Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 5

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

УДК 534.22

А. В. Кобозев

Вычислительный центр ДВО РАН, 680063 Хабаровск

В работе предложена нелокальная математическая модель разномодульного вязкоупругого тела. Для построения используются модель вязкоупругого тела Годунова — Роменского и методика построения разномодульных сред, разработанная В. П. Мясниковым и рядом других авторов. Такой подход позволил в рамках единой модели описать реологическое поведение жидких и твердых тел, переходы от упругого состояния к пластическому, полухрупкому, хрупкому и полностью разрушенному состоянию сыпучих сред.

1. Модель разномодульного упругого тела. В евклидовом пространстве тензор упругих деформаций является тензором деформации Альманси ($\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора в декартовой системе координат $x_\alpha, \alpha = \overline{1,3}$).

Рассмотрим разложение плотности внутренней энергии E в ряд по степеням $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и энтропии s при сравнительно малых деформациях. В случае изотропного тела E зависит только от инвариантов тензора деформации $I_i(\|\varepsilon_{\alpha\beta}\|)$, $i = \overline{1,3}$. Тогда

$$\Phi = \overset{\circ}{\Phi} + \Phi'_s(s - \overset{\circ}{s}) + \frac{1}{2}\Phi''_{ss}(s - \overset{\circ}{s})^2 + \Phi'_{I_1} I_1 + \Phi''_{sI_1}(s - \overset{\circ}{s}) I_1 + \frac{1}{2}\Phi''_{I_1 I_1} I_1^2 + \frac{1}{2}\Phi'_{I_2} I_2 + \ldots \tag{1.1}$$

($\Phi = \overset{\circ}{\rho} E$, $\overset{\circ}{\rho}$ — плотность в начальный момент). Исходное состояние выберем так, что упругие напряжения равны нулю ($p_{\alpha\beta} = 0$ при $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$, тогда $\Phi'_{\varepsilon_{\alpha\beta}} = 0$. Отсюда с точностью до аддитивной постоянной $\overset{\circ}{\Phi}$ имеем

$$\Phi = \overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{T}(s - \overset{\circ}{s}) + \frac{b_1}{2}(s - \overset{\circ}{s})^2 - b_2(s - \overset{\circ}{s}) I_1 + \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha} + \ldots,$$

где $b_1 = \Phi''_{ss}$; $b_2 = -\Phi''_{sI_1}$; $\lambda = \Phi''_{I_1 I_1} + \frac{1}{2}\Phi'_{I_2}$; $\mu = -\frac{1}{4}\Phi'_{I_2}$; $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha} = I_1^2 - 2I_2$; λ, μ — параметры Ламе. По повторяющимся индексам везде производится суммирование. Далее предполагается симметрия тензоров деформаций и напряжений. При этом $T - \overset{\circ}{T} = (b_1(s - \overset{\circ}{s}) - b_2 I_1)/\overset{\circ}{\rho}$, $s - \overset{\circ}{s} = (\overset{\circ}{\rho}(T - \overset{\circ}{T}) + b_2 I_1)/b_1$ ($E'_s = T$ — температура). Из уравнения неразрывности с точностью до членов второго порядка по $\varepsilon_{\alpha\beta}$ получим $\rho = \overset{\circ}{\rho}\sqrt{\det\|\delta_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}\|} = \overset{\circ}{\rho}(1 - I_1 + \ldots)$ ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера).

Упругие напряжения определяются формулами Мурнагана [1]:

$$\begin{gathered} p_{\alpha\beta} = \rho(\delta_{\alpha k} - 2\varepsilon_{\alpha k}) E'_{\varepsilon_{k\beta}} = (1 - I_1 + \ldots)(\delta_{\alpha k} - 2\varepsilon_{\alpha k})\Phi'_{\varepsilon_{k\beta}} \approx \\ \approx \lambda I_1 \delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} - b_2(s - \overset{\circ}{s})((1 - I_1)\delta_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}) = \\ = \lambda I_1 \delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{b_2^2}{b_1} I_1 \delta_{\alpha\beta} - \frac{b_2}{b_1}\overset{\circ}{\rho}(T - \overset{\circ}{T})((1 - I_1)\delta_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Получено обобщение закона Гука, когда учитываются температурные напряжения и деформации.

Применяются различные подходы для построения моделей нерегулярных сред. Для микронеоднородных сред обычно вводятся эффективные модули упругости различного вида. Воспользуемся методикой, разработанной в [2–4].

Рассмотрим упругий потенциал вида

$$U = \frac{1}{2}(L + K(\xi))I_1^2 + [M + G(\xi)]E_2, \tag{1.3}$$

где $\xi = I_1/(\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha})^{1/2}$; $E_2 = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha} - I_1^2/3$; $L = \lambda + 2\mu/3$; $M = \mu$. Функции $K(\xi)$ и $G(\xi)$ являются аддитивными поправками к объемному модулю и модулю сдвига закона Гука, обусловленные чувствительностью модулей к изменению значения ξ.

Из условия $U''_{I_1 E_2} = U''_{E_2 I_1}$ получим ограничения на выбор поправок:

$$3\xi^2 K'_\xi + 2(3 - \xi^2)G'_\xi = 0. \tag{1.4}$$

В этом случае

$$p_{\alpha\beta} = (L + K(\xi))d\delta_{\alpha\beta} + 2(M + G(\xi))d_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

($d = I_1 = \varepsilon_{\alpha\alpha}$, $d_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - d\delta_{\alpha\beta}/3$ — компоненты девиатора деформаций). Из (1.5) следует зависимость среднего напряжения $p = p_{\alpha\alpha}/3$ и интенсивности напряжений $p_0 = \sqrt{3s_{\alpha\beta}s_{\beta\alpha}/2}$ ($s_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta}$ — девиатор напряжений) от деформаций:

$$p = (L + K(\xi))d = \Omega(\xi)d, p_0 = 3(M + G(\xi))d_0 = 3W(\xi)d_0. \tag{1.6}$$

Здесь $d_0 = \sqrt{2d_{\alpha\beta}d_{\beta\alpha}/3} = \sqrt{2E_2/3}$; $W(\xi) \geqslant 0$. Деформации объема и сдвига связаны соотношением $I_1 = (\xi/\sqrt{1 - \xi^2/3})\sqrt{E_2}$, отсюда $|\xi| \leqslant \sqrt{3}$.

Определим функции $K(\xi)$, $G(\xi)$. Для этого, согласно (1.4), (1.6), достаточно найти только одну из них. Если $K(\xi) = \Omega(\xi) - L$, то

$$G(\xi) = \frac{3}{2}\int_0^\xi \frac{\xi^2}{\xi^2 - 3}\Omega'_\xi(\xi)\,d\xi + G(0).$$

Причем можно положить $G(0) = 0$. Константа $M = W(0)$ и определяется при чисто сдвиговом деформировании. Если использовать соотношение $G(\xi) = W(\xi) - M$, то

$$K(\xi) = \frac{2}{3}\int_{-\sqrt{3}}^\xi \frac{\xi^2 - 3}{\xi^2}W'_\xi(\xi)\,d\xi + K(-\sqrt{3}).$$

Константа L определяется из эксперимента на гидростатическое сжатие, когда $\xi = -\sqrt{3}$, $L = \Omega(-\sqrt{3}) - K(-\sqrt{3})$.

Найдем теперь зависимость деформаций от напряжений. Введем переменную

$$\gamma = \frac{p}{p_0} = \frac{\xi(L + K(\xi))}{\sqrt{2(3 - \xi^2)}(M + G(\xi))}. \tag{1.7}$$

Разрешив (1.7) относительно ξ, получим $\xi = \xi(\gamma)$. Из (1.6) имеем

$$d = f_1(\gamma)p, \quad f_1(\gamma) = [L + K(\xi(\gamma))]^{-1}, \quad d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}f_2(\gamma)s_{\alpha\beta}, \quad f_2(\gamma) = [M + G(\xi(\gamma))]^{-1}.$$

Отсюда получим требуемую зависимость

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} f_1(\gamma) p \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} f_2(\gamma) s_{\alpha\beta}. \tag{1.8}$$

В [4] показана согласованность рассматриваемой разномодульной модели с экспериментальными данными серии испытаний на пропорциональное нагружение горных пород. Сделан вывод, что функция $G(\xi)$ для большинства испытанных пород (диабаз, уголь, известняк, цемент, каменная соль) может быть хорошо аппроксимирована линейной функцией и является убывающей. Используя это, зададим $G(\xi) = -\nu\xi/2$, $\nu \geqslant 0$ – const. Тогда

$$K(\xi) = -\frac{\nu}{3}\Big(\xi + \frac{3}{\xi} + 2\sqrt{3}\Big) + K(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\nu\Big(\xi + \frac{3}{\xi}\Big).$$

Здесь без ограничения общности можно положить $K(-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\nu/3$. В этом случае

$$U = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha} - \nu I_1 \sqrt{\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}} = \frac{\lambda^e}{2} I_1^2 + \mu^e \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha},$$

$$p_{\alpha\beta} = (\lambda I_1 - \nu\sqrt{I_1^2 - 2I_2})\delta_{\alpha\beta} + \Big(2\mu - \nu\frac{I_1}{\sqrt{I_1^2 - 2I_2}}\Big)\varepsilon_{\alpha\beta} = \lambda^e I_1 \delta_{\alpha\beta} + 2\mu^e \varepsilon_{\alpha\beta}, \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2(M + G(\xi))}\Big[p_{\alpha\beta} + \Big(\frac{2}{3}\frac{M + G(\xi)}{L + K(\xi)} - 1\Big)p\delta_{\alpha\beta}\Big] = \frac{1}{2\mu^e}\Big(p_{\alpha\beta} - \frac{\lambda^e}{\lambda^e + 2\mu^e/3} p\delta_{\alpha\beta}\Big),$$

где $\lambda^e = \lambda - \nu/\xi, \mu^e = \mu - \nu\xi/2$ — эффективные модули упругости; значение параметра ξ в соотношениях для деформаций определяется через γ из (1.7). В упругий потенциал входит дополнительное слагаемое, которое позволяет учесть зависимость модулей упругости от вида напряженного состояния и их скачкообразное изменение при переходе от растяжения к сжатию.

Используя термодинамическое требование выпуклости упругого потенциала (положительной определенности квадратичной формы U), получим дополнительные ограничения на выбор параметров модели. Учитывая соотношения для девиатора тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta} - (1/3)I_1\delta_{\alpha\beta} = (1/2\mu^e)(p_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta})$, из (1.6) и (1.9) имеем

$$U = \frac{1}{2(\lambda^e + 2\mu^e/3)} p^2 + \frac{1}{4\mu^e}(p_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta})(p_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta}).$$

Упругий потенциал положительно определен при

$$2\mu - \nu\xi > 0, \qquad 3\lambda + 2\mu - \nu(\xi + 3/\xi) > 0. \tag{1.10}$$

Воспользуемся теперь представлением (1.9) для U. Из положительной определенности главных миноров матрицы

$$\begin{Vmatrix} \mu & -\nu/2 \\ -\nu/2 & \lambda/2 \end{Vmatrix}$$

получим недостающее ограничение

$$\nu^2 < 2\mu\lambda. \tag{1.11}$$

Соотношение (1.11) дает предельное значение $\nu^2 = 2\mu\lambda$, при котором в случае $I_1 > 0$ потенциал теряет выпуклость, а (1.10) при $\nu = 0$ дает условия выпуклости потенциала для упругой (гуковской) среды.

Таким образом, полностью описана модель разномодульного упругого тела с линейно убывающей зависимостью модуля сдвига от параметра ξ. Построение моделей разномодульных сред дает возможность учесть зависимость поведения сред от знака и вида нагружения, обусловленную микронеоднородностью материала.

2. Общие уравнения макроскопической модели разномодульной вязкоупругой среды. Для сильно нерегулярных сред необходимо применять феноменологический подход. Основные принципы построения нелокальных моделей разработаны в [5]. В данной работе для построения используем модель вязкоупругого тела [1] с зависимостью упругих параметров от трещиноватости среды.

Уравнения законов сохранения массы, импульса и энергии для многокомпонентных сред в декартовой системе координат запишем в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\rho\mathbf{v}=0,\qquad \rho\frac{dc_i}{dt}=-\nabla\mathbf{J}_i+M_i\sum_{j=1}^{n}\nu_{ij}l_j\quad (i=\overline{1,N-1}),$$
$$\rho\frac{dv_\alpha}{dt}=\frac{\partial}{\partial x_\beta}P_{\alpha\beta}+\rho F_\alpha\quad (\alpha=\overline{1,3}),\qquad \rho\frac{dE}{dt}=P_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\rho\frac{dq^e}{dt}+\rho\frac{dq^*}{dt}, \tag{2.1}$$

где t — время; $\rho=\sum\limits_{i=1}^{N}\rho_i$ — плотность; $\mathbf{v}=\sum\limits_{i=1}^{N}c_i\mathbf{v}_i$ — скорость; M_i, ρ_i, $c_i=\rho_i/\rho$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{J}_i=\rho_i(\mathbf{v}_i-\mathbf{v})$ — молекулярный вес, плотность, массовая концентрация, скорость и диффузионный поток i-го компонента; l_j, ν_{ij} — скорость и стехиометрические коэффициенты j-й химической реакции ($\sum\limits_{i=1}^{N}\nu_{ij}=0$); $\|P_{\alpha\beta}\|$, $\mathbf{F}$, dq^e, dq^* — тензор напряжений, внешняя массовая сила, приток тепла и нетепловые источники энергии; d/dt — субстанциональная производная.

Упругие параметры зависят от трещиноватости среды. Аналогично моделям [6, 7] введем параметр u — степень разрушения материала $0\leqslant u\leqslant 1$. При $u=0$ микротрещины отсутствуют. Упругие деформации описываются гуковской моделью ($\nu=0$). При $u=1$ среда полностью разрушена ($\nu^2=2\mu\lambda$). Промежуточные состояния ($0<u<1$) описываются моделью разномодульных сред.

Изменение величины u приводит к диссипации энергии. Запишем в этом случае уравнения баланса энергии и энтропии:

$$dE=E'_s\,ds+E'_{\varepsilon_{\alpha\beta}}d\varepsilon_{\alpha\beta}+E'_{c_i}dc_i+E'_u du+E'_{\nabla_\alpha u}d\nabla_\alpha u,\qquad T\,ds=dq^e+dq' \tag{2.2}$$

(dq' — нескомпенсированное тепло). Упростив последний член в (2.2)

$$E'_{\nabla_\alpha u}\frac{d\nabla_\alpha u}{dt}=\nabla_\alpha\Big(E'_{\nabla_\alpha u}\frac{du}{dt}\Big)-(\nabla_\alpha E'_{\nabla_\alpha u})\frac{du}{dt}-E'_{\nabla_\alpha u}\nabla_\beta u\nabla_\alpha v_\beta,$$

представим тензор напряжений в виде суммы упругих, вязких и структурных напряжений:

$$P_{\alpha\beta}=p_{\alpha\beta}+\sigma_{\alpha\beta}-E'_{\nabla_\alpha u}\nabla_\beta u. \tag{2.3}$$

Тогда из (2.1) и (2.2) получим

$$\frac{dq^*}{dt}=J+\nabla_\alpha\Big(E'_{\nabla_\alpha u}\frac{du}{dt}\Big),$$

$$\frac{dq'}{dt} = \frac{1}{\rho}(p_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta})\nabla_\beta v_\alpha - E'_{\varepsilon_{\alpha\beta}}\frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt} - E'_{c_i}\frac{dc_i}{dt} - \frac{\delta E}{\delta u}\frac{du}{dt} + J.$$

Здесь J — интенсивность нетепловых источников (например, радиоактивных); $\delta E/\delta u = E'_u - \nabla_\alpha E'_{\nabla_\alpha u}$ — вариационная производная.

Упругие напряжения определяются формулами Мурнагана (1.2), тензор упругих деформаций удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\Big) - \varepsilon_{\alpha k}\frac{\partial v_k}{\partial x_\beta} - \varepsilon_{k\beta}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta}$$

($\|\varphi_{\alpha\beta}\|$ — релаксационная матрица). Тогда

$$p_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \rho E'_{\varepsilon_{\alpha\beta}}\Big(\frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt} - \frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta}\Big). \qquad (2.4)$$

Для описания реологических свойств среды будем использовать линейные феноменологические соотношения

$$\begin{gathered} p_{\alpha\beta} = L^e I_1\delta_{\alpha\beta} + 2M^e d_{\alpha\beta} - \frac{b_2^2}{b_1}I_1\delta_{\alpha\beta} - \frac{b_2}{b_1}\,\overset{\circ}{\rho}\,(T - \overset{\circ}{T})((1 - I_1)\delta_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}), \\ \sigma_{\alpha\beta} = (\zeta(\nabla\mathbf{v}) - H)\delta_{\alpha\beta} + 2\eta e_{\alpha\beta} = \sigma'_{\alpha\beta} - H\delta_{\alpha\beta}, \end{gathered} \qquad (2.5)$$

где $L^e = \lambda^e + 2\mu^e/3; M^e = \mu^e; \eta, \zeta$ — сдвиговая и объемная вязкость; H — скалярная функция от $(\nabla\mathbf{v})$, в общем случае нелинейная;

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}(\nabla\mathbf{v})\Big).$$

Введем вектор теплового потока $\mathbf{J}_q$, чтобы привести приток тепла dq^e к дивергентному виду $dq^e = -(1/\rho)(\nabla\mathbf{J}_q)dt$. Используя (2.4) и уравнения сохранения концентраций компонентов, запишем уравнение баланса энтропии:

$$\rho\frac{ds}{dt} = \nabla\mathbf{J}_s + \sigma_s, \qquad \mathbf{J}_s = -\frac{1}{T}\Big(\mathbf{J}_q - \sum_{i=1}^N \mu_i\mathbf{J}_i\Big),$$

$$\sigma_s = \frac{\rho J}{T} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{T}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{T}\sum_{j=1}^n A_j i_j - \frac{1}{T^2}(\nabla T\cdot\mathbf{J}_q) - \sum_{i=1}^N\Big(\mathbf{J}_i\cdot\nabla\frac{\mu_i}{T}\Big) - \frac{\rho}{2T}E'_{\varepsilon_{\alpha\beta}}\varphi_{\alpha\beta} - \frac{\rho}{T}\frac{\delta E}{\delta u}\frac{du}{dt}.$$

Здесь $\mathbf{J}_s$ — поток энтропии; σ_s — мощность источников энтропии; $A_j = \sum_{i=1}^N \mu_i M_i\nu_{ij}$; $\mu_i = E'_{c_i}$ — химические потенциалы компонентов.

В соответствии со вторым законом термодинамики $\sigma_s \geqslant 0$ и равенство достигается только для обратимых процессов. Условие неотрицательности внутреннего производства энтропии налагает дополнительные ограничения на связи между термодинамическими силами и потоками. Сформулируем эти ограничения.

В силу принципа симметрии Кюри [8]

$$\begin{gathered} \frac{1}{T}\sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\rho}{2T}E'_{\varepsilon_{\alpha\beta}}\varphi_{\alpha\beta} \geqslant 0, \qquad -\frac{1}{T^2}(\nabla T\cdot\mathbf{J}_q) - \sum_{i=1}^N\Big(\mathbf{J}_i\cdot\nabla\frac{\mu_i}{T}\Big) \geqslant 0, \\ -\frac{1}{T}\sum_{j=1}^n A_j i_j - \frac{1}{T}H(\nabla\cdot\mathbf{v}) \geqslant 0, \qquad -\frac{\rho}{T}\frac{\delta E}{\delta u}\frac{du}{dt} \geqslant 0. \end{gathered} \qquad (2.6)$$

Используя постулат диссипативности $\sigma'_{\alpha\beta}\nabla_\beta v_\alpha \geqslant 0$, который выполняется при $\eta \geqslant 0$, $\zeta \geqslant 0$, имеем $-(\rho/T)E'_{\varepsilon_{\alpha\beta}}\varphi_{\alpha\beta} \geqslant 0$.
Релаксация и трение — необратимые диссипативные процессы, каждый из которых приводит к повышению энтропии. Релаксационные процессы можно задать соотношениями [9, 10] $\varphi_{\alpha\beta} = -(2/\tau)(\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\rho'_{\varepsilon_{lk}}\varepsilon_{lk}/\rho'_{\varepsilon_{ll}})$ (τ — время релаксации).

Для описания термодинамических потоков используем линейные феноменологические соотношения с симметричными коэффициентами. Тогда второе неравенство в (2.6) выполняется в случае положительной определенности матрицы феноменологических коэффициентов [9]. Тепловой и диффузионные потоки обычно записываются в виде

$$\mathbf{J}_i = -\rho \sum_{l=1}^{N-1} D_{il}\nabla c_l - \rho S_i \nabla \ln p - \rho D_{Ti} \nabla \ln T,$$

$$\mathbf{J}_q = -\text{æ}\nabla T + \sum_{i=1}^{N} h_i \mathbf{J}_i - \rho \sum_{i=1}^{N-1} D_{Ti}\Big(\frac{\partial(\mu_i - \mu_N)}{\partial p}\nabla p + \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial(\mu_i - \mu_N)}{\partial c_l}\nabla c_l\Big),$$

где $h_i = -T^2\partial(\mu_i/T)/\partial T$ — энтальпия i-го компонента смеси; D_{il}, S_i, D_{Ti} — коэффициенты диффузии, бародиффузии (седиментации) и термодиффузии; æ — коэффициент теплопроводности; p — давление.

Для описания химических реакций будем использовать общие соотношения термодинамики неравновесных процессов. Число независимых реакций n в феноменологическом описании не может превышать N. Полагаем $n = N$. Общие соотношения имеют вид

$$H = -\frac{\partial K}{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v})}, \qquad i_j = -\frac{\partial K}{\partial A_j} \tag{2.7}$$

($K(p, T, A_1 \ldots A_n, \nabla\mathbf{v})$ — диссипативный химический потенциал, описывающий химические свойства смесей). Для них должно быть выполнено требуемое неравенство.

С точки зрения термодинамики неравновесных процессов физико-химические превращения являются частным случаем возможных скалярных релаксационных процессов. Анализ их взаимодействия с процессами вязкого течения показывает [11], что реологическое влияние химических реакций связано с объемной вязкостью (2.5).

Большие изменения объемной вязкости происходят при сильной зависимости l_j от скорости изменения объема элемента смеси. Для большинства горных пород вязкие напряжения определяются в основном сдвиговой вязкостью. В этом случае объемной вязкостью и зависимостью диссипативного химического потенциала от $\nabla\mathbf{v}$ можно пренебречь:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\eta e_{\alpha\beta}.$$

Из (2.6) получим кинетику разрушения:

$$\frac{du}{dt} = -C\frac{\delta E}{\delta u}. \tag{2.8}$$

Упругие параметры λ, μ, ν зависят от u. Например,

$$\lambda = \lambda_0(1-f) + \lambda_1 f, \qquad \mu = \mu_0(1-f) + \mu_1 f, \qquad \nu = \nu_1 f. \tag{2.9}$$

Здесь λ_0, μ_0 — параметры при $u = 0$; $\lambda_1, \mu_1, \nu_1 = 2\mu_1\lambda_1$ — при $u = 1$; $f(0) = 0$; $f(1) = 1$. В качестве функции $f(u)$ можно взять объемную часть разрушенного материала рассматриваемого элемента. Тогда среда является как бы механической смесью залеченного и разрушенного материала.

Подстановкой (2.9) в (1.9) получим

$$U = (1 - f)U_0 + fU_1, \tag{2.10}$$

где $U_0 = (\lambda_0/2)I_1^2 + \mu_0\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}$; $U_1 = (\lambda_1/2)I_1^2 + \mu_1\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha} - \nu_1 I_1\sqrt{\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}}$.
Зависимость E от $u, \nabla u$ зададим в виде

$$E(u, \nabla u) = D(u - u_1)^2(u - u_2)^2 + \delta\nabla_\alpha u\nabla_\alpha u \tag{2.11}$$

(u_1, u_2 — степени разрушения, соответствующие заданной температуре и нулевой нагрузке в переходном и хрупком состоянии среды). Использование полинома четвертой степени относительно u позволяет описать существование двух устойчивых стационарных состояний, к одному из которых в зависимости от начальных условий релаксирует среда после снятия нагрузки. Эти два устойчивых состояния равновесия разделены промежуточным неустойчивым состоянием $u_3 = (u_1 + u_2)/2$.

В некотором диапазоне изменения напряжений и температуры среда может находиться в относительно стабильном по физическим свойствам состоянии (значения физических величин близки к равновесным), а затем скачкообразно изменять свои свойства, переходя в другое реологическое состояние. Так, степень разрушения близка к соответствующим значениям $(0, u_1, u_2, 1)$. При смене реологического состояния происходит скачкообразное изменение степени разрушения.

Необходимо обеспечить непрерывность перехода сыпучих сред ($u = 1$, $2\mu\lambda = \nu^2$) в предельное неустойчивое состояние, когда упругий потенциал теряет выпуклость: $U = 0$ при $\xi = \xi^* = 2\mu/\nu$.

Предельное состояние достигается при выходе точки нагружения на поверхность разрушения — нагрузках, вызывающих разрыв сплошности или сдвиг, который может расти без увеличения нагрузки. Для описания поведения сыпучих сред и особенностей деформирования в предельном состоянии можно воспользоваться деформационной моделью. Она позволяет учесть такие определяющие свойства этих сред, как дилатансия, отсутствие сопротивления деформациям растяжения, ограниченную способность к упрочнению и неустойчивость предельного деформирования. Построение уравнений связи деформаций с напряжениями при нагружении сыпучих сред в рамках деформационной теории приведено в [12, 13].

Рассматривая свойства модели, можно предположить, что коэффициенты вязкости являются переменными параметрами. Устойчивому по степени разрушения состоянию материала соответствует режим установившейся ползучести (накопления необратимых деформаций). Изменение степени разрушения приводит к изменению скорости ползучести и скачкообразному изменению вязкости. При малой степени разрушения и $-\sqrt{3} \leqslant \xi \leqslant \xi_0$ (всестороннем сжатии и малом сдвиге) может существовать режим высокотемпературной ползучести, происходит резкое уменьшение вязкости при высокой температуре. Для описания таких переходов достаточно предположить наличие скачков в зависимости вязкости среды от u, T, p.

Квадратичная зависимость энергии от ∇u является простейшей для изотропной среды. В соответствии с (2.10), (2.11) тензор напряжений и уравнение кинетики u примут вид

$$P_{\alpha\beta} = \lambda^e I_1\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^e\varepsilon_{\alpha\beta} + (\zeta(\nabla \mathrm{v}) - H)\delta_{\alpha\beta} + 2\eta e_{\alpha\beta} - 2\delta\nabla_\alpha u\nabla_\beta u,$$

$$\frac{du}{dt} = C\left(\frac{1}{\overset{\circ}{\rho}} f'_u (U_0 - U_1) - 4D(u-u_1)(u-u_2)\left(u - \frac{u_1+u_2}{2}\right) + 2\delta \Delta u\right),$$

где $\Delta u = \nabla_\alpha \nabla_\alpha u$.

Уравнение кинетики u может быть использовано для описания динамических эффектов, связанных с переходом из одного реологического состояния в другое. Зона перехода или фронт разрушения определяются заданием параметра δ.

Значения введенных в модель параметров λ_0, μ_0, λ_1, μ_1, D, u_1, u_2, δ должны определяться из экспериментов, а выбор начальных распределений u, $f(u)$ согласовываться со свойствами этих величин, полученными в результате качественного анализа.

Таким образом, полностью построена макромодель разномодульного вязкоупругого тела, позволяющая описывать наличие различных реологических состояний, учитывать разномодульные свойства материала и нелокальный характер процесса разрушения. Она обладает достаточной простотой, дает возможность проводить численное моделирование сложных процессов в нерегулярных средах и может использоваться при решении ряда практических задач в геофизике и горном деле.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00743).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
2. **Ляховский В. А., Мясников В. П.** О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.
3. **Ляховский В. А., Мясников В. П.** Поведение вязкоупругой среды с микронарушениями при растяжении и сдвиге // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 4. С. 28–35.
4. **Олейников А. И.** Уравнения теории упругости и условие разрушения для разномодульных материалов // ФТПРПИ. 1986. № 1. С. 12–19.
5. **Седов Л. И.** Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 5. С. 121–180.
6. **Работнов Ю. Н.** Механика деформированного тела. М.: Наука, 1988.
7. **Passman S. L., Trucano T. G.** Stability, instability and localization in materials with damage // J. of Rheology. 1984. V. 28. P. 779–798.
8. **Хаазе Р.** Термодинамика необратимых процессов. М.: Мир, 1967.
9. **Мясников В. П., Фадеев В. Е.** Модели эволюции Земли и планет земной группы. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 5.
10. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ. 1972. № 6. С. 124–145.
11. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
12. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
13. **Мясников В. П., Олейников А. И.** Уравнения теории упругости и условие текучести для сыпучих линейно дилатирующих сред // ФТПРПИ. 1984. № 6. С. 14–19.

Поступила в редакцию 4/I 1995 г.,
в окончательном варианте — 13/VI 1995 г.