ПМТФ, № 4, 1972

УДК 622.011.4

О ВОЛНАХ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТНОГО КУЛОНОВА ТРЕНИЯ

П. Ф. Коротков

(Москва)

Рассматривается распространение волн в упругой среде, боковая поверхность которой соприкасается с недеформируемым шероховатым телом. На границе возможно проскальзывание, при этом возникают силы трения Кулона, пропорциональные нормальному напряжению в волне. Показано, что при малом коэффициенте трения существует решение вида

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-\delta x) \sin(\omega t - kx)$$

Коэффициент поглощения δ есть постоянная величина, обратно пропорциональная поперечному размеру стержня L, σ — напряжение, ω — круговая частота, k — волновое число.

Из опыта следует, что коэффициент поглощения звука в горных породах пропорционален частоте [1]. Такое затухание соответствует затуханию волн в рассматриваемой здесь среде, поперечные размеры которой пропорциональны длине волны. Исходя из этого, наблюдаемый закон поглощения можно объяснить, если предположить, что в одной и той же горной породе, которая обычно состоит из зерен и блоков разных размеров, волны разной длины возбуждают проявление трения на площадках, удаленных друг от друга на расстояние, пропорциональное длине волны.

В работах [2-4] распространение волн в безграничной упругой среде, в свойства которой вводились некоторые эффекты трения, рассматривалось с другой точки зрения, чем в настоящей работе.

В работах [5,6] задача о волнах в упругом стержне рассматривалась при силах трения, не зависящих от амплитуды волны. В такой постановке задачи волны достаточно малой амплитуды будут распространяться без затухания.

1. Вывод уравнений. Рассмотрим полубесконечный стержень, расположенный вдоль оси x, окруженный несжимаемой средой. Уравнение движения, учитывающее трение на его боковой поверхности, будет иметь вид

$$\rho S \frac{\partial v}{\partial t} = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \tau P \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность, v — скорость, σ — нормальное напряжение, P, S — периметр и площадь поперечного сечения, τ — касательное напряжение, направленное по оси x и действующее на боковую поверхность стержня.

Считаем, что величина τ пропорциональна напряжению σ_n, действующему на поверхности контакта, и направлена против скорости смещения

$$\tau = -f\,|\sigma_n|\operatorname{sign} v \tag{1.2}$$

$$v = \partial u/\partial t \tag{1.3}$$

Здесь f — коэффициент трения, u — смещение.

Для упругого стержня получим, учитывая, что деформация в поперечном направлении равна нулю

$$\sigma = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad c^2 = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E}{\rho} \tag{1.4}$$

$$\sigma_n = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma \tag{1.5}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Исключая смещение из (1.1)—(1.5), получим систему двух уравнений гиперболического типа для напряжения и скорости

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial\sigma}{\partial x}=-2\delta|\sigma|\operatorname{sign}v,\quad 2\delta=\frac{\nu}{1-\nu}\frac{Pf}{S}\tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\rho c^2\frac{\partial v}{\partial x}=0\tag{1.7}$$

Для смещения эта система сводится к одному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-2\delta c^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\operatorname{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\tag{1.8}$$

В рассматриваемой модели трение вошло только в правую часть полученных уравнений и не изменило их гиперболического типа. Наклон характеристик остается постоянным, не зависящим от искомых величин (если рассматривать подобную задачу в неоднородной среде, например такой, где скорость звука зависит от x, тогда наклон будет меняться в соответствии с изменениями свойств среды, но по-прежнему не будет зависеть от искомых функций).

В правой части уравнений имеется нелинейный «по знаку» член. Нелинейность обусловлена зависимостью его от знака скорости и наличием модуля напряжения. Она связана с введением закона «сухого» трения в виде (1.2).

Уравнение (1.2) означает, что трение имеется как в фазе сжатия, так и в фазе растяжения. Если бы рассматривались волны в сплошном стержне, окруженном жесткой средой, то в фазе растяжения он отходил бы от стенки и здесь трение отсутствовало бы. В результате уменьшение амплитуды было бы лишь в фазе сжатия. Если же стержень полый и несжимаемая среда расположена только внутри его, то уменьшение амплитуды наблюдалось бы только в фазе растяжения.

Помимо этого фазы сжатия и растяжения в таких стержнях должны распространяться с различными скоростями.

Одинаковое уменьшение амплитуд фаз сжатия и растяжения будет наблюдаться, например, при распространении волн в тонкой трубе, когда внешний и внутренний периметры примерно равны. В этом случае в фазе сжатия возникает трение о внешнюю поверхность, в фазе растяжения — о внутреннюю. Трение в обеих фазах будет и в сплошном стержне, у которого одна часть боковой поверхности выпуклая, а другая вогнутая.

Теперь сделаем замечания о применении уравнений (1.4) и (1.5). Здесь предполагается, что стержень однородно деформирован по сечению. При наличии поверхностных касательных сил это будет справедливо, если рассматриваемые длины волн λ много больше поперечного размера стержня

$$L/\lambda\ll 1,\qquad L=S/P\tag{1.9}$$

В заключение анализа системы уравнений (1.6), (1.7) получим уравнение изменения энергии волны. Умножим уравнение (1.6) на v. После простых преобразований и использования соотношения (1.7) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2\rho c^2}\right)=\frac{\partial(\sigma v)}{\partial x}-2\delta|\sigma v|\tag{1.10}$$

Проинтегрируем (1.10) по всему объему тела, в котором распространяется волна. Тогда первый член в правой части исчезнет. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\rho v^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2\rho c^2}\right\rangle=-2\delta|\sigma v|\tag{1.11}$$

Здесь угловые скобки обозначают осреднение по объему. В левой части стоит изменение энергии волны в единице объема. В правой части — отрицательная величина — работа сил трения в единицу времени. Из-за трения энергия волны убывает.

2. Приближенное решение. В работе К. Е. Губкина [7] предложен способ отыскания приближенного решения для слабых ударных волн малой длины. Этот способ основан на приближенном интегрировании уравнений вдоль характеристик. Здесь подобный способ будет применен к интегрированию уравнений (1.6), (1.7). При этом малым параметром будет не длина волны, а коэффициент трения.

Запишем систему (1.6), (1.7) вдоль характеристик C_+ и C_-

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad d\sigma - \rho c dv = 2\delta \operatorname{sign}(\sigma v)\, \sigma dx \tag{2.1}$$

$$\frac{dx}{dt} = -c, \quad d\sigma + \rho c dv = 2\delta \operatorname{sign}(\sigma v)\, \sigma dx \tag{2.2}$$

Рассмотрим волну, состоящую из n колебаний длиной λ каждое, распространяющуюся по невозмущенной однородной среде. Скорость переднего фронта волны равна c, координата — $x_1(t)$. Проинтегрируем второе соотношение (2.2) вдоль направления C_--характеристики, определяемого первым уравнением (2.2)

$$\sigma + \rho c v = 2\delta \int\limits_{x_1}^{x_1 - n\lambda} \operatorname{sign}(\sigma v)\, \sigma dx \tag{2.3}$$

Величину интеграла оценим по среднему значению подынтегральной функции. При малом трении интегралом в правой части можно пренебречь. Получим

$$\sigma + \rho c v = 0 \tag{2.4}$$

Здесь использовано условие, что волна распространяется по невозмущенной среде, т. е. $\sigma = v = 0$ при $x > x_1$.

Оценка применимости (2.4) может быть записана так:

$$2n\delta\lambda \ll 1 \quad \text{или} \quad f \ll \frac{4\pi n (1 - \nu)}{\nu} \frac{L}{\lambda} \tag{2.5}$$

Чем длиннее рассматриваемый цуг волны, тем меньше должен быть коэффициент трения для той же степени приближения.

Сравнивая (2.5) с (1.9), приходим к выводу, что ограничение на трение довольно сильное. Поэтому сделаем некоторые численные оценки.

Возьмем величину L/λ равной 0.05. При этом условие (1.9) будем считать выполненным. При величине коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ правая часть второго неравенства (2.5) равна 1.5. Следовательно, коэффициент трения 0.1 и меньше будет с приемлемой точностью удовлетворять необходимым ограничениям.

Используя (2.4), интегрируем уравнения (2.1) вдоль C_+-характеристик

$$x = ct + \alpha, \qquad \sigma = \sigma_0(\alpha) \exp(-\sigma x) \tag{2.6}$$

Здесь α и $\sigma_0(\alpha)$ — величины, постоянные вдоль C_+-характеристики, но имеющие другие значения на другой C_+-характеристике. Они определяются из начальных условий.

Например, пусть при $x = 0$ задана зависимость напряжения от времени

$$\sigma|_{x=0} = \sigma_0(t) \tag{2.7}$$

Решение (2.6) для этого случая будет иметь вид

$$\sigma = \sigma_0(t - x/c) \exp(-\delta x) \tag{2.8}$$

Все участки волны, независимо от их формы, затухают по одной и той же экспоненциальной зависимости. Для гармонических колебаний затухание не зависит от частоты, а определяется только пройденным волной расстоянием.

Поступила 1 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Attewell P. B., Ramana Y. V. Wave attenuation and internal friction as function of frequency in rocks. Geophys., 1966, vol. 31, No. 6, pp. 1049—1056.
2. Knopoff L., Mac-Donald G. S. Attenuation of small amplitude stress waves in solids. Rev. Modern Phys., 1958, vol. 30, No. 4, pp. 1178—1192.
3. Кнопов Л. Затухание упругих волн в Земле. В сб. «Физическая акустика», т. 3, ч. Б. Динамика решетки. М., «Мир», 1968.
4. Николаевский В. Н. Монохроматические волны в упругой среде с локальным проявлением сухого трения. МТТ, 1968, № 4.
5. Никитин Л. В. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 1.
6. Cornelius C. S., Kubitza W. K. Experimental investigation of longitudinal wave propagation in an elastic rod with coulomb friction. Experimental mechanics, 1970, vol. 10, No. 4, pp. 137—144.
7. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.