показывают, что с ростом Gr максимальные значения тепловых потоков возрастают.

Полученные результаты позволили сделать следующие выводы: в рассмотренном диапазоне изменения числа Gr и отношения радиусов имеет место устойчивое одновихревое движение, коэффициент конвекции слабо зависит от отношения r_2/r_1, и для расчета ε_k можно использовать формулу (8), зависящую только от числа Рэлея.

Поступила 12 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бояринцев Д. И.** Теплопередача через жидкостные и газовые прослойки.— ЖТФ 1950, т. XX, вып. 9.
2. **Bishop E. H., Kolflat R. S., Mack I. R., Scanlan J. A.** Convective heat transfer between concentric spheres.— In: Proceedings of 1964 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Stanford, Stanford University Press, 1964.
3. **Scanlan J. A., Bishop E. H., Powe R. E.** Natural convection heat transfer between concentric spheres.— «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1970, vol. 13.
4. **Yin S. H., Powe R. E., Scanlan J. A., Bishop E. H.** Natural convection flows pattes in sphericall annuli.— «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1973, vol. 16, N 9.
5. **Mack I. R., Hardee H. C.** Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers.— «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1968, vol. 11.
6. **Барелко В. В., Штессель Э. А.** О законе теплопередачи при свободной конвекции в цилиндрических и сферических прослойках.— «Инж.-физ. журн.», 1973, т. XXIV, № 1.
7. **Петражицкий Г. Б., Бекнева Е. В., Станкевич Н. М.** Расчет течения и теплообмена при свободном движении жидкости в горизонтальном кольцевом канале.— «Труды Львовского политехн. и-та», 1970, № 46.
8. **Кочин Н. Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., «Наука», 1965.

УДК 532.135

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРАНИЦ

Ф. А. Гарифуллин, А. Б. Габитова

(*Казань*)

При исследовании устойчивости равновесия упруговязкой жидкости в работе [1] предполагалось исчезновение возмущения температуры на ограничивающих слой плоскостях. Эти условия соответствуют предельному случаю бесконечной теплопроводности границ. В случае конечных величин теплопроводности разделяющих границ следует учитывать проникновение температурных возмущений в массив. В работе рассмотрена задача устойчивости слоя упруговязкой жидкости, заключенного между двумя полубесконечными массивами конечной теплопроводности.

В общем случае для упруговязкой жидкости тензор напряжения в материальной точке дается как функционал истории деформации [2]. Заданием конкретного вида ядер функционала можно получить частные реологические модели. Методы измерения материальных постоянных, входящих в реологические соотношения, являются сложными и требуют сложной реометрической аппаратуры.

Информация, полученная из вискозиметрических течений, не может быть использована для течений, отличных от вискозиметрических [3].

В последнем случае увеличивается количество материальных функций, входящих в определяющие соотношения [4]. Поэтому в каждом конкретном случае следует оценить вклад дополнительных функционалов, описывающих все взаимодействия, допускаемые соответствующей симметрией, для случая невискозиметрических течений.

Считая, что память жидкости падает достаточно быстро и скорость деформации незначительна, для рассматриваемого в работе случая тензор напряжения можно представить в виде интегральной модели, обсужденной ранее в [1].

Рассмотрим подогреваемый снизу горизонтальный слой упруговязкой жидкости, который ограничен плоскостями $z = 0$ и $z = d$. Слой граничит с полубесконечными твердыми массивами, теплопроводности которых $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ различны и отличаются от теплопроводности жидкости $\varkappa$ (см. фигуру).

Амплитудные уравнения возмущения в жидкости в приближении Буссинеска запишутся в виде

$$\{(D^2 - a^2)[\psi(\sigma)\mathrm{Pr}(D^2 - a^2) - \sigma]\}W = \mathrm{PrRa}a^2\Theta; \tag{1}$$

$$(D^2 - a^2 - \sigma)\Theta = - W. \tag{2}$$

Для возмущений температуры в массивах справедливо уравнение

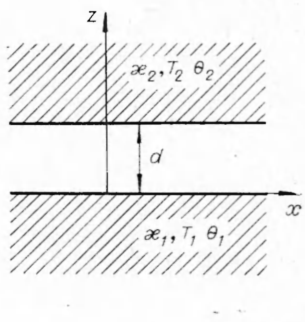
$$(D^2 - a^2 - \sigma\bar{\varkappa}_s^{-1})\Theta_s = 0 \quad (s = 1, 2), \tag{3}$$

где W и Θ — амплитуды возмущения скорости и температуры в жидкости; $\bar{\varkappa}_s = \varkappa_s/\varkappa$; $\varkappa_s$ — теплопроводность границ; Pr, Ra — числа Прандтля и Рэлея; a — волновое число; σ — декремент возмущения; $\psi(\sigma) = \eta_0^{-1}\int\limits_0^\infty N(\tau)(1 + \sigma\tau)^{-1}d\tau$, $N(\tau)$ — функция распределения времен релаксации; η_0 — наибольшая ньютоновская вязкость; $D = \partial/\partial z$. При этом безразмерные переменные отнесены: расстояние к толщине слоя d, время — d^2/χ, скорость — χ/d, температура — βd, здесь χ — температуропроводность жидкости; $\beta = (T_2 - T_1)/d$.

Граничными условиями для амплитуд возмущений, соответствующими данной задаче, являются

$$\begin{gathered} \Theta = \Theta_1\ \varkappa_1 D\Theta_1 = \varkappa D\Theta \text{ при } z = 0; \\ \Theta = \Theta_2,\ \varkappa_2 D\Theta_2 = \varkappa D\Theta \text{ при } z = 1; \\ W = DW = 0 \text{ при } z = 0{,}1; \\ \Theta_1 = \Theta_2 \to 0 \text{ при } z \to +\infty. \end{gathered} \tag{4}$$

Из однородной краевой задачи (1) — (4) можно определить спектр декрементов σ и соответствующих характеристических возмущений. В зависимости от свойств жидкости возникает монотонная или колебательная неустойчивость. Для ньютоновской жидкости установлено, что «принцип монотонности возмущений» справедлив и порог устойчивости определяется при нулевом значении декремента [5, 6]. Наличие упругости в неньютоновских упруговязких жидкостях является дополнительным дестабилизирующим фактором, и указанный принцип нарушается [1].



Для решения задачи применяем метод Галеркина. Следуя [7], примем аппроксимацию вида

$$W = qz^2(1-z)^2, \tag{5}$$

где коэффициент q выбираем из условия нормировки и ввиду однородности задачи полагаем равным единице. Используя (5), определим возмущение температуры в слое жидкости из (2)

$$\Theta = C_1\,\mathrm{sh}\,kz + C_2\,\mathrm{ch}\,kz + z^4/k^2 - (2/k^2)z^3 + [(12+k^2)/k^4]z^2 - -(12/k^4)z + 2(12+k^2)/k^6,$$

где $k^2 = a^2 + \sigma$.

Решение (3) с учетом (4) можно представить в форме

$$\Theta_1 = A\exp(\gamma_1 z),\quad \Theta_2 = B\exp[\gamma_2(1-z)],$$

где $\gamma_s = \sqrt{a^2 + \sigma/\overline{\varkappa}_s}$.
Постоянные C_1, C_2, A, B определяются из граничных условий для температуры (4). Выражения для C_1 и C_2, необходимые для определения критического числа Рэлея, получаются довольно громоздкими и трудными для обозрения, поэтому здесь не приводятся. Для частного случая отсутствия колебательной неустойчивости при замене $\overline{\varkappa}_s' = 1/\varkappa_s$ значения C_1 и C_2, а также величина критического числа Рэлея полностью совпадают с данными работы [7].

Интегральное условие метода Галеркина приводит к зависимости возникновения колебательной неустойчивости. Когда нейтральное состояние характеризуется $\sigma = i\omega$, то выражение $\eta_0\psi(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega)$ является комплексной вязкостью. Значение

$$\mathrm{Ra} = \frac{D_1D_3 + D_2D_4}{D_3^2 + D_4^2} + i\,\frac{D_2D_3 - D_1D_4}{D_3^2 + D_4^2}, \tag{6}$$

где

$$D_1 = (\mathrm{Pr}\eta'/630\eta_0)(504 + 24a^2 + a^4);$$

$$D_2 = (1/630\eta_0)[\omega\eta_0(12 + a^2) - \mathrm{Pr}\eta''(a^4 + 24a^2 + 504)];$$

$$D_3 = \mathrm{Pr}a^2M/630(a^4 + \omega^2)^3;\quad D_4 = \mathrm{Pr}a^2N/630(a^4 + \omega^2)^3;$$

$$M = M(a,\ \omega,\ C_1,\ C_2,\ p,\ q);\quad N = N(a,\ \omega,\ C_1,\ C_2,\ p,\ q).$$

Равенство нулю мнимой части (6) определяет зависимость волнового числа от частоты колебаний ω

$$p = \mathrm{Re}[(a^2 + i\omega)^{1/2}],\quad q = Im[(a^2 + i\omega)^{1/2}].$$

Формула (6) дает значение критического числа Рэлея в зависимости от параметров: волнового числа a, отношений теплопроводности массивов $\overline{\varkappa}_s$, параметра упругости, частоты колебаний и числа Прандтля. Определение критического числа Рэлея производилось на ЭВМ «М-222» для случая, когда для компонент комплексной вязкости справедливы соотношения

$$\eta' = \eta_0/[1 + (\omega\bar{\lambda})^2],\quad \eta'' = \eta_0\omega\bar{\lambda}/[1 + (\omega\bar{\lambda})^2],$$

где $\bar{\lambda}$ — максвелловское время релаксации. Параметр $\lambda = \bar{\lambda}\chi/d^2$, являясь мерой упругости, представляет собой отношение времени релаксации напряжений ко времени тепловой релаксации. Комплексная вязкость в общем случае определяется из динамических экспериментов как функция

Pr	λ	$\bar{\varkappa}$	$\bar{\varkappa}_1=\infty,\ \bar{\varkappa}_2=\bar{\varkappa}$			$\bar{\varkappa}_1=0,\ \bar{\varkappa}_2=\bar{\varkappa}$			$\bar{\varkappa}_1=\bar{\varkappa}_2=\bar{\varkappa}$		
			Ra_*	a_*	ω_*	Ra_*	a_*	ω_*	Ra_*	a_*	ω_*
10	0,1	∞	(230,0)	(7,3)	(76,6)						
		∞	228,7	6,7	71,32	231,3	7,0	73,8	228,7	6,7	71,3
		2,00	228,9	7,0	73,91	232,5	7,0	73,7	231,4	6,5	69,4
		0,20	229,6	7,3	76,55	234,1	7,0	73,6	232,6	71	74,6
		0,02	231,1	7,4	77,42	235,0	7,0	73,65	233,4	7,0	73,8
	1,0	∞	(7,49)	(4,72)	(20,77)						
		∞	7,08	4,9	21,15	7,23	5,4	22,1	7,08	4,9	21,15
		2,00	7,01	4,6	20,65	7,15	4,6	20,6	7,01	4,8	20,95
		0,20	7,14	5,0	21,3	7,28	4,8	20,9	7,31	5,0	21,25
		0,02	7,10	5,1	21,3	7,24	4,8	20,9	7,27	4,8	20,9
		0,00	6,84	5,0	21,3	6,84	5,0	21,3	6,84	5,0	21,3
100	0,1	∞	(130,1)	(11,96)	(385,8)						
		∞	129,5	11,94	381,2	135,0	8,4	276,1	129,5	11,9	381,2
		2,00	133,4	8,3	272,5	135,1	8,4	276,0	130,0	8,4	276,0
		0,20	134,5	8,3	272,1	135,3	8,3	273,2	133,1	8,4	276,0
		0,02	135,5	8,3	271,0	135,6	8,3	273,0	135,0	8,4	276,1
	1,0	∞	(2,203)	(7,29)	(83,45)						
		∞	2,201	7,29	83,51	2,08	6,4	76,6	2,20	7,29	83,51
		2,00	2,032	6,31	75,91	2,09	6,4	76,6	2,08	6,41	76,6
		0,20	2,037	6,30	75,9	2,09	6,4	76,6	2,09	6,40	76,6
		0,02	2,038	6,3	75,9	2,03	6,0	73,8	2,09	6,40	76,6

частоты. Безразмерная частота имеет вид $\omega = \bar{\omega} d^2/\chi$, поэтому для реальной жидкости величина d^2/χ должна быть фиксирована.

Из множества корней уравнения $a = a(\omega)$ выбирались значения ω, дающие наименьшую действительную величину Ra.

Значения вычисленных критических параметров Ra_*, a_*, ω_*, соответствующие потере устойчивости, приведены в таблице, откуда можно заключить, что теплопроводность границ оказывает незначительное влияние на возникновение колебательной неустойчивости (в скобках приведены значения критических параметров из [8]). Для ньютоновской жидкости при уменьшении теплопроводности граничных массивов устойчивость монотонно понижается, а длина волны критических возмущений растет [7].

Колебательная неустойчивость встречается в жидкостях с большим отношением времени релаксации ко времени тепловой релаксации [1]. Проникновение температурных возмущений в массивы увеличивает эффективные размеры области существования возмущений. Относительно большая свобода развития температурных возмущений приводит к уменьшению времени релаксации жидкости и задерживает возникновение колебательной неустойчивости, а наличие границ с конечной теплопроводностью приводит к понижению устойчивости [5].

Наложение этих двух явлений приводит к тому, что влияние теплопроводности границ не оказывает значительного влияния на возникновение колебательной неустойчивости. Если время релаксации уменьшается настолько, что жидкость можно считать обладающей очень короткой памятью, неустойчивость возникает через стационарное состояние.

Поступила 3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гарифуллин Ф. А.** Устойчивость слоя упруговязкой жидкости при подогреве снизу.— ПМТФ, 1974, № 6.
2. **Pipkin A. C.** Small finite deformations of viscoelastic solids.— «Rev. Mod. Phys.», 1964, vol. 36, N 5.
3. **Pipkin A. C., Owen D. R.** Nearly viscometric flows.— «Phys. Fluids», 1967, vol. 10, N 4.
4. **McIntire L. V., Schowalter W. R.** Stability of viscoelastic fluids: plane Couette flow with superposed temperature gradient. —«Trans. Soc. Rheol.», 1970, vol. 14, N 4.
5. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
6. **Kondo H.** Effects of finite conductivity and finite thickness of the walls of a fluid tank on the convective instability.— «J. Meteorol. Soc. Japan», 1971, vol. 49, N 6.
7. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Семакин И. Г.** О конвективной неустойчивости жидкости в горизонтальном слое, разделяющем массивы разной теплопроводности.— «Учен. зап. Пермск. ун-та», 1971, № 248. Гидродинамика, вып. 3.
8. **Vest C. M., Arpaci V. S.** Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below.— «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 36, N 3.

УДК 530.161/.162

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА В ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ МЕХАНИЧЕСКИ РАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В РАМКАХ ТЕРМОДИНАМИКИ НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

А. С. Плешанов

(*Москва*)

Общий анализ влияния химических реакций на процессы переноса тепла и вещества был предметом исследований ряда авторов (см. библиографию в [1]). Такого рода анализ для механически равновесных систем в симметричной форме проведен в [2]. В данной работе показано, что описание химических процессов может осуществляться в определенном смысле независимо от процессов тепломассопереноса.

Процессы в механически равновесной (покоящейся) системе, состоящей из k химических компонент $K_i(i,\ i=1,\dots,k)$, между которыми проходят r независимых реакций $R_s(s,\ t=1,\dots,r)$, описываются k уравнениями непрерывности

$$\rho\frac{\partial c_i}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{I}_i=\sum_s m_i\nu_{is}\theta_s, \tag{1}$$

где при прочих обозначениях c_i — массовая доля; $\mathbf{I}_i$ — диффузионный поток; m_i — молекулярный вес, г/моль; θ_s — скорость R_s, моль/см^3·с;