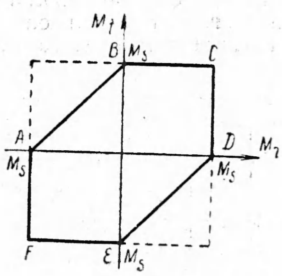
ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНОК

П. А. Форсман (Москва)

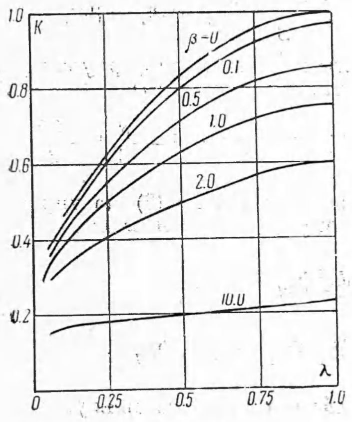
Задачи осесимметричного упруго-пластического изгиба круглых пластинок рассматривались при помощи деформационной теории пластичности А. А. Ильюшиным [1] и В. В. Соколовским [2]. Решение при этом находится либо методом упругих решений [1], либо путем численного интегрирования [2].

Задача существенно упрощается, если, следуя Текиналпу [3], использовать условие текучести Треска (или в данном случае также кривую текучести в форме квадрата), ассоциированный закон течения, и допустить, что в пластинке могут существовать либо чисто упругие, либо чисто пластические зоны (последнее допущение строго выполняется лишь для двуслойных пластинок). Выкладки будут особенно простыми, если, как указано в [4], при построении решения в упругой области применить метод начальных параметров и воспользоваться таблицами С. Н. Соколова [5]. Задача о кольцевой пластинке с перерезывающей силой на одной из кромок исследовалась В. С. Черниной [6] также методом начальных параметров, но без использования готовых таблиц.



Фиг. 1

Проиллюстрируем сказанное на примере свободно опертой пластинки, на которую действуют совместно равномерно распределенная нагрузка q и сосредоточенная сила P в центре. В частном случае $P = 0$ будем иметь решение Текиналпа. Наконец, в пределе, при исчезающей упругой зоне, приходим к решению Друккера и Гопкинса [7].



Фиг. 2

Обозначим радиус пластинки через R, а ее толщину через $2h$. Введем безразмерные моменты

$$m_r = \frac{M_r}{M_S}, \quad m_t = \frac{M_t}{M_S} \quad (M_S = \sigma_S h^2) \tag{1}$$

Кроме того, обозначим

$$\beta = \frac{\pi R^2 q}{P}, \quad k = \frac{P}{2\pi M_S}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \lambda = \frac{b}{R} \tag{2}$$

где b — радиус пластической области. Коэффициент Пуассона материала пластинки предполагается $\mu = 0.3$. В пластической области мы должны рассматривать состояния, отвечающие стороне BC шестиугольника текучести фиг. 1 [3,4].

Легко убедиться, что интеграл уравнения равновесия пластинки будет иметь вид:

$$m_r = 1 - k\left(1 + \frac{\beta\xi^2}{3}\right), \qquad m_t = 1 \tag{3}$$

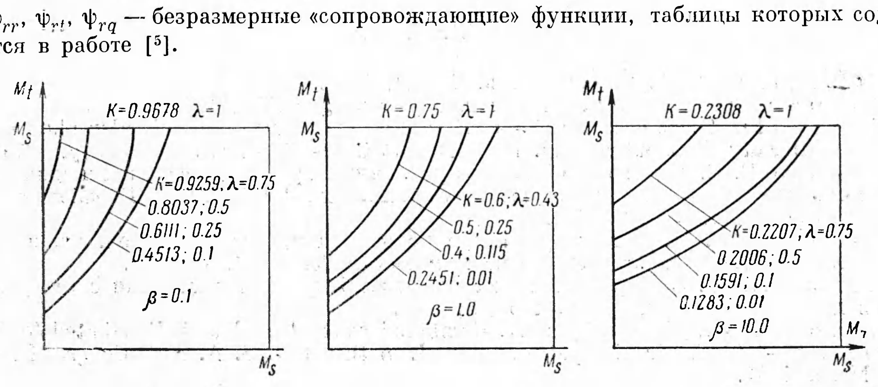
В упругой области воспользуемся для радиальных моментов формулой метода начальных параметров [5]

$$m_r = m_r^\circ \psi_{rr} + m_t^\circ \psi_{rt} - Q^\circ \psi_{rp} - 2\beta k \xi^2 \psi_{rq} \tag{4}$$

Здесь m_t°, m° и Q° — безразмерные значения радиального и окружного моментов и перерезывающей силы на упруго-пластической границе

$$Q^\circ = (1 + \beta\lambda^2)\, 2\pi k \tag{5}$$

а ψ_{rr}, ψ_{rt}, ψ_{rq} — безразмерные «сопровождающие» функции, таблицы которых содержатся в работе [5].



Фиг. 3

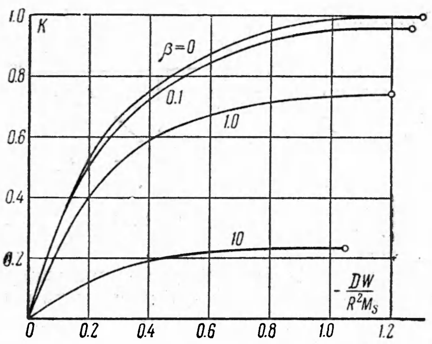
Так как на опоре радиальный момент равен нулю, то, полагая $\xi = 1$, в (4) для k получаем

$$k = \left[\left(\frac{1}{3}\beta\lambda^2 + 1\right)\psi_{rr} + 2\pi(1+\beta\lambda^2)\psi_{rp} + 2\beta\psi_{rq}\right]^{-1} \qquad (6)$$

Сопровождающие функции, входящие в эту формулу, представляют собой функции одной переменной λ. Задаваясь λ, можно из (6) найти соответствующие значения k. На фиг. 2 представлены найденные таким образом при различных значениях β зависимости k от λ. После этого напряжения [8] определятся зависимостями [5] (7)

$$m_r = m_r^\circ\psi_{rr} + m_t^\circ\psi_{rt} - Q^\circ\psi_{rp} - 2\beta k\xi^2\psi_{rq}$$

$$m_t = m_r^\circ\psi_{tr} + m_t^\circ\psi_{tt} - Q^\circ\psi_{tp} - 2\beta k\xi^2\psi_{tq}$$



Фиг. 4

где сопровождающие функции определяются для аргументов $\lambda_1 = b/r$. Напряжения, отвечающие значениям β-0.1, 1.0, 10.0, представлены на фиг. 3.

Обратимся к определению прогибов пластинки. Так как в пластической области скорость радиальной кривизны равна нулю, то для прогибов получим дифференциальное уравнение (предполагается, что вертикальная ось координат направлена вверх)

$$(1-\mu^2)\frac{D}{M_S}\cdot\frac{d^2w}{dr^2} = m_r - \mu m_t \qquad (8)$$

где D — цилиндрическая жесткость пластинки, а моменты определяются формулой (3). Интегрируя (8) при $\mu = 0.3$, получим для углов поворота α и прогибов w (9)

$$\frac{0.91\,D}{M_S R}\alpha = G + \xi(0.7 - k) - \frac{\beta k}{9}\xi^3, \qquad \frac{0.91\,D}{M_S R^2}w = F + G\xi + \xi^2\left(0.35 - \frac{k}{2}\right) - \frac{\beta k}{36}\xi^4$$

Постоянные G и F определяются из условий непрерывности (8) на упруго-пластической границе ($\xi = \lambda$). В упругой области формулы для α и w имеют вид

$$\frac{D\alpha}{M_S R} = m_r^\circ\xi\psi_{\alpha r} + m_t^\circ\xi\psi_{\alpha t} - Q^\circ\xi\psi_{\alpha p} - 2\beta k\xi^3\psi_{\alpha q}$$

$$\frac{Dw}{M_S R^2} = \frac{Dw_b}{M_S R^2} + m_r^\circ\xi^2\psi_{wr} + m_t^\circ\xi^2\psi_{wt} - Q^\circ\xi^2\psi_{wp} - 2\beta k\xi^4\psi_{wq} \qquad (10)$$

Из этих формул определяется угол поворота и прогиб в начальном сечении упругой зоны:
(11)

$$\frac{D\alpha_b}{M_S b} = -0.3297\,m_r^\circ + 1.099\,m_t^\circ, \qquad \frac{Dw_b}{M_S R^2} = -m_r^\circ\psi_{wr} - m_t^\circ\psi_{wt} + Q^\circ\psi_{wp} + 2\beta k\psi_{wq}$$

Зависимость нагрузки от прогибов в центре пластинки изображена на фиг. 4. Приводим максимальные значения прогибов (— DW/R^2MS) при $\lambda=1$ для разных значений β: 1.265 ($\beta=0$, $k=1$); 1.255 ($\beta=0.1$); 1.195 ($\beta=1.0$); 1.05 ($\beta=10$).

Поступила 9 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ОНТИ, 1948.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. ОНТИ, 1950.
3. Tekinalp B. Elastic plastic bending of a simply supported circular plate under an uniformly distributed load. DAM Report C 11—6, Brown University, 1955.
4. Шапиро Г. С. Упруго-пластическое равновесие круглой пластинки и единственность решения жестко-пластической задачи. Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1961, № 2.
5. Соколов С. Н. Расчет круглых и кольцевых пластинок постоянной и переменной жесткости. Сб. Расчеты на прочность, 1958, № 3. Машгиз.
6. Чернина В. С. Упруго-пластический изгиб круглой пластинки с отверстием в центре. Прикл. механiка, 1959, 5, № 3.
7. Drucker D., Hopkins H. Combined concentrated and distributed load on ideally — plastic circular plates. Proceed. of the II U. S. A. Nat. Congr. of Appl. Mech. 1954.
8. Гудьер Дж., Ходж Ф. Упругость и пластичность. ИИЛ, 1950.