УДК 532.135-532.526
DOI: 10.15372/PMTF202315340

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ДИЛАТАНТНОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАССООБМЕНА

А. Н. Попков

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия
E-mail: popkov@itam.nsc.ru

С использованием степенной модели Оствальда — Райнера в частном случае $n = 2$ (дилатантная жидкость) получено аналитическое (точное) решение уравнений двумерного пограничного слоя неньютоновской вязкой жидкости при наличии массообмена. Отмечено, что в данном случае кажущаяся вязкость описывается выражением, совпадающим с выражением для турбулентной вязкости ньютоновской жидкости, полученным с помощью модели пути перемешивания Прандтля. Установлено, что в рассматриваемом частном случае имеется аналогия между течениями неньютоновской жидкости и ньютоновской жидкости с турбулентной вязкостью.

Ключевые слова: неньютоновская степенная жидкость, пограничный слой, частное аналитическое решение

Исследование гидродинамики, тепло- и массообмена неньютоновских жидкостей является важным направлением механики, поскольку эти жидкости активно используются в современных технологиях. Изучению указанных процессов посвящено большое количество работ, что обусловлено многообразием форм движения неньютоновских сред, описываемых различными реологическими моделями. Одними из наиболее сложных являются движения вязкоупругих сред, которые описываются реологическим соотношением Максвелла и его различными модификациями.

Точные решения в механике жидкости и газа используются при анализе особенностей рассматриваемых течений, а также при верификации численных методов, применяемых в этой области. В теории пограничного слоя ньютоновских жидкостей известно небольшое число таких решений, систематизированных Л. Розенхедом [1].

Течения нелинейно-вязких жидкостей описываются достаточно сложными уравнениями в частных производных в зависимости от выбранной реологической модели. Несмотря на это, точные решения получены для различных неньютоновских сред [2], при этом большую роль играют групповые методы исследований уравнений в частных производных [3]. Решения уравнений движения микрополярных и вязкоупругих сред получены в работе [4].

В работах [5, 6] представлен обзор предложенных реологических моделей, описывающих течения нелинейно-вязких жидкостей. Отмечено, что степенное реологическое соотношение, предложенное В. Оствальдом [7] и модифицированное М. Рейнером [8], позволяет

Работа выполнена в рамках государственного задания Института теоретической и прикладной механики СО РАН.

с удовлетворительной для практики точностью описывать неньютоновское поведение аномально вязких жидкостей.

Двухпараметрическая модель Оствальда — Райнера записывается в виде

$$\tau_{ij} = \delta_{ij} P + k(0{,}5\dot{e}_{lm}\dot{e}_{lm})^{(n-1)/2}\dot{e}_{ij},$$

где $\dot{e}_{ij}$ — тензор скоростей деформации; k, n — постоянные величины, которые подбираются в результате вискозиметрических исследований какой-либо жидкости; параметр $n < 1$ соответствует псевдопластичной жидкости, $n = 1$ — ньютоновской жидкости, $n > 1$ — дилатантной жидкости. Кажущаяся вязкость аномально вязких жидкостей определяется по соотношению

$$\mu_v = k(0{,}5\dot{e}_{lm}\dot{e}_{lm})^{(n-1)/2},$$

где при $n < 1$ вязкость μ_v уменьшается с увеличением скорости сдвига, при $n = 1$ вязкость постоянна: $\mu_v = k$, при $n > 1$ вязкость μ_v увеличивается с увеличением скорости сдвига.

Получено большое количество точных решений двумерных уравнений движения степенных неньютоновских жидкостей (см., например, [9–11]). Следует отметить, что в работе [4] также получено точное решение для частного случая, когда вязкость изменяется по степенному закону. В [9, 10] применяется модель степенной жидкости Оствальда — де Виля, где $n < 1$.

В одном из частных случаев решение можно получить в элементарных аналитических функциях в замкнутом виде. В случае степенного реологического закона для неньютоновской жидкости при стационарном обтекании полубесконечной пластины уравнение пограничного слоя при $n = 2$ (дилатантная жидкость) имеет вид [12]

$$|F''|/F''' + FF'' = 0, \tag{1}$$

где $F' = U/U_\infty$ — безразмерная скорость.

При условии, что производная профиля скорости $F'' \geqslant 0$, уравнение (1) разделяется на два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения

$$F''(y) = 0; \tag{2}$$

$$F'''(y) + F(y) = 0 \tag{3}$$

с граничными условиями

$$F(0) = A; \tag{4}$$

$$F'(0) = 0; \tag{5}$$

$$\lim_{y\to\infty} F' = 1. \tag{6}$$

Параметр $A = \mathrm{const}$ определяет массообмен на поверхности пластины. При $A < 0$ происходит вдув жидкости через поверхность, при $A > 0$ — отсос жидкости.

Уравнение (2) описывает невозмущенное течение, уравнение (3) — пристенное вязкое течение, и его решение известно [13]:

$$F(y) = C_1\,\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-y/2}\,[C_2\cos(\beta) + C_3\sin(\beta)], \qquad \beta = \sqrt{3}\,y/2.$$

Стыковка решений осуществляется при некотором минимальном значении независимой переменной $y = y_{\min}$. Это значение находится из граничного условия (6): $F'|_{y=y_{\min}} = 1$ и дополнительного условия $F''|_{y=y_{\min}} = 0$. В результате для четырех неизвестных постоянных C_1, C_2, C_3, $y_{\min}$ записывается система нелинейных алгебраических уравнений, решение которой определяет представленное в элементарных функциях аналитическое решение уравнения пограничного слоя неньютоновской жидкости в рассматриваемом частном случае.

Следует отметить, что для рассматриваемого двумерного пограничного слоя дилатантной жидкости при $n = 2$ выражение для кажущейся вязкости

$$\mu_v = k(0{,}5\dot{e}_{lm}\dot{e}_{lm})^{1/2}$$

совпадает с формулой для модели пути перемешивания Прандтля для двумерного турбулентного пограничного слоя ньютоновской жидкости

$$\mu_v = k\sqrt{0{,}5}\,\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big]^{1/2} = k\sqrt{0{,}5}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Выражение для эффективного коэффициента турбулентной вязкости μ_T имеет вид

$$\mu_T = \rho l^2 \Big|\frac{\partial u}{\partial y}\Big|,$$

где ρ — плотность жидкости; l — длина пути перемешивания. При этом предполагается, что длина пути перемешивания l постоянна по нормали и не зависит от y. В этом случае турбулентное течение ньютоновской жидкости можно считать аналогичным течению неньютоновской дилатантной жидкости в пограничном слое при $n = 2$. Действительно, в работе [14] изучается истекание плоской турбулентной струи ньютоновской жидкости в затопленное пространство. Уравнение движения совпадает с уравнением (1).

В отсутствие массообмена на поверхности пластины ($A = 0$) для постоянных получаем соотношения [12]

$$C_2 = -C_1, \qquad C_3 = \sqrt{3}\,C_1.$$

Значение величины, определяющей трение на поверхности пластины, вычисляется из уравнения

$$F''\big|_{y=0} = 3C_1,$$

переменная $y_{\min}$ находится из уравнения

$$\mathrm{e}^{-3a} + 2\cos(\beta_{\min}) = 0,$$

постоянная C_1 определяется с использованием значения $y_{\min}$ из уравнения

$$C_1 = \frac{2\,\mathrm{e}^{-a}}{2\sqrt{3}\,\sin(\beta_{\min}) - 3\,\mathrm{e}^{-3a}}, \qquad \beta_{\min} = \sqrt{3}\,\frac{y_{\min}}{2}, \qquad a = \frac{y_{\min}}{2}.$$

В работе [12] получены значения $C_1 = 0{,}242\,155\,9$, $y_{\min} = 1{,}832\,44$, $F''(0) = 0{,}726\,467\,7$. Значения величин $y_{\min}$, $F''(0)$, полученные при численном решении дифференциальных уравнений [5], равны $y_{\min} = 1{,}8$, $F''(0) = 0{,}7265$.

При наличии массообмена на поверхности пластины ($A \ne 0$) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных C_1, C_2, C_3, $y_{\min}$ при различных значениях параметра A, соответствующих отсосу ($A > 0$) или вдуву ($A < 0$) в пограничный слой через обтекаемую поверхность. В этом случае задача определения постоянных C_1, C_2, C_3, $y_{\min}$ существенно усложняется. Постоянные C_2, C_3 выражаются через C_1:

$$C_2 = A - C_1, \qquad C_3 = \sqrt{3}\,C_1 - A/\sqrt{3}\,,$$

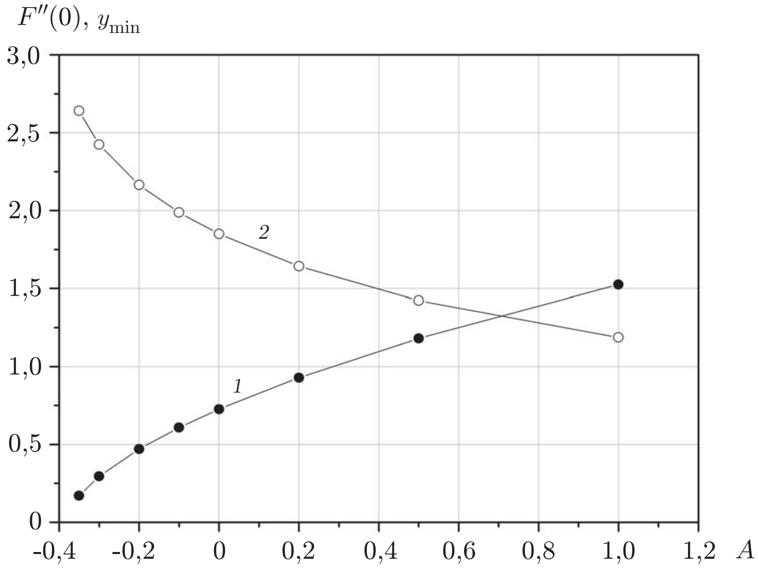
выражение для величины, определяющей трение, имеет вид

$$F''(0) = 3C_1 - A.$$

Путем последовательного исключения переменных система четырех уравнений сводится к одному алгебраическому уравнению относительно $y_{\min}$, которое является нелинейным.

Параметры решения уравнения (7) при $n = 2$

A	C_1	$F''(0)$	$y_{\min}$
−0,35	−0,059 94	0,170 170	2,641 59
−0,30	−0,001 61	0,295 167	2,423 67
−0,20	0,090 10	0,470 290	2,164 46
−0,10	0,169 34	0,608 010	1,987 33
0	0,242 16	0,726 470	1,849 81
0,20	0,376 35	0,929 040	1,641 61
0,50	0,560 49	1,181 460	1,423 27
1,00	0,841 64	1,524 920	1,187 47



Зависимости $F''(0)$ (*1*) и $y_{\min}$ (*2*) от параметра A при $n = 2$

Поскольку получить аналитическое решение этого уравнения невозможно, оно решалось численно. Наличие особых точек существенно затрудняет определение физически обоснованных значений корней уравнения для $y_{\min}$ при различных значениях параметра отсоса (вдува) A. Это уравнение имеет вид

$$\Big[A\Big(2\mu - \frac{\gamma^3}{\sqrt{3}}\Big) + \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\gamma + \sqrt{-(A\mu)^2 + \sqrt{3}\,A^2\gamma^3\mu + 2A\gamma^4 + \gamma^2 + 0{,}25A^2\gamma^6}\,\Big)\Big](1-\gamma^6) -$$
$$- \Big(A + \gamma^4 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{A^2(4\gamma^6 - 1) + 6A\gamma^4 + 4\gamma^2 - \gamma^8}\,\Big)(2\mu - \gamma^3\sqrt{3}\,) = 0, \qquad (7)$$

где $\mu = \sin(\beta_{\min})$; $\gamma = \mathrm{e}^{-a}$; $\beta_{\min} = \sqrt{3}\,y_{\min}/2$; $a = y_{\min}/2$. Определив $y_{\min}$, постоянную C_1 можно найти по формуле

$$C_1 = \big(A + \gamma^4 + \sqrt{(A+\gamma^4)^2 - (4/3)(A^2 - \gamma^2)(1-\gamma^6)}\,\big)/[2(1-\gamma^6)].$$

Результаты расчетов представлены в таблице и на рисунке. Следует отметить, что в работе [5] также представлены решения уравнения для пограничного слоя в случае неньютоновских жидкостей, но расчеты при $n = 2$ и $A < 0$ не проводились.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Laminar** boundary layers / Ed. by L. Rosenhead. Oxford: Clarendon Press, 1963.
2. **Mansour A. R., Rajie O. T.** A new explicit equation for the friction factor for non-Newtonian fluids in circular ducts // Chem. Ingenieur Tech. 1987. V. 59, N 4. P. 330–332.
3. **Пухначев В. В.** Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 16–23.
4. **Шелухин В. В., Неверов В. В.** Течение микрополярных и вязкопластических жидкостей в ячейке Хеле-Шоу // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 6. С. 3–15.
5. **Шульман З. П.** Пограничный слой неньютоновских жидкостей / З. П. Шульман, Б. М. Берковский. Минск: Наука и техника, 1966.
6. **Шульман З. П.** Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975.
7. **Ostwald W., Auerbach R.** Ueber die Viscositat Kolloider Losungen im Struktar-, Laminar- und Turbalenz-gebiet // Kolloid Z. 1926. Bd 38, S. 261–264.
8. **Reiner M.** Deformation and flow. S. l.: H. K. Lewis, 1949.
9. **Gupta A. S., Misra J. C., Reza M.** Effects of suction or blowing on the velocity and temperature distribution in the flow past a porous flat plate of a power-law fluid // Fluid Dynamics Res. 2003. V. 32. P. 283–294.
10. **Махмуд М. А. А., Меджахед А. М.** Эффекты вязкой диссипации и тепловыделения (поглощения) в тепловом пограничном слое неньютоновской жидкости на движущейся проницаемой плоской пластине // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 5. С. 107–114.
11. **Полянин А. Д.** Точные решения уравнений нестационарного пограничного слоя степенных неньютоновских жидкостей // Докл. РАН. 2015. Т. 463, № 5. С. 547–551.
12. **Popkov A. N.** Analytical solution of the equation of the boundary-layer of non-Newton power-law fluids on the plate // ICMAR XV: Abstr., Novosibirsk (Russia), 1–6 Nov. 2010. Novosibirsk: S. n., 2010. Pt 2. P. 203–204.
13. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
14. **Tolmien W.** Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgënge // Z. angew Math. Mech. 1926. Bd 6. S. 468–478.

Поступила в редакцию 20/VI 2023 г.,
после доработки — 18/I 2024 г.
Принята к публикации 29/I 2024 г.