left|E_{\text{res, 1}}\right| = A_1\sigma_0 T_1^4(z,t) - \varepsilon_1\sigma_0 T_2^4(x,t),$$
$$\left|E_{\text{res, 2}}\right| = A_2 E^* - \varepsilon_2\sigma_0 T_2^4(x,t),$$

где h — коэффициент теплоотдачи, σ_0 — постоянная Стефана–Больцмана, ε_i — степень черноты, E^* — постоянный падающий поток, i = 1, 2. В (4) второй член слева отвечает за проникновение излучения через толщу льда, члены, входящие в $\left|E_{\text{res, 1}}\right|$, представляют собой плотности потоков, определяющие поглощение и испускание излучения с поверхностей подложки и льда соответственно, при этом предполагается справедливость закона Кирхгофа: $A_i = \varepsilon_i$. Система уравнений (1) и (2) дополняется начальным условием $T_1(z,0) = T_2(x,0) = T_{\text{sub}}$. На этапе таяния льда фиксируется температура правой границы:

$$T(x,t) = T_f, \quad \text{при } x = L_2(t). \tag{6}$$

Граничное условие (4) преобразуется в условие Стефана с учетом возникающей на поверхности тонкой пленки талой воды. Полагаем, что температура пленки является изотермической, отсутствует градиент температуры, а толщина самой пленки намного меньше толщины льда:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - h\left(T_{\text{fil}} - T_\infty\right) - \left|E_{\text{res, fil}}\right| = \rho_2\gamma \frac{\partial L_2}{\partial t}, \tag{7}$$

где $\left|E_{\text{res, fil}}\right|$ имеет следующий вид:

$$\left|E_{\text{res, fil}}\right| = A_2 E^* + \varepsilon_2\sigma_0\left(T_{\text{fil}}^4 - T_2^4(x,t)\right), \; x = L_2(t). \tag{8}$$

Здесь T_f = 273,15 K — температура таяния воды, T_{fil} = 277,15 K — температура пленки воды. В условии (7) учтена теплоотдача с внешней поверхности пленки воды, в (8) — собственное излучение пленки и правой поверхности.

Предположение о наличии тонкой пленки воды на поверхности льда не противоречит однофазному приближению задачи Стефана, т.к. в самой пленке не происходит переноса энергии и она выступает только в качестве дополнительного краевого условия на межфазной поверхности с постоянными величинами. Тепловая задача решается только в толще льда на вертикальной подложке.

Условие Стефана без учета пленки воды (как и в работе [10]) имеет вид:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - h_2\left(T_2 - T_\infty\right) - \left|E_{\text{res},\,2}\right| = \rho_2 \gamma \frac{\partial L_2}{\partial t}. \tag{9}$$

Безразмерные уравнения (1), (2) с граничными условиями (3) запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial \theta_1(\zeta,\eta)}{\partial \eta} = AX^2 \frac{\partial^2 \theta_1(\zeta,\eta)}{\partial \zeta^2}, \text{ при } 0<\zeta<1, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \theta_2(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{N}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \text{ при } 0<\xi<1, \tag{11}$$

$$\theta_1 = \theta_{\text{sub}} = \text{const}, \text{ при } \zeta = 0; \tag{12}$$

$$-\Lambda X \frac{\partial \theta_1(\zeta,\eta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \theta_2(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{N}\left(\frac{\varepsilon_1}{4}\left(\theta_1^4 - \theta_2^4\right) - D_1 \Phi^-(\xi,\eta)\right), \text{ при } \zeta = 1 \text{ и } \xi = 0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial \theta_2(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \text{Bi}\left(\theta_\infty - \theta_2\right) - \frac{\varepsilon_2}{N}\left[\Phi^+(\xi,\eta) + \Phi^* - \frac{\theta_2^4}{4}\right] = 0, \text{ при } \xi = 1. \tag{14}$$

Начальные условия для уравнений (7)–(8) имеют вид: $\theta_1(\zeta,0) = \theta_2(\xi,0) = \theta_{\text{sub}}$. Здесь $\zeta = z/L_1$ — безразмерная координата подложки, $\xi = x/L_2(0)$ — безразмерная координата льда; $\theta_i = T_i/T_f$, где i = 1, 2, ∞, sub, fil — безразмерная температура подложки, льда, окружающей среды, левой границы подложки и пленки соответственно; $\eta = \left(a_2 \cdot t\right)/L_2^2$ — безразмерное время; $a_i = \lambda_i / c_{pi}\rho_i$ — коэффициент температуропроводности, i = 1, 2; $\text{Bi} = L_2 h/\lambda_2$ — число Био; $\Lambda = \lambda_1/\lambda_2$, $X = L_2(0)/L_1$, $A = a_1/a_2$ — отношение коэффициентов теплопроводности, начальных длин и температуропроводностей подложки и льда соответственно; $N = \lambda_2 \Big/ \left(4\sigma_0 T_f^3 L_2(0)\right)$ — радиационно-кондуктивный параметр, $\Phi^\pm = E^\pm \Big/ \left(4\sigma_0 T_f^4\right)$ — безразмерная плотность результирующего потока излучения, $\Phi^* = E^* \Big/ \left(4\sigma_0 T_f^4\right)$ — безразмерная плотность потока падающего излучения.

Авторы работы [10] указали, что длинноволновое излучение с T_b = 800 K сглаживает неровности облучаемой границы и лед имеет гладкую, без шероховатостей, поверхность. В этой связи на этапе таяния удобно использовать переход к безразмерным координатам в толще льда с привлечением лагранжевых преобразований $\xi = x/L_2(t)$ [8, 9]. Такая переменная позволяет фиксировать координату фронта фазового перехода в границах $0 \le \xi \le 1$, при этом сам фронт становится плоскопараллельным (метод выпрямления фронтов).

Уравнение энергии (2) и граничные условия (4) преобразуются к виду

$$\frac{\partial \theta_2(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \xi \frac{\dot{s}}{s}\cdot\frac{\partial \theta_2(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{s^2}\cdot\frac{\partial^2 \theta_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{sN}\cdot\frac{\partial \Phi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \xi}, \text{ при } 0<\xi<1, \tag{15}$$

$$\Lambda X \frac{\partial \theta_1}{\partial \zeta} = \frac{1}{s}\cdot\frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} + \frac{1}{N}\left(\frac{A_1}{4}\left(\theta_1^4 - \theta_2^4\right) + D_1 \Phi(0,\eta)\right), \text{ при } \zeta = 1 \text{ и } \xi = 0, \tag{16}$$

а граничное условие (6) и условие Стефана (7) с учетом (8) принимает вид

$$\theta_2(\xi,\eta)=1,\ \frac{1}{s}\cdot\frac{\partial\theta_2(\xi,\eta)}{\partial\xi}+\mathrm{Bi}\left(\theta_{\mathrm{fil}}-\theta_\infty\right)-\frac{A_2}{N}\left[\Phi^+(\xi,\eta)+\Phi^*+\frac{\theta_{\mathrm{fil}}^4}{4}-\frac{\theta_2^4}{4}\right]=\frac{\dot{s}}{\mathrm{St}}\ \text{при}\ \xi=1. \quad (17)$$

Условие без пленки (6) записывается в виде соотношения

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{\partial\theta_2(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\mathrm{Bi}\left(\theta_\infty-\theta_2\right)-\frac{A_2}{N\theta_b^4}\left[\Phi^+(\xi,\eta)+\Phi^*-\frac{\theta_2^4}{4}\right]=\frac{\dot{s}}{\mathrm{St}}. \quad (18)$$

Здесь $s(\eta)=L_2(t)/L_2(0)$, $\dot{s}=ds/d\eta$ — скорость распространения фронта плавления, $\mathrm{St}=T_f c_{p2}/\gamma$ — число Стефана. Краевые условия (15)–(18) дополняются начальными условиями $\theta_2(\xi,0)=f(\xi)$, $s(0)=1$.

Широкие возможности по простоте решения и эффективности получения результатов представляет модифицированный метод средних потоков [3, 7]. В рамках этого метода уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной поглощающей среды. Дифференциальный безразмерный аналог уравнения переноса излучения для полусферических потоков $\Phi^\pm$, входящих в качестве источникового члена $E(x,\ t)$ в уравнение (1), представляется в виде [3]

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\left(\Phi^+(\tau,\eta)-\Phi^-(\tau,\eta)\right)+\left(m^+(\tau)\Phi^+(\tau,\eta)-m^-(\tau)\Phi^-(\tau,\eta)\right)=n^2\Phi_0,\\ \frac{d}{d\tau}\left(m^+(\tau)l^+(\tau)\Phi^+(\tau,\eta)-m^-(\tau)l^-(\tau)\Phi^-(\tau,\eta)\right)+\left(\Phi^+(\tau,\eta)-\Phi^-(\tau,\eta)\right)=0.\end{gathered} \quad (19)$$

Граничные условия для системы уравнений (19) в безразмерных переменных записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\Phi^+(0,\eta)=A_1n^2\frac{\theta_2^4(0,\eta)}{4}+D_1\frac{\theta_1^4(1,\eta)}{4}+\left(1-\frac{1-R_1}{n^2}\right)\Phi^-(0,\eta),\\ \Phi^-(1,\eta)=A_2n^2\frac{\theta_2^4(1,\eta)}{4}+D_2F^*+\left[1-\frac{1-R_2}{n^2}-A_2\left(\frac{1+n^2}{n^2}\right)\right]\Phi^+(1,\eta),\end{gathered} \quad (20)$$

здесь $\Phi^\pm(\tau,\eta)=\dfrac{2\pi\int_{0(-1)}^{1(0)}I(\tau,\mu)\,\mu d\mu}{4\sigma_0T_r^4}$, $m^\pm(\tau)=\dfrac{\int_{0(-1)}^{1(0)}I(\tau,\mu)\,d\mu}{\int_{0(-1)}^{1(0)}I(\tau,\mu)\mu d\mu}$, $l^\pm(\tau)=\dfrac{\int_{0(-1)}^{1(0)}I(\tau,\mu)\mu^2d\mu}{\int_{0(-1)}^{1(0)}I(\tau,\mu)\mu d\mu}$,

$\Phi_0=B_\nu\Big/\left(4\sigma_0T_f^4\right)$ — безразмерная плотность равновесного излучения, B_ν — функция Планка излучения абсолютно черного тела; значения коэффициентов $m^\pm, l^\pm$ определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения [3, 7].

Решение краевой задачи сводится к определению температур $\theta_1(\zeta,\eta)$ и $\theta_2(\xi,\eta)$ и плотностей потоков результирующего излучения $\Phi(\xi,\eta)$ в области $\{G=0\le\xi\le1,$ $0\le\eta\le\eta_1\}$, представляющей собой плоский слой чистого, поглощающего, излучающего и нерассеивающего льда. Положение фронта фазового перехода $s(\eta)$ изменяется от 1 до 0. Краевая задача (10)–(18) решается конечно-разностным методом, нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. При решении радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (19), (20) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость такого метода решения позволяет получать результаты с высокой степенью точности.

Анализ

Ниже представлены результаты численного моделирования таяния льда на подложке со следующими физическими параметрами: толщина подложки L_1 = 0,015 м, начальная толщина льда $L_2(0)$ = 0,045 м, температура левой границы подложки и начальная температура подложки и льда T_{sub} = 256,15 K, температура атмосферы внутри камеры поддерживается при постоянном значении T_∞ = 273,15 K, равном температуре таяния льда T_f, постоянная плотность падающего потока излучения E^* = 1162,22 Вт/м^2. Теплофизические свойства подложки и льда имеют значения: теплопроводность бакелита и льда соответственно λ_1 = 0,232 и λ_2 = 1,9 Вт/(м·K); a_1 = 1,1·10^{-7} м^2/с, a_2 = 9,3·10^{-7} м^2/с; скрытая теплота фазового перехода γ = 335 кДж/кг. Оптические параметры льда следующие: коэффициент преломления n = 1,31, коэффициент объемного поглощения с учетом длинноволновой области a = 1000 м$^{-1}$ [12], коэффициенты отражения $r_{1,2}$ = 0,063, степень черноты на правой границе ε_2 = 0,97.

При решении задачи варьировались два параметра — степень черноты ε_1 на левой границе и коэффициент теплоотдачи от правой границы льда. На первом этапе степень черноты левой, сопряженной с подложкой, границы льда принята равной ε_1 = 0,002. На втором этапе — ε_1 = 0. Такой подход не позволяет температуре левой границы достигнуть температуры плавления раньше времени. Коэффициент теплоотдачи на первом этапе принимаем равным h = 7 Вт/(м^2·K), что равно теплоотдаче от вертикальной стены. На втором этапе принимается h = 80 Вт/(м^2·K), как в расчетах в статье [10].

На рис. 2 показано температурное поле в слое льда в разные моменты времени. Кривые между *1* и *2* относятся к этапу нагрева. Наличие высоких значений коэффициента поглощения на правой границе (ε_2) и коэффициента объемного поглощения (α) в среде приводит к глубокому прогреву льда. Заметно влияние излучения и на левой границе. На этапе таяния температурные кривые (линии между *2* и *3*) определяются преобладающим теплообменном теплопроводностью. Постоянные значения плотностей потока результирующего излучения $\Phi(\xi, \eta)$ (рис. 3) по всему объему в разное время свидетельствуют, что градиент потока в среде отсутствует и разность между собственным и поглощенным излучениями остается неизменной. Данное обстоятельство вызвано большой оптической толщиной серой среды $\tau = \alpha x(t)$.

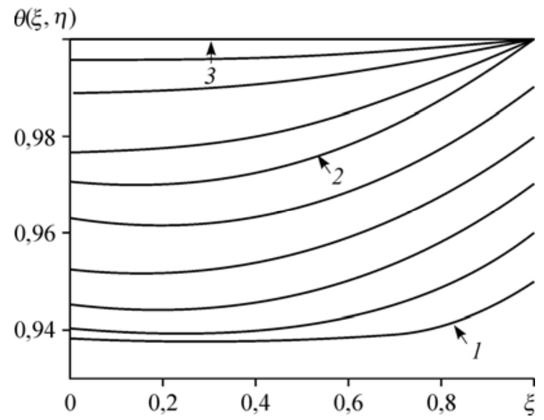

Рис. 2. Температурное поле в процессе нагрева и таяния льда.

1 — начало нагрева, *2* — начало таяния, *3* — конец расчета таяния.

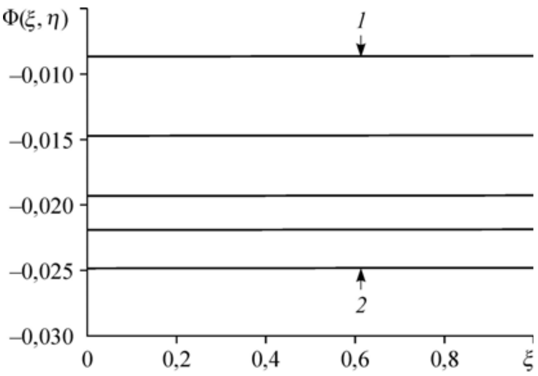

Рис. 3. Плотность потока результирующего излучения в процессе нагрева.

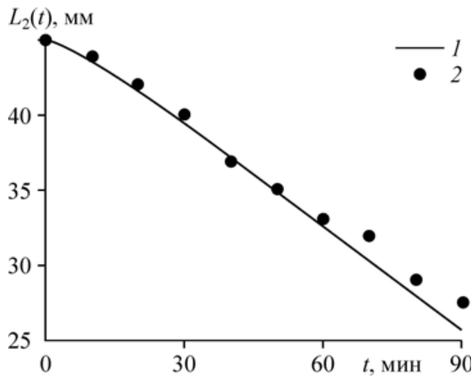

Рис. 4. Темп таяния льда.
1 — расчет настоящей работы,
2 — данные работы [10].

Расчет темпа таяния льда и его сравнение с экспериментальными данными [10] показан на рис. 4 (для удобства сравнения с экспериментом единицы измерения приведены в соответствии с представленными в [10]). Видно, что расчет с учетом тонкой пленки воды на поверхности хорошо согласуется с экспериментом. Нагрев левой границы со временем показан на рис. 5. Здесь результаты расчета количественно расходятся с экспериментальными данными, но согласуются качественно. Такое расхождение связано с использованной в настоящей работе математической моделью. В модели левая граница льда не поглощает, но отражает излучение. В свою очередь излучение, отражаясь от границ, выравнивает температуру по всему объему среды (кривые между *2* и *3* на рис 2), в том числе и у левой границы.

Важность учета стекающей пленки воды отражена на рис. 6, где представлены кривые темпа виртуального таяния и нагрева левой границы льда без пленки. В данном случае этап таяния сильно растягивается по времени и согласования расчетных данных с экспериментальными не наблюдается.

Заключение

Построена математическая модель эксперимента по нагреву и последующему таянию льда при его облучении от длинноволнового источника. Для решения, касающегося радиационной части, использовалась модель серой среды. Учет наличия тонкой пленки

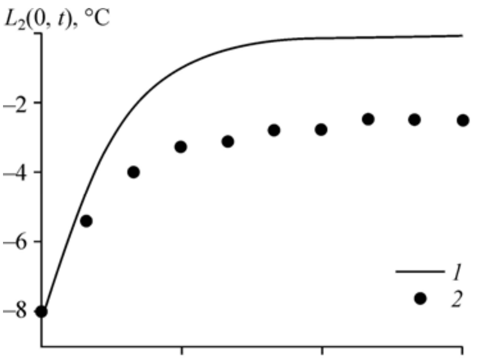

Рис. 5. Темп нагрева левой границы льда при его таянии.
Обозначения см. на рис. 4.

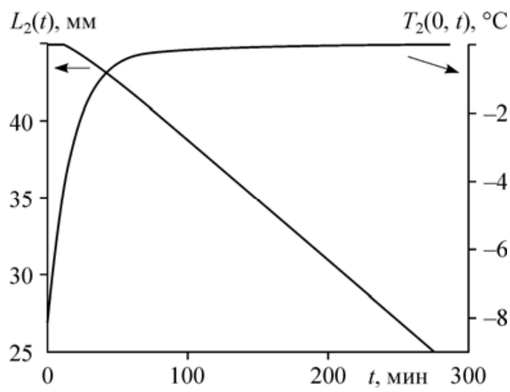

Рис. 6. Темпы таяния (левая ордината) и нагрева (правая ордината) левой границы льда без учета пленки воды.

талой воды на облучаемой поверхности хорошо согласуется с данными эксперимента по скорости таяния льда.

Согласование расчетных и опытных данных позволяет считать реализованной верификацию однофазной задачи Стефана для полупрозрачной среды. В то же время, обозначенная проблема с ростом температуры на границе подложка–лед требует дальнейших расчетов и улучшений предложенной математической модели.

Список литературы

1. **Vuik C.** Some historical notes on the Stefan problem // Nieuw Archief voor Wiskunde, 4 serie. 1993. Vol. 11, No. 2. P. 157–167.
2. **Мейрманов А.М.** Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 236 с.
3. **Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А.** Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 197 с.
4. **Abrams M., Viskanta R.** The effect of radiative heat transfer upon the melting and solidification of semitransparent crystals // J. Heat Transfer. (Trans. ASME). 1974. Vol. 96, Iss. 2. P. 184–190.
5. **Chan S.H., Cho D.H., Kocamustafaogullaru G.** Melting and solidification with internal radiative transfer — a generalize phase change model // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1983. Vol. 26, No. 4. P. 621–633.
6. **Petrov V.A., Titov V.E., Vorobyev A.Yu.** Numerical simulation of concentrated laser radiation heating of refractory oxides // High Temperatures — High Pressure. 1999. Vol. 31. P. 267–274.
7. **Рубцов Н.А.** Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, 1984. 277 с.
8. **Le Dez V., Yousefian F., Vaillon R., Lemonnier D., Lallemand M.** Probleme de Stefan direct dans un milieu semi-transparent gris // J. Phys. III France. 1996. Vol. 6. P. 373–390.
9. **Rubtsov N.A., Savvinova N.A., Sleptsov S.D.** Simulation of the one-phase stefan problem in a layer of a semitransparent medium // J. Engng Thermophysics. 2015. Vol. 24, No. 2. P. 123–138.
10. **Seki N., Sugawara M., Fukusaki S.** Radiative melting of ice layer adhering to a vertical surface // Wärme- und Stoffübertragung. 1979. Vol. 12, Iss. 2. P. 137–144.
11. **Song B., Viskanta R.** Deicing of solids using radiant heating // J. Thermophysics and Heat Transfer. 1990. Vol. 4, No. 3. P. 311–317.
12. **Красс М.С., Мерзликин В.Г.** Радиационная теплофизика снега и льда. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 262 с.

Статья поступила в редакцию 5 июня 2017 г.,
после доработки — 15 ноября 2017 г.