

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАЩИТЫ ОТ ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОГО ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ

В. И. Цветков

(Москва)

В работе [1] рассматривалась задача о построении оптимальной формы защиты (в смысле минимума веса) для моноэнергетического гамма-излучения линейного, дискового и цилиндрического источников. Ниже для тех же геометрических форм источников приводится решение задачи о построении оптимальной формы защиты для случая полихроматического излучения. Как и в упомянутой работе [1], рассеянием излучения в окружающей среде пренебрегается, а излучение источников считается изотропным. Многократное рассеяние в защите учитывается путем использования аналитического выражения для фактора накопления.

1. Рассмотрим вначале линейный источник. Поток энергии гамма-квантов в точке O (см. фиг. 1), отстоящей на расстоянии h от линейного источника длиной $2r_0$ и удельной интенсивностью S , будет равен [2]

$$K = \frac{S}{2\pi h} \int_0^{\varphi_0} \sum_{i=1}^j n_i E_i B_i \exp(-\mu_i x) d\varphi \quad (1.1)$$

Здесь x — толщина защиты, B_i — энергетический фактор накопления, учитывающий многократное рассеяние гамма-излучения в материале защиты.

Воспользуемся аналитическим выражением для энергетического фактора накопления, которое имеет вид [3]

$$B = A_1 \exp(-\alpha_1 \mu x) + A_2 \exp(-\alpha_2 \mu x) \quad (1.2)$$

Здесь $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ — численные коэффициенты для аналитического представления энергетического фактора накопления. С учетом (1.2) выражение (1.1), полагая $\mu_i' = \mu_i(1 + \alpha_{1i})$ и $\mu_i'' = \mu_i(1 + \alpha_{2i})$, запишем так:

$$K = \frac{S}{2\pi h} \int_0^{\varphi_0} \sum_{i=1}^j n_i E_i [A_{1i} \exp(-\mu_i' x) + A_{2i} \exp(-\mu_i'' x)] d\varphi \quad (1.3)$$

Здесь j — число линий гамма-спектра, n_i — выход гамма-квантов данной энергии E_i на 1 распад ядра, μ_i — коэффициент ослабления гамма-лучей в материале. Вес защиты в предположении $x \ll R$ (фиг. 1)

$$G = 2ht\rho \int_0^{\varphi_0} x \sec \varphi d\varphi \quad (1.4)$$

Здесь h — расстояние от защищаемой точки O до центра источника, ρ — удельный вес материала защиты, t — продольный размер защиты.

Ставится задача отыскания такой формы защиты, которая обеспечивает заданный поток энергии в защищаемой точке $K = K_0$ с минимальным весом G . Перейдем к безразмерным переменным

$$\kappa = \frac{2\pi K h}{SE}, g = \frac{G\rho}{2ht\rho}, \xi = x\mu, \lambda_i' = \frac{\mu_i'}{\mu}, \lambda_i'' = \frac{\mu_i''}{\mu}, \nu_i = \frac{E_i}{E} \quad (1.5)$$

Здесь коэффициент ослабления μ соответствует энергии

$$E = \frac{n_1 E_1 + \dots + n_j E_j}{n_1 + \dots + n_j} \quad (1.6)$$

Выразим интегралы (1.3) и (1.4) через переменные (1.5) в виде системы

$$\frac{d\kappa}{d\varphi} = \sum_{i=1}^j n_i v_i [A_{1i} \exp(-\lambda_i' \zeta) + A_{2i} \exp(-\lambda_i'' \zeta)], \quad \frac{dg}{d\varphi} = \zeta \sec \varphi \quad (1.7)$$

с граничными условиями

$$\kappa(0) = 0, \quad \kappa(\varphi_0) = \kappa_0, \quad g(0) = 0 \quad (0 < \varphi_0 < 1/2\pi) \quad (1.8)$$

Сформулируем вариационную задачу следующим образом (аналогично [1]): для системы (1.7) в классе кусочно-непрерывных функций найти такое управление $\zeta(\varphi) \geq 0$, которое дает минимум конечному значению координаты $g(\varphi_0)$ и обеспечивает выполнение граничных условий (1.8). Сформулированную вариационную задачу будем решать при помощи метода Л. С. Понтрягина [4]. Составим функцию Гамильтона

$$H = p_\kappa \sum_{i=1}^j n_i v_i [A_{1i} \exp(-\lambda_i' \zeta) + A_{2i} \exp(-\lambda_i'' \zeta)] + p_g \zeta \sec \varphi \quad (1.9)$$

где импульсы p_κ и p_g оказываются постоянными, так как

$$\frac{dp_\kappa}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \kappa} = 0, \quad \frac{dp_g}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial g} = 0 \quad (1.10)$$

Согласно работе [4], импульс p_g , соответствующий минимизируемой координате, можно положить равным -1 , а импульс p_κ — некоторой константе p_0 . Тогда будем иметь

$$H = p_0 \sum_{i=1}^j \psi_i(\zeta) - \zeta \sec \varphi, \quad \psi_i(\zeta) = n_i v_i [A_{1i} \exp(-\lambda_i' \zeta) + A_{2i} \exp(-\lambda_i'' \zeta)] \quad (1.11)$$

На основании принципа максимума оптимальное управление $\zeta(\varphi) \geq 0$ должно доставлять абсолютный максимум функции H (см. (1.11)). Из анализа выражения для частной производной

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = -\left(p_0 \sum_{i=1}^j \eta_i(\zeta) + \sec \varphi\right), \quad \eta_i(\zeta) = n_i v_i [\lambda_i' A_{1i} \exp(-\lambda_i' \zeta) + \lambda_i'' A_{2i} \exp(-\lambda_i'' \zeta)]$$

следует, что на тех участках, где

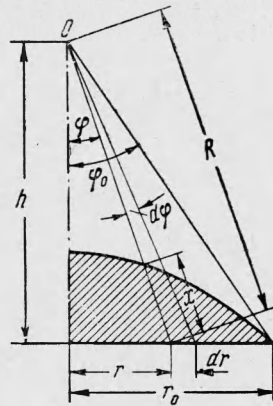
$$p_0 [\eta_1(0) + \dots + \eta_j(0)] \geq -\sec \varphi$$

максимум H достигается при $\zeta = 0$. Если же

$$p_0 [\eta_1(0) + \dots + \eta_j(0)] \leq -\sec \varphi$$

то $\zeta(\varphi)$ определяется из условия $\partial H / \partial \zeta = 0$

$$p_0 [\eta_1(\zeta) + \dots + \eta_j(\zeta)] + \sec \varphi = 0 \quad (1.12)$$



Фиг. 1

Обозначим решение уравнения (1.12) через $\zeta_0'(\varphi)$. Тогда оптимальная форма защиты определяется уравнением

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \zeta_0'(\varphi) & \text{при } \cos \varphi \geq -1/p_0' \\ 0 & \text{при } \cos \varphi \leq -1/p_0' \end{cases} \quad (p_0' < 0) \quad (1.13)$$

$$p_0' = p_0 \sum_{i=1}^j \eta_i(0) = p_0 \sum_{i=1}^j n_i v_i (\lambda_i' A_{1i} + \lambda_i'' A_{2i})$$

Если $\cos \varphi_0 \leq -1/p_0'$, то оптимальный закон $\zeta(\varphi)$ включает оба участка (1.13). Величина p_0' (или p_0) определяется из уравнения (1.12) на основании условия $\zeta(\varphi_*) = 0$

$$p_0' = -\sec \varphi_*, \quad \text{или} \quad p_0 = -\frac{\sec \varphi_*}{\eta_1(0) + \dots + \eta_j(0)} \quad (1.14)$$

Подставляя этот результат в уравнение (1.12), получим

$$\sum_{i=1}^j \eta_i(\zeta) = \frac{\sec \varphi_*}{\cos \varphi} \sum_{i=1}^j \eta_i(0) \quad (1.15)$$

и оптимальный закон $\zeta(\varphi)$ будет определяться выражением

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \zeta_0(\varphi) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_* \\ 0 & \text{при } \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Здесь $\zeta_0(\varphi)$ — решение уравнения (1.15).

Уравнение (1.16) справедливо в следующем интервале изменения величины потока энергии гамма-квантов:

$$\int_0^{\varphi_0} \sum_{i=1}^j \psi_i(\zeta) d\varphi \leq \kappa_0 \leq \varphi_0 \sum_{i=1}^j n_i v_i \quad (1.17)$$

Если допустимый поток κ_0 меньше, чем (1.17), т. е.

$$0 < \kappa_0 \leq \int_0^{\varphi_0} \sum_{i=1}^j \psi_i(\zeta) d\varphi, \quad (1.18)$$

то толщина защиты всюду больше нуля ($\varphi_* \geq \varphi_0$). В этом случае p_0 определяется. Преобразуем уравнение (1.12) к виду

$$-p_0 \cos \varphi [\eta_1(\zeta) + \dots + \eta_j(\zeta)] = 1 \quad (1.19)$$

Тогда с учетом (1.19) первое уравнение из системы (1.7) можно записать в виде

$$\frac{d\kappa}{d\varphi} = -p_0 \cos \varphi \sum_{i=1}^j \eta_i(\zeta) \sum_{i=1}^j \psi_i(\zeta), \quad \kappa_0 = -p_0 \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi \sum_{i=1}^j \psi_i(\zeta) \sum_{i=1}^j \eta_i(\zeta) d\varphi \quad (1.20)$$

Определив константу p_0 из (1.20) и подставив ее в выражение (1.12), получим

$$\kappa_0 \cos \varphi \sum_{i=1}^j \eta_i(\zeta) = \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi \sum_{i=1}^j \psi_i(\zeta) \sum_{i=1}^j \eta_i(\zeta) d\varphi \quad (1.21)$$

Решая уравнение (1.21) относительно $\zeta(\varphi)$, получим оптимальную форму защиты. Вес защиты определяется интегрированием второго уравнения из (1.7). При этом $\zeta(\varphi)$ подставляется из (1.16) в интервале (1.17) и из (1.21) в интервале (1.18).

2. Перейдем к определению оптимальной формы защиты для случая дискового источника. Поток энергии гамма-квантов в точке O (см. фиг. 2) определяется выражением [2]

$$K = \frac{1}{2} \Gamma \int_0^{\varphi_0} \operatorname{tg} \varphi \sum_{i=1}^j \psi_i(\xi) d\varphi \quad (2.1)$$

(вид функции $\psi(\xi)$ см. согласно (1.14)). Вес защиты G в предположении $x \ll R$ равен

$$G = 2\pi h^2 \rho \int_0^{\varphi_0} \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi x d\varphi \quad (2.2)$$

Здесь h — расстояние от защищаемой точки O до центра источника, ρ — удельный вес материала защиты, Γ — поверхностная интенсивность дискового источника.

Безразмерные переменные остаются прежними (1.5) за исключением κ и g , для которых будем иметь

$$\kappa = \frac{2K}{\Gamma E}, \quad g = \frac{G\mu}{2\pi h^2 \rho} \quad (2.3)$$

Как и в случае линейного источника, запишем интегралы (2.1) и (2.2) через безразмерные переменные (1.5) и (2.3) в виде системы уравнений

$$\frac{d\kappa}{d\varphi} = \operatorname{tg} \varphi \sum_{i=1}^j \psi_i(\xi), \quad \frac{dg}{d\varphi} = \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi \xi \quad (2.4)$$

Граничные условия остаются прежними (1.8).

Согласно принципу максимума, оптимальное управление $\xi(\varphi) \geq 0$ должно доставлять абсолютный максимум функции

$$H = \operatorname{tg} \varphi \{p_0 [\psi_1(\xi) + \dots + \psi_j(\xi)] - \xi \sec \varphi\} \quad (2.5)$$

Поскольку дальнейший ход рассуждений аналогичен тому, который был приведен выше для линейного источника, ограничимся записью конечных результатов.

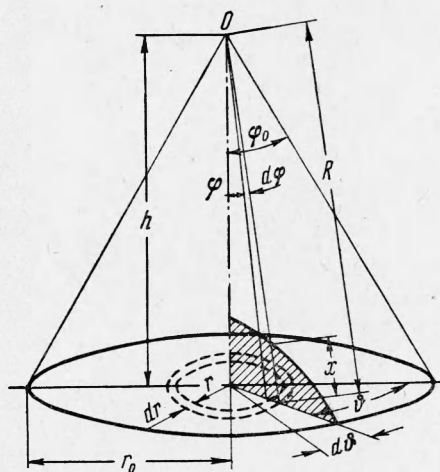
Решение для дискового источника полностью совпадает с решением (1.16). Интегрирование первого уравнения из (2.4) дает

$$\kappa_0 = \int_0^{\varphi_*} \operatorname{tg} \varphi \sum_{i=1}^j \psi_i(\xi) d\varphi + \left(\ln \frac{\cos \varphi_*}{\cos \varphi_0} \right) \sum_{i=1}^j n_i v_i \quad (2.6)$$

Решение для дискового источника (1.16) справедливо в следующем интервале изменения величины потока:

$$\int_0^{\varphi_0} \operatorname{tg} \varphi \sum_{i=1}^j \psi_i(\xi) d\varphi \leq \kappa_0 \leq (\ln \sec \varphi_0) \sum_{i=1}^j n_i v_i \quad (2.7)$$

На фиг. 3 в качестве примера приведен график зависимости φ_* от κ_0 , построенный для гамма-спектра радиоизотопа Co^{60} (материал защиты — свинец).



Фиг. 2

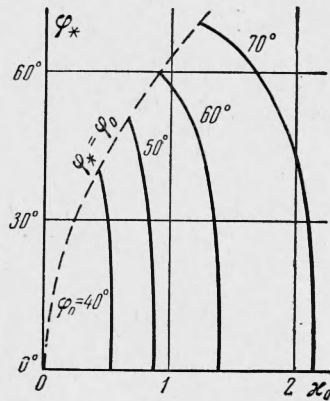
Аналогично соотношению (1.24), получим уравнение

$$\kappa_0 \cos \varphi \sum_{i=1}^j \eta_i(\zeta) = \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \sum_{i=1}^i \psi_i(\zeta) \sum_{i=1}^j \eta_i(\zeta) d\varphi \quad (2.8)$$

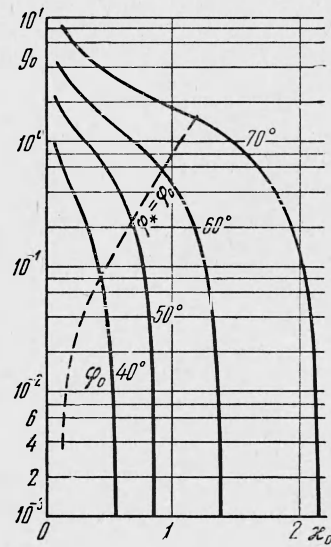
решение которого $\zeta(\varphi)$ справедливо в интервале

$$0 < \kappa_0 \leq \int_0^{\varphi_0} \operatorname{tg} \varphi \sum_{i=1}^j \psi_i(\zeta) d\varphi \quad (2.9)$$

Вес защиты определяется таким же путем, как и в случае линейного источника. На фиг. 4 приведен график зависимости $g_0(\kappa_0)$ при фиксированных значениях φ_0 для гамма-спектра радиоизотопа Co^{60} (материал защиты — свинец). Пунктиром нанесена кривая для $\varphi_* = \varphi_0$, разделяющая области (2.7) и (2.9).



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Найдем оптимальную форму защиты для случая цилиндрического источника. Для цилиндрического источника с самопоглощением поток энергии гамма-квантов в точке O (см. фиг. 5) будет равен [5]

$$K = \frac{1}{2} \gamma \left\{ \int_0^{\varphi_k} \sin \varphi \sum_{i=1}^j \frac{B_i n_i E_i}{\mu_{ei}} \exp(-\mu_{\tau i} x) [1 - \exp(-\mu_{ei} b \sec \varphi)] d\varphi + \right. \\ \left. + \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} \sin \varphi \sum_{i=1}^j \frac{B_i n_i E_i}{\mu_{ei}} \exp(-\mu_{\tau i} x) \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu_{ei} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0)\right) \right] d\varphi \right\} \quad (3.1)$$

Здесь γ — объемная интенсивность цилиндрического источника. Индексы ε и τ относятся соответственно к источнику и защите.

Для учета многократного рассеяния гамма-лучей в защите, как и выше, воспользуемся аналитическим выражением для энергетического фактора накопления

$$B = A_1^{(\tau)} \exp(-\alpha_1^{(\tau)} \mu_{\tau} x) + A_2^{(\tau)} \exp(-\alpha_2^{(\tau)} \mu_{\tau} x) \quad (3.2)$$

После подстановки (3.2) в соотношение (3.1) получим

$$K = \frac{1}{2} \gamma \left\{ \int_0^{\varphi_k} \sin \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\psi_{\tau i}(x)}{\mu_{\varepsilon i}} [1 - \exp(-\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi)] d\varphi + \right. \\ \left. + \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} \sin \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\psi_{\tau i}(x)}{\mu_{\varepsilon i}} \left[1 - \exp \left(-\frac{\mu_{\varepsilon i} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) \right) \right] d\varphi \right\} \quad (3.3)$$

$$\psi_{\tau i}(x) = n_i E_i [A_{1i}^{(\tau)} \exp(-\mu_{\tau i}' x) + A_{2i}^{(\tau)} \exp(-\mu_{\tau i}'' x)]$$

$$\mu_{\tau i}' = \mu_{\tau i} (1 + \alpha_{1i}^{(\tau)}), \quad \mu_{\tau i}'' = \mu_{\tau i} (1 + \alpha_{2i}^{(\tau)})$$

Выражение для веса защиты остается прежним (2.2). Безразмерные переменные для дискового источника остаются справедливыми и для цилиндрического. Только для κ вместо поверхностной интенсивности Γ необходимо взять объемную γ . Тогда выражение (3.3) примет вид

$$\kappa = \int_0^{\varphi_k} \sin \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\psi_{\tau i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} [1 - \exp(-\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi)] d\varphi + \\ + \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} \sin \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\psi_{\tau i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\mu_{\varepsilon i} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) \right] \right\} d\varphi \quad (3.4)$$

$$\psi_{\tau i}(\xi) = n_i v_i [A_{1i}^{(\tau)} \exp(-\lambda_{\tau i}' \xi) + A_{2i}^{(\tau)} \exp(-\lambda_{\tau i}'' \xi)], \quad \lambda_{\varepsilon i} = \mu_{\varepsilon i} / \mu$$

В системе (2.4) первое уравнение, в соответствии с (3.4), имеет вид

$$\frac{d\kappa}{d\varphi} = f(\varphi) \sin \varphi, \quad f(\varphi) = \begin{cases} f_1(\varphi) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_k \\ f_2(\varphi) & \text{при } \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$f_1(\varphi) = \sum_{i=1}^j \frac{\psi_{\tau i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} [1 - \exp(-\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi)]$$

$$f_2(\varphi) = \sum_{i=1}^j \frac{\psi_{\tau i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\mu_{\varepsilon i} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) \right] \right\}$$

а второе уравнение останется без изменения. Оптимальное управление $\zeta(\varphi)$ найдем из условия абсолютного максимума функций (ср. [1]):

$$H^- = \operatorname{tg} \varphi (p_0 f_1(\varphi) \cos \varphi - \zeta \sec \varphi) \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_k \quad (3.6)$$

$$H^+ = \operatorname{tg} \varphi (p_0 f_2(\varphi) \cos \varphi - \zeta \sec \varphi) \quad \text{при } \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0 \quad (3.7)$$

Для первого участка ($0 \leq \varphi \leq \varphi_k$) получим уравнение

$$p_0 \cos \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\eta_{\tau i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} [1 - \exp(-\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi)] + \sec \varphi = 0 \quad (3.8)$$

Обозначим решение уравнения (3.8) через $\zeta_0'(\varphi)$. Тогда оптимальная форма защиты будет определяться выражением

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \zeta_0'(\varphi) & \text{при } \Psi(\varphi) \geq -1/p_0 \\ 0 & \text{при } \Psi(\varphi) \leq -1/p_0 \end{cases} \quad (p_0 < 0) \quad (3.9)$$

$$\Psi(\varphi) = \cos^2(\varphi) \sum_{i=1}^j \frac{\eta_{\tau i}(0)}{\lambda_{\varepsilon i}} [1 - \exp(-\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi)]$$

$$\eta_{\tau i}(\xi) = n_i v_i [\lambda_{\tau i}' A_{1i}^{(\tau)} \exp(-\lambda_{\tau i}' \xi) + \lambda_{\tau i}'' A_{2i}^{(\tau)} \exp(-\lambda_{\tau i}'' \xi)]$$

Константа p_0 определяется из (3.8) на основании условия $\zeta(\varphi_*) = 0$

$$p_0 = -\frac{1}{\Psi(\varphi_*)} \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.8), получим

$$\cos^2 \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\eta_{\varepsilon i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} [1 - \exp(-\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi)] = \Psi(\varphi_*) \quad (3.11)$$

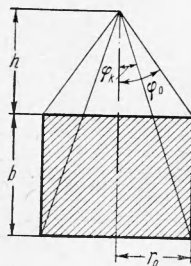
Если обозначить решение уравнения (3.11) через $\xi_0(\varphi)$, то оптимальный закон $\xi(\varphi)$ на первом участке ($0 \leq \varphi \leq \varphi_k$) будет определяться так:

$$\xi(\varphi) = \begin{cases} \xi_0(\varphi) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_* \\ 0 & \text{при } \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Выражение для потока энергии гамма-квантов будет иметь вид ¹

$$\begin{aligned} \kappa_0 = & \int_0^{\varphi_*} f_1(\varphi) \sin \varphi d\varphi + \sum_{i=1}^j \frac{n_i v_i}{\lambda_{\varepsilon i}} \left\{ \cos \varphi_* [1 - \Phi(\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi_*)] - \right. \\ & \left. - \cos \varphi_k [1 - \Phi(\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi_k)] \right\} + \sum_{i=1}^j \frac{n_i v_i}{\lambda_{\varepsilon i}} [\cos \varphi_k - \cos \varphi_0 - X_{\varphi_k, \varphi_0}(\mu_{\varepsilon i} r_0)] \\ & X_{\varphi_k, \varphi_0}(\mu_{\varepsilon} r_0) = \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} \sin \varphi \exp \left[-\frac{\mu_{\varepsilon} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) \right] d\varphi \quad (3.13) \end{aligned}$$

Этот интеграл не берется в конечном виде. В связи с этим в работе [5] были получены значения интеграла



Фиг. 5

$$X(\varphi_k, \varphi_0) = \int_0^{\varphi_k} \sin \varphi \exp \left[-\frac{\mu_{\varepsilon} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) \right] d\varphi$$

для ряда значений $(\mu_{\varepsilon} r_0)$, φ_k и φ_0 , которые сведены в таблицу. Соответствующие разности из этой таблицы дают возможность получить нужное значение интеграла X_{φ_k, φ_0} в формуле (3.13), так как

$$X_{\varphi_k, \varphi_0} = \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} = \int_0^{\varphi_0} - \int_0^{\varphi_k} = X(\varphi_0) - X(\varphi_k, \varphi_0)$$

Уравнение (3.12) справедливо в следующем интервале изменения κ_0 :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\varphi_k} f_1(\varphi) \sin \varphi d\varphi + \sum_{i=1}^j \frac{n_i v_i}{\lambda_{\varepsilon i}} [\cos \varphi_k - \cos \varphi_0 - X_{\varphi_k, \varphi_0}(\mu_{\varepsilon i} r_0)] \leq \\ & \leq \kappa_0 \leq \sum_{i=1}^j \frac{n_i v_i}{\lambda_{\varepsilon i}} \{1 - \Phi(\mu_{\varepsilon i} b) - \cos \varphi_k [1 - \Phi(\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi_k)]\} + \\ & + \sum_{i=1}^j \frac{n_i v_i}{\lambda_{\varepsilon i}} [\cos \varphi_k - \cos \varphi_0 - X_{\varphi_k, \varphi_0}(\mu_{\varepsilon i} r_0)] \quad (3.14) \end{aligned}$$

Для второго участка ($\varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0$) на основе анализа функции H^+ (3.7) получим уравнение

$$p_0 \cos \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\eta_{\varepsilon i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\mu_{\varepsilon i} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) \right] \right\} + \sec \varphi = 0 \quad (3.15)$$

¹ Здесь $\Phi(x)$ — функция Кинга, таблицы ее значений приведены в работах [6, 7].

Обозначим решение уравнения (3.15) через $\zeta_2'(\varphi)$. Тогда оптимальная форма защиты на этом участке ($\varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0$) определяется так

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \zeta_2'(\varphi) & \text{при } T(\varphi) \geq -1/p_0 \\ 0 & \text{при } T(\varphi) \leq -1/p_0 \end{cases} \quad (p_0 < 0) \quad (3.16)$$

$$T(\varphi) = \cos^2 \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\eta_{\tau i}(0)}{\lambda_{\varepsilon i}} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\mu_{\varepsilon i} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) \right] \right\}$$

$$0 \leq T(\varphi) \leq \cos^2 \varphi_k \sum_{i=1}^j \frac{\eta_{\tau i}(0)}{\lambda_{\varepsilon i}} [1 - \exp(-\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi_k)] \quad \text{при } \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0$$

В силу того что функция $T(\varphi)$ при $\varphi = \varphi_0$ обращается в нуль, точка пересечения $\varphi = \varphi_*$ всегда лежит в интервале $[0, \varphi_0]$ и периферийные области всегда остаются незащищенными.

Как и выше, константа p_0 определяется из условия $\zeta(\varphi_*) = 0$. На основании этого условия из уравнения (3.15) получим

$$p_0 = -\frac{1}{T(\varphi_*)} \quad (3.17)$$

Подставляя значение p_0 из (3.17) в уравнения (3.8) и (3.15), получим

$$\cos^2 \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\eta_{\tau i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} [1 - \exp(-\mu_{\varepsilon i} b \sec \varphi)] = T(\varphi_*) \quad (3.18)$$

$$\cos^2 \varphi \sum_{i=1}^j \frac{\eta_{\tau i}(\xi)}{\lambda_{\varepsilon i}} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\mu_{\varepsilon i} r_0}{\sin \varphi} (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) \right] \right\} = T(\varphi_*) \quad (3.19)$$

Оптимальная форма защиты на участке ($0 \leq \varphi \leq \varphi_0$) определяется так:

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \zeta_1(\varphi) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_k \\ \zeta_2(\varphi) & \text{при } \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_* \\ 0 & \text{при } \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Здесь $\zeta_1(\varphi)$ и $\zeta_2(\varphi)$ — решения уравнений (3.18) и (3.19).

Выражение (3.20) справедливо в следующем интервале изменения величины потока энергии гамма-квантов:

$$0 < \kappa_0 \leq \int_0^{\varphi_k} f_1(\varphi) \sin \varphi d\varphi + \sum_{i=1}^j \frac{n_i v_i}{\lambda_{\varepsilon i}} [\cos \varphi_k - \cos \varphi_0 - X_{\varphi_k, \varphi_0}(\mu_{\varepsilon i} r_0)] \quad (3.21)$$

Вес оптимальной защиты определяется путем интегрирования второго уравнения из (2.4). При этом $\zeta(\varphi)$ подставляется из (3.12) в интервале (3.14) и из (3.20) в интервале (3.21).

Поступила 6 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Токарев В. В., Цветков В. И. Оптимальная форма защиты от гамма-излучения. ПМТФ, 1964, № 1.
2. Роквелл Т. Защита ядерных реакторов. Изд. иностр. лит., 1958.
3. Гусев Н., Машкович В., Обвинцев Г. Гамма-излучение радиоактивных изотопов и продуктов деления. Физматгиз, 1958.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
5. Осанов Д. П. Защита от гамма-излучения, выходящего через основание цилиндрического источника. Атомная энергия, 1959, т. 6, № 3.
6. Горшков Г. В. Гамма-излучение радиоактивных тел. Изд. ЛГУ, 1956.
7. Гусев Н. Г. Справочник по радиоактивным излучениям и защите. Медгиз, 1956.