3. **Kitagawa A.** A method of absorption for surge pressure in conduits // Bull. JSME.— 1979.— V. 22, N 165.
4. **Актершев С. П., Федоров А. В.** Увеличение давления гидроудара в трубопроводе при наличии локализованного объема газа // ПМТФ.— 1987.— № 6.
5. **Чарный И. А.** Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах.— М.: Недра, 1975.

г. Новосибирск *Поступила 26/V 1988 г., в окончательном варианте — 16/XII 1988 г.*

УДК 537.84

Ю. Н. Гордеев, В. В. Мурзенко

ВОЛНОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ПРОВОДЯЩЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследование волновых режимов, возникающих в тонких слоях вязкой слабопроводящей жидкости в магнитном и электрическом полях, представляет интерес в связи с перспективами использования пленочных течений в ядерной энергетике [1] и других технологических процессах. Экспериментальные и теоретические исследования волновых эффектов и структур, возникающих на свободной поверхности обычной (неэлектропроводной) вязкой жидкости, показали, что данные явления существенно влияют на устойчивость и эволюцию пленочных течений [2—4]. Впервые теория волнового движения поверхности ламинарной вязкой пленки разработана П. Л. Капицей [2]. Было получено критическое значение числа Рейнольдса, с превышением которого в пленке устанавливается волновой режим. Показано, что в пленках в волновом режиме улучшается массообмен по сравнению с обычными условиями течения. В настоящее время интенсивно изучаются магнитогидродинамические течения пленок проводящей вязкой жидкости [5—7]. В [5] предложена математическая модель течения со свободной поверхностью жидкометаллической диафрагмы энергетической установки. Асимптотика поверхности растекающейся пленки в поперечных электрическом и магнитном полях приводится в [6]. Устойчивость ламинарного течения пленки электропроводной жидкости в безындукционном приближении рассмотрена в [7] на основании уравнения Орра — Зоммерфельда.

В данной работе найдено уравнение, описывающее длинноволновые колебания поверхности тонкого слоя проводящей жидкости, находящейся в скрещенных электрическом и магнитном полях. Проанализированы условия, при которых имеют место различные предельные случаи этого уравнения.

1. Постановка задачи. Течение вязкой жидкости во внешних стационарных магнитном $\mathbf{H}_0$ и электрическом $\mathbf{E}_0$ полях может описываться уравнениями магнитной гидродинамики, которые при малых магнитных числах Рейнольдса Re (безындукционное приближение) сводятся к следующим [8]:

$$\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla P/\rho_0 + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{F}_c,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1.1}$$
$$\mathbf{F}_c = (\rho_0 c)^{-1}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}_0] + \mathbf{g},\ \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{u}\times\mathbf{H}_0]),\ \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi;$$
$$\Delta\varphi = c^{-1}\mathbf{H}_0\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}. \tag{1.2}$$

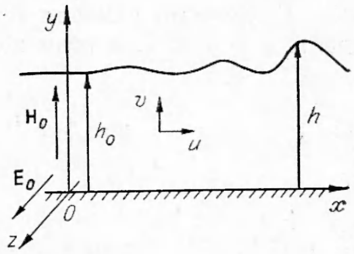
Здесь $\mathbf{u}$ — скорость жидкости, P, ρ_0 — ее давление и плотность; c — скорость света; ν — кинематическая вязкость и σ — проводимость жидкости; $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести.

Рассмотрим плоское течение: $\mathbf{u} = \{u, v, 0\}$, $\partial\mathbf{u}/\partial z = 0$. При этом уравнение (1.2) для потенциала переходит в уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$, из которого $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ (постоянное внешнее поле).

Таким образом, при $\mathrm{Re}_m \ll 1$ для течения проводящей жидкости в электромагнитных полях, показанных на рисунке, имеем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0,\ \mathbf{E} = \mathbf{E}_0. \tag{1.3}$$

К системе уравнений (1.1) необходимо добавить условия на границе раздела между жидкостью и твердой поверхностью $S_т$ и на свободной поверхности S_p [9] ($F(\mathbf{r},\ t) = 0$ — уравнение свободной поверхности)



$$
\begin{gathered}
\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{r} \in S_\text{т}, \left[P - P_\text{а} + \right. \\
\left. + \sigma_* \left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)\right] n_i = \sigma_{ik} n_k, \\
F_t + (\mathbf{u}\nabla) F = 0,
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

где $P_\text{а}$ — атмосферное давление; σ_* — коэффициент поверхностного натяжения; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны в точке $\mathbf{r}$ поверхности S_p; n_i— косинусы нормали к свободной поверхности; σ_{ik}— тензор вязких напряжений.

Рассмотрим плоское течение пленки жидкости толщины $y = h(x,\ t)$ в постоянных поперечных электрическом и магнитном полях (см. рисунок). Введем безразмерные переменные и параметры

$$
\begin{gathered}
x' = x/l,\ y' = y/h_0,\ h' = h/h_0,\ t' = t/t_0, \\
P' = (P - P_\text{а})/P,\ u' = u/u_0,\ v' = v/v_0,\ v_0 = \delta u_0, \\
u_0 = \sqrt{gh_0},\ \delta = h_0/l = u_0^2/(gl) = \mathrm{Fr},\ P_0 = \rho_0 u_0^2,\ \alpha = cE_0/u_0H_0
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

(Fr — число Фруда, l — характерная длина возмущения на поверхности пленки, h_0 — средняя толщина пленки). Далее штрихи над безразмерными переменными опускаем, полагая $x = x'$, $y = y'$, $h = h'$ и т. д. При этом система уравнений (1.1), (1.2), (1.3) с граничными условиями (1.4) в безразмерных переменных (1.5) запишется как

$$u_t + uu_x + vu_y + P_x = (1/\mathrm{Re})(u_{xx} + u_{yy}/\delta^2) + \mathrm{Ha}^2(\alpha - u)/(\delta^2\mathrm{Re}); \tag{1.6}$$

$$\delta^2(v_t + uv_x + vv_y) + P_y = (\delta^2/\mathrm{Re})(v_{xx} + v_{yy}/\delta^2) - 1; \tag{1.7}$$

$$u_x + v_y = 0; \tag{1.8}$$

$$u = v = 0,\ y = 0; \tag{1.9}$$

$$P = \frac{2\left[v_y + \delta^2\eta_x^2 u_x - \eta_x\left(u_y + \delta^2 v_x\right)\right]}{\mathrm{Re}\left(1 + \delta^2\eta_x^2\right)} - \mathrm{We}\frac{\eta_{xx}}{\left(1 + \delta^2\eta_x^2\right)^{3/2}},\ y = 1 + \eta; \tag{1.10}$$

$$(u_y + \delta^2 v_x)(1 - \delta^2\eta_x^2) - 2\delta^2\eta_x(u_x - v_y) = 0,\ y = 1 + \eta; \tag{1.11}$$

$$\eta_t + u\eta_x = v \tag{1.12}$$

($\mathrm{Re} = u_0 l/\nu$, $\mathrm{Ha} = H_0 h_0 \sqrt{\sigma/\rho_0\nu}/c$, $\mathrm{We} = \sigma_*/(g\rho_0 l)^2$ — числа Рейнольдса, Гартмана, Вебера).

2. Длинноволновое приближение. Найдем решение задачи (1.6)—(1.12) в виде разложения по малому параметру $\delta \ll 1$ (длинноволновое приближение)

$$
\begin{gathered}
\eta = \delta\eta^{(1)} + \delta^2\eta^{(2)} + \ldots,\ P = P^{(0)}(y) + \delta P^{(1)} + \delta^2 P^{(2)} + \ldots, \\
v = -\delta\partial\psi^{(1)}/\partial x - \delta^2\partial\psi^{(2)}/\partial x - \ldots, \\
u = u^{(0)}(y) + \delta\partial\psi^{(1)}/\partial y + \delta^2\partial\psi^{(2)}/\partial y + \ldots,
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

где $\psi = \delta\psi^{(1)} + \delta^2\psi^{(2)} + \ldots$ — функция тока; $u^{(0)}(y)$, $P^{(0)}(y)$ — решения уравнений (1.6)—(1.8), соответствующие стационарному течению жидкости ($\eta^{(0)} = v^{(0)} = 0$). Уравнения для $P^{(0)}$ и $u^{(0)}$ есть

$$u_{yy}^{(0)} + \mathrm{Ha}^2\left(\alpha - u^{(0)}\right) = 0, P_y^{(0)} = -1, u_y^{(0)}(1) = u^{(0)}(0) = 0, P^{(0)}(1) = 0. \tag{2.2}$$

Интегрируя (2.2), получим

$$u^{(0)} = \alpha\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\{\mathrm{Ha}(y - 1)\}}{\operatorname{ch}\mathrm{Ha}}\right], P^{(0)} = 1 - y. \tag{2.3}$$

Введем новые переменные ξ и τ вместо x и t: $\tau = \delta t$, $\xi = x - Ft$. Подставляя (2.1), (2.3) и выражения для τ и ξ в (1.6)—(1.8) и опуская слагаемые порядка δ^2 и выше, имеем

$$\psi_{yyy}^{(1)} - \mathrm{Ha}^2\psi_y^{(1)} = 0, P_y^{(1)} = -\mathrm{Re}^{-1}\psi_{\xi yy}^{(1)}. \tag{2.4}$$

Граничные условия при $y=0$ и на свободной поверхности, приведенные к $y=1$, в этом же приближении запишем в форме

$$y=0, \psi^{(1)}=\psi_y^{(1)}=0; \tag{2.5}$$

$$y=1, P^{(1)}=\eta^{(1)}-2\mathrm{Re}^{-1}\psi_{\xi y}^{(1)}-\mathrm{We}\,\eta_{\xi\xi}^{(1)}, \tag{2.6}$$

$$y=1, u_{yy}^{(0)}\eta^{(1)}+\psi_{yy}^{(1)}=0, \left(u^{(0)}-F\right)\eta_\xi^{(1)}+\psi_\xi^{(1)}=0.$$

Решение системы (2.4) с граничными условиями (2.5), (2.6) при $F=\alpha\,\mathrm{th}^2\,\mathrm{Ha}$ находим следующим образом:

$$\psi^{(1)}=\frac{\alpha\,(\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}\,y-1)}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{Ha}}\eta^{(1)}, \tag{2.7}$$

$$P^{(1)}=-\mathrm{We}\,\eta_{\xi\xi}^{(1)}-\alpha\frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{Re}}\frac{(\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}\,y+\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha})}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{Ha}}\eta_\xi^{(1)}+\eta^{(1)}.$$

Для определения $\eta^{(1)}$ воспользуемся уравнениями второго приближения по δ. Подставляя (2.1), (2.3), (2.7) в (1.6), (1.9)—(1.12) и опуская слагаемые порядка δ^3 и выше, получим

$$\psi_{yyy}^{(2)}-\mathrm{Ha}^2\psi_y^{(2)}=-\psi_{\xi\xi y}^{(1)}+\mathrm{Re}\left[P_\xi^{(1)}-u_y^{(0)}\psi_\xi^{(1)}+u^{(0)}\psi_{\xi y}^{(1)}-F\psi_{\xi y}^{(1)}\right]; \tag{2.8}$$

$$y=0, \psi^{(2)}=\psi_y^{(2)}=0; \tag{2.9}$$

$$y=1, \eta^{(2)}u_{yy}^{(0)}+\eta^{(1)}\psi_{yyy}^{(1)}+\psi_{yy}^{(2)}-\psi_{\xi\xi}^{(1)}=0, \tag{2.10}$$

$$y=1, \eta_\tau^{(1)}+\left(u^{(0)}-F\right)\eta_\xi^{(2)}+\left(\eta^{(1)}\psi_\xi^{(1)}\right)_\xi+\psi_\xi^{(2)}=0.$$

Из (2.8)—(2.10) с учетом (2.3), (2.7) найдем замкнутое уравнение для $w=\mathrm{Re}\,\eta^{(1)}$ $(s=\tau 2\,\mathrm{Re}\,\alpha\mathrm{Ha}\,\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}/\mathrm{ch}^2\,\mathrm{Ha})$

$$w_s+ww_\xi+\varepsilon w_{\xi\xi}+\beta w_{\xi\xi\xi}+\omega w_{\xi\xi\xi\xi}=0; \tag{2.11}$$

$$\varepsilon=[\alpha\mathrm{Ha}(3\mathrm{Ha}-3\,\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}-\mathrm{Ha}\,\mathrm{th}^2\,\mathrm{Ha})-2\alpha^{-1}(\mathrm{Ha}\,\mathrm{cth}\,\mathrm{Ha}-1)\times$$
$$\times\mathrm{ch}^2\,\mathrm{Ha}]/(4\mathrm{Ha}^4);$$

$$\beta=(1-\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha})(2-2\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}-\mathrm{Ha}\,\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha})/(2\mathrm{Re}\mathrm{Ha}^3),$$
$$\omega=\mathrm{We}\,\mathrm{ch}^2\,\mathrm{Ha}(\mathrm{Ha}\,\mathrm{cth}\,\mathrm{Ha}-1)/(2\alpha\mathrm{Ha}^4).$$

Уравнение (2.11) — эволюционное уравнение с нелинейностью типа Бюргерса и КдВ. Общепринятой для таких уравнений является интерпретация w как плотности потока импульса, а $w^2/2$ — плотности потока энергии [10]. Из (2.11) следуют законы сохранения импульса и энергии для локализованных возмущений: $\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w\,d\xi=0, \frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(w^2/2)\,d\xi=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}w_\xi^2\,d\xi-$ $-\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}w_{\xi\xi}^2\,d\xi$. Значит, слагаемое $\varepsilon w_{\xi\xi}$ в (2.11) отвечает за подкачку энергии в волну, а $\omega w_{\xi\xi\xi\xi}$ — за ее диссипацию. Причем подкачка осуществляется на низких частотах, а ее диссипация — на высоких. Нелинейное слагаемое ww_ξ дает возможность энергии перекачиваться от колебаний с низкой частотой к высокочастотным колебаниям. Член $\beta w_{\xi\xi\xi}$ в (2.11) описывает дисперсию энергии.

Нетрудно показать, что при любых $\mathrm{Ha}>0$ коэффициенты $\omega>0$ и $\beta>0$. Знак ε определяется величиной α: если $\alpha^2>(\alpha^*)^2=2(\mathrm{Ha}\,\mathrm{cth}\,\mathrm{Ha}-1)\,\mathrm{ch}^2\,\mathrm{Ha}/[\mathrm{Ha}(3\mathrm{Ha}-3\,\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}-\mathrm{Ha}\,\mathrm{th}^2\,\mathrm{Ha})]>0$, то $\varepsilon>0$; при $\alpha<\alpha^*$ $\varepsilon<0$. Отсюда следует, что подкачка энергии в волну ($\varepsilon>0$) имеет место, если электрическое поле $\mathbf{E}_0$ достаточно велико. В связи с этим можно отметить аналогию рассматриваемого процесса со стеканием вязкой неэлектропроводной жидкости по наклонной плоскости [4]. Здесь также существует критический параметр — угол φ_0 между наклонной плоскостью и вертикалью. Если $\varphi<\varphi_0$, то колебания на поверхности жидкости затухают, если $\varphi>\varphi_0$,— энергия возмущений не убывает.

3. Периодические решения уравнения (2.11). Рассмотрим решения уравнения (2.11) типа стационарных бегущих волн, в которых w — функция переменной $\theta = \xi - Ds$ (D — скорость распространения волны). В этом случае (2.11) запишется в виде

$$\omega w^{\mathrm{IV}} + \beta w''' + \varepsilon w'' + \omega w' - w' = 0. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) допускает решения типа волновых фронтов, уединенных и периодических волн. Интегрируя (3.1) по θ, получаем

$$\omega H''' + \beta H'' + \varepsilon H' + H(2H - D) = 0, \tag{3.2}$$

$$H = (w - D)/4 + \sqrt{(D/4)^2 + q/8}$$

(q — постоянная интегрирования). Для периодических волн q находим из условия $\int\limits_0^\lambda w d\theta = 0$ (λ — длина волны), которое является следствием определения w как отклонения от средней толщины пленки.

У уравнения (3.2) два однородных стационарных решения: $H = H_1 = 0$, $H = H_2 = D/2$. Дифференциальное уравнение (3.2) записано в виде системы уравнений первого порядка

$$dH/d\theta = Q,\ dQ/d\theta = R,\ \omega dR/d\theta = -\beta R - \varepsilon Q - H(2H - D). \tag{3.3}$$

Для исследования (3.3) воспользуемся методами теории динамических систем, интерпретируя θ как время ($-\infty < \theta < \infty$, $\theta \to \infty$) [3]. Динамическая система (3.3) имеет две неподвижные точки: $S_1(0,\ 0,\ 0)$, $S_2(D/2,\ 0,\ 0)$, соответствующие стационарным решениям H_1, H_2. Собственные значения матрицы Якоби линеаризованной системы (3.3) в окрестности неподвижной точки S_k определяются из

$$\omega\rho^3 + \beta\rho^2 + \varepsilon\rho + (-1)^k D = 0.$$

При $|D| < \beta\varepsilon/\omega$ реальные части корней характеристического уравнения строго отрицательны и, следовательно, неподвижные точки S_k ($k = 1,\ 2$) устойчивы. При $k = 1$, $D = -\beta\varepsilon/\omega$ и $k = 2$, $D = \beta\varepsilon/\omega$ характеристическое уравнение имеет корни $\rho_1 = -\beta/\omega$ и $\rho_{2,3} = \pm i\sqrt{\varepsilon/\omega}$. Если $D > \beta\varepsilon/\omega$, то неподвижная точка S_2 становится линейно неустойчивой, при $D < -\beta\varepsilon/\omega$ линейно неустойчива S_1, т. е. происходит бифуркация рождения цикла при $D = \pm\beta\varepsilon/\omega$.

Найдем решение системы (3.3), а следовательно, и уравнения (3.2) вблизи точки бифуркации $D = \beta\varepsilon/\omega$. Воспользуемся предложенным в [9] алгоритмом, основанным на применении теоремы о центральном многообразии и на приведении автономной системы, отвечающей уравнению (3.2), к нормальной форме Пуанкаре. При $0 < D - D_* < \delta \ll 1$ такое решение имеет вид ($\gamma = \beta/\sqrt{\varepsilon\omega}$, $D_* = \beta\varepsilon/\omega$)

$$H = \frac{D}{2} + \frac{\delta}{1+\gamma^2}\left[\cos\frac{2\pi\theta}{T} - \gamma\sin\frac{2\pi\theta}{T}\right] + \frac{1}{3(4+\gamma^2)}\left(\frac{\delta}{1+\gamma^2}\right)^2\left[\gamma(5-\gamma^2)\times\right.$$
$$\left.\times\cos\frac{4\pi\theta}{T} + 2(1-2\gamma^2)\sin\frac{4\pi\theta}{T} - 3(\gamma^2+4)(1+\gamma^2)/\gamma\right] + O(\delta^3), \tag{3.4}$$

где $T = 2\pi\sqrt{\omega/\alpha}\{1 + 2\delta^2(4\gamma^2 + 25)/[3(\gamma^2 + 4)(\gamma^2 + 1)^2]\}$ — период; $\delta^2 = (D - D_*)/\mu_2 + O[(D - D_*)^2]$; $\mu_2 = 2(\gamma^2 + 8)/[\gamma(\gamma^2 + 4)(\gamma^2 + 1)]$. Поскольку показатель Флоке $\beta = \beta_2\delta^2 + O(\delta^4)$; $\beta_2 = -2(\gamma^2 + 8)/[\gamma(\gamma^2 + 4)(\gamma^2 + 1)]$, то в силу теоремы Хопфа [9] (3.4) устойчиво. При некоторых $|D| > \beta\varepsilon/\omega$ уравнение (3.2), а следовательно, и (2.11) имеют решения типа уединенных волн. В некоторых частных случаях они могут быть представлены аналитически [11], хотя в общем их можно найти только численно.

Таким образом, получено уравнение, описывающее распространение волны возмущений по поверхности пленки проводящей жидкости, находящейся в поперечных постоянных магнитном и электрическом полях.

Уравнение представляет обобщение известного уравнения Бюргерса — Кортевега-де Вриза. Указаны физические условия, при которых справедливы различные предельные формы уравнения. Показано, что это уравнение имеет две точки бифуркации рождения цикла и, как следствие, периодические решения вблизи этих точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глухих В. А., Тананаев А. В., Кириллов И. Р.** Магнитная гидродинамика в ядерной энергетике.— М.: Энергоатомиздат, 1987.
2. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ.— 1948.— Т. 18, вып. 1.
3. **Демехин Е. А., Шкадов В. Я.** К теории солитонов в системах с диссипацией // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 3.
4. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1974.— № 3.
5. **Аитов Т. Н., Кириллина Е. М.** Течение электропроводной жидкости в тонком слое со свободной поверхностью при воздействии сильного магнитного поля // Магнитная гидродинамика.— 1985.— № 3.
6. **Алиев И. Н., Шарохин А. П.** Асимптотика поверхности проводящей пленки в поперечном магнитном поле // Там же.
7. **Бернштам В. А., Козырев С. В., Незнамова Е. В., Элькин А. И.** Устойчивость течения пленки проводящей жидкости в наклонном магнитном поле // Магнитная гидродинамика.— 1985.— № 2.
8. **Ватажин А. Е., Любимов Г. А., Регирер С. А.** Магнитогидродинамические течения в каналах.— М.: Наука, 1970.
9. **Шкадов В. Я., Запрянов З. Д.** Течение вязкой жидкости.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
10. **Маурин Л. Н., Точигин А. А.** Солитоны на стекающей жидкой пленке // ПМТФ.— 1979.— № 4.
11. **Кудряшов Н. А.** Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ.— 1988.— Т. 53, вып. 3.

г. Москва *Поступила 7/VI 1988 г., в окончательном варианте — 9/IX 1988 г.*

УДК 539.3

С. П. Киселев, В. М. Фомин, Ю. А. Шитов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСКОКА ПОРИСТОГО ЦИЛИНДРА ОТ ЖЕСТКОЙ ПРЕГРАДЫ

Отскок сплошного цилиндра (ударника) от недеформируемой преграды изучался многими авторами (см., например, [1—4]). В данной работе исследуется отскок пористого ударника от жесткой преграды. Показано, что время контакта и характер затекания пор зависят от отношения длины ударника к его радиусу.

1. Описание поведения пористого тела проводится в рамках модели Прандтля — Рейса [5]. Присутствие пор в ударнике учитывается выбором уравнения состояния, которое будет приведено ниже. Такой подход справедлив при достаточно интенсивных нагрузках, когда во фронте пластической ударной волны (УВ) происходит полное затекание пор. В этом случае вещество за фронтом пластической волны является сплошным, а все особенности, связанные с затеканием пор, локализованы на фронте пластической волны. Уравнения Прандтля — Рейса в двухмерной постановке имеют вид [4—6]

$$(1.1)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}+k\frac{u}{r}\right)=0,$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial S_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial S_{rz}}{\partial z}+k\frac{S_{rr}-S_{\varphi\varphi}}{r},$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial S_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial S_{zz}}{\partial z}+k\frac{S_{rz}}{r},\ \frac{\partial r}{\partial t}=u,\ \frac{\partial z}{\partial t}=w,$$