УДК 532.72; 669.015.23

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА АКУСТИЧЕСКОЙ СУШКИ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. А. Жилин, А. В. Федоров, Ю. Г. Коробейников, В. М. Фомин

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложена математическая модель для описания экстракции влаги при сушке материалов в акустическом поле и проанализировано ее асимптотическое фильтрационное приближение. Установлено, что результаты вычислений времени установления давления в образце по фильтрационной модели хорошо согласуются с результатами расчетов, полученными при решении уравнений механики гетерогенных сред. Предложенная модель обладает устойчивыми во времени и пространстве решениями типа бегущих акустических волн и адекватно описывает начальную стадию процесса акустической сушки.

Ключевые слова: механика гетерогенных сред, математическое моделирование, экстракция влаги, акустическая сушка, устойчивость.

Широкое применение пористых материалов в химической, строительной, мебельной, пищевой и ряде других отраслей промышленности привлекает внимание различных специалистов к проблеме изучения механизмов и процессов, протекающих в пористых телах под воздействием внешних нагрузок, которые оказывают влияние на качество и свойства материалов. К данному классу материалов относятся твердые химические реагенты, получаемые путем прессования из дисперсных и ультрадисперсных порошков, природные материалы биологического состава, например древесина, зерно и т. д.

В настоящей работе в качестве объекта исследований использовалась древесина. Древесина является сложным полидисперсным материалом с ярко выраженными анизотропными свойствами. В древесине содержится значительное количество влаги, необходимой для жизнедеятельности дерева. В зависимости от породы, возраста и зоны сечения ствола влажность древесины на корню может изменяться в интервале от 40 до 140 %. Под влажностью древесины ω понимается количество влаги, отнесенное к массе абсолютно сухой древесины M_2: $\omega = 100(M_1 - M_2)/M_2$ (M_1 — масса образца древесины во влажном состоянии). Для превращения древесины в ценный строительный материал ей необходимо придать стойкость к гниению, чего добиваются удалением влаги.

В промышленности используются различные способы сушки древесины, основанные на подводе тепла к высушиваемому материалу [1]. Помимо конвективного способа сушки существует альтернативный акустический способ. При акустическом способе сушки влага удаляется из осушаемого материала при его облучении звуком с подходящими характеристиками. Основными достоинствами акустической сушки являются высокая интенсивность процесса, возможность его регулирования в широком диапазоне и достижение практически любой конечной влажности древесины. Принципиальное отличие акустического способа от традиционного термического состоит в том, что сушка протекает без

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке и в рамках молодежного гранта СО РАН "Моделирование механизма акустической сушки" и Интеграционного проекта № 46 СО РАН.

повышения температуры осушаемого материала (“холодная” сушка [2]). Вследствие этого возможна бездефектная сушка толстых брусьев с высокой прочностью высушенной древесины, которая при использовании конвективного способа сушки снижается из-за перегрева.

Процесс акустической сушки материалов известен давно [3], однако единого подхода к его описанию не существует. Поэтому построение целостной математической модели, позволяющей описать физические механизмы процесса сушки пористых материалов при комнатной температуре в акустическом поле высокой интенсивности, является актуальной задачей.

Физико-математическая постановка задачи о сушке бруса в приближении механики гетерогенных сред. *Основные уравнения и постановка задачи о сушке древесины с учетом скоростной неравновесности и различия давлений фаз.* Рассмотрим задачу об осушении пористого тела путем возбуждения в нем акустических колебаний. Для этого исследуем движение жидкости в деревянном брусе длиной l с площадью прямоугольного поперечного сечения S. Допустим, что левый конец бруса жестко закреплен ($u_2 = u_1 = 0$), а правый является свободным и на его торце задается малое разрежение порядка 0,1 атм. Это позволяет свести задачу о миграции жидкости в пористой структуре образца к задаче линейной акустики механики гетерогенных сред. При этом рассматривается основное течение с параметрами $P_i = P_0 = 1$ атм, $u_2 = u_1 = 0$ ($i = 1$ соответствует жидкости, $i = 2$ — твердому скелету).

Для математического описания поставленной задачи используются уравнения механики гетерогенных сред, учитывающие различие скоростей и давлений компонентов смеси. В одномерном изотермическом приближении задача описывается системой дифференциальных уравнений, которые выражают законы сохранения массы и количества движения для каждого компонента смеси, дополненной уравнением m_2-переноса:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1u_1}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2u_2}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\rho_1u_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1u_1^2}{\partial x}=-m_1\frac{\partial P_1}{\partial x}+F_{\rm S},\\ \frac{\partial\rho_2u_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2u_2^2}{\partial x}=-m_2\frac{\partial P_2}{\partial x}-(P_2-P_1)\frac{\partial m_2}{\partial x}-F_{\rm S},\qquad \frac{\partial m_2}{\partial t}+u_2\frac{\partial m_2}{\partial x}=R.\end{gathered}\tag{1}$$

Система уравнений (1) является гиперболической. Для замыкания дополним ее уравнениями состояния для каждого компонента и геометрическим тождеством:

$$P_i = a_i^2(\rho_{ii} - \rho_{ii,0}), \qquad m_1 = 1 - m_2. \tag{2}$$

В (1), (2) $\rho_i = m_i\rho_{ii}$ — средняя плотность i-го компонента смеси; u_i — скорость i-го компонента смеси; P_i — давление i-го компонента смеси; m_i — объемная концентрация i-го компонента смеси; $F_{\rm S} = m_1\rho_2(u_2 - u_1)/\tau_{\rm S}$ — сила Стокса; $\tau_{\rm S} = 2\rho_{22}r^2/(9\mu_1)$ — время стоксовой релаксации скоростей; $R = m_1m_2(P_2 - P_1)/\mu_2$ — функция, описывающая процесс переноса твердой фазы; μ_i — динамическая вязкость i-го компонента смеси; ρ_{ii} — истинная плотность i-го компонента смеси; a_i — скорость звука материала i-го компонента смеси; $\rho_{ii,0}$ — истинная плотность материала i-го компонента смеси; x — пространственная переменная; r — радиус пор; t — время.

Переход к безразмерным переменным. Для проведения параметрического анализа и увеличения области применимости получаемых результатов осуществляется переход к безразмерным переменным $\bar\rho_i$, $\bar u_i$, $\bar P_i$, $\bar x$, $\bar t$. Обезразмеривание проводилось относительно физических параметров в начальном (невозмущенном) состоянии:

$$\bar\rho_i = \frac{\rho_i}{\rho_{11,0}}, \qquad \bar u_i = \frac{u_i}{a_1}, \qquad \bar P_i = \frac{P_i}{\rho_{11,0}a_1^2}, \qquad \bar x = \frac{x}{l}, \qquad \bar t = \frac{a_1 t}{l}.$$

Здесь l — характерный линейный размер. Безразмерная скорость звука в первом компоненте и его истинная плотность равны единице, для второго компонента $a = a_2/a_1$, $\bar\rho = \rho_{22,0}/\rho_{11,0}$ соответственно.

При обезразмеривании правая часть уравнения m_2-переноса R имеет размерность $1/t$, поэтому можно ввести новую переменную τ_{m_2}, которая является функцией μ_2 и описывает время релаксации давлений компонентов смеси. Согласно оценке в [4] $\mu_2 \approx \rho_{22,0}a_2d$, поэтому в размерном виде $\tau_{m_2} = 2a_2\rho_{22,0}r/(\rho_{11,0}a_1^2)$, в безразмерном $\bar{\tau}_{m_2} = 2a\bar{\rho}\,\bar{r}$.

Система уравнений (1) после обезразмеривания имеет тот же вид. Выражения для характерных времен релаксации процессов выравнивания скоростей и давлений компонентов смеси имеют вид $\bar{\tau}_{\mathrm{S}} = 2\bar{\rho}\bar{r}^2/(9\bar{\mu}_1)$, $\bar{\tau}_{m_2} = 2\bar{\mu}_2$, а безразмерные уравнения состояния —

$$\bar{P}_1 = \bar{\rho}_1/\bar{m}_1 - 1, \qquad \bar{P}_2 = a^2(\bar{\rho}_2/\bar{m}_2 - \bar{\rho}). \tag{3}$$

В дальнейшем черта над безразмерными переменными не ставится.

Линеаризация исходной системы уравнений. В линейном приближении амплитуда колебаний настолько мала, что можно пренебречь всеми изменениями, обусловленными переносом массы и импульса. Математически это выражается в пренебрежении членами уравнения (1), содержащими вторые степени, и произведениями малых величин, определяющих отклонение параметров смеси от равновесного состояния.

Представим переменные ρ_i, u_i, P_i, m_i в виде

$$\rho_i = \rho_{i0} + \rho_i', \qquad u_i = u_{i0} + u_i', \qquad P_i = P_{i0} + P_i', \qquad m_i = m_{i0} + m_i', \tag{4}$$

где ρ_{i0}, u_{i0}, P_{i0}, m_{i0} — постоянные равновесные значения плотностей, скоростей, давлений и объемных концентраций компонентов смеси; ρ_i', u_i', P_i', m_i' — отклонения плотностей, скоростей, давлений и объемных концентраций компонентов смеси от равновесных значений. Полагается, что u_{i0} и P_{i0} в равновесном состоянии равны нулю.

Подставляя (4) в обезразмеренный аналог системы уравнений (1) и уравнения состояния (3) и пренебрегая малыми величинами, получаем линеаризованные уравнения механики гетерогенных сред для акустических колебаний

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho_1'}{\partial t} + \rho_{10}\,\frac{\partial u_1'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \rho_{20}\,\frac{\partial u_2'}{\partial x} = 0,\\ \rho_{10}\,\frac{\partial u_1'}{\partial t} + m_{10}\,\frac{\partial P_1'}{\partial x} = F_{\mathrm{S}}', \qquad \rho_{20}\,\frac{\partial u_2'}{\partial t} + m_{20}\,\frac{\partial P_2'}{\partial x} = -F_{\mathrm{S}}', \qquad \frac{\partial m_2'}{\partial t} = R',\end{gathered} \tag{5}$$

где $F_{\mathrm{S}}' = m_{10}\rho_{20}(u_2' - u_1')/\tau_{\mathrm{S}}$; $R' = m_{10}m_{20}(P_2' - P_1')/\tau_{m_2}$. Уравнения состояния (3) и геометрическое тождество принимают следующий вид:

$$P_1' = (\rho_1' - m_1')/m_{10}, \qquad P_2' = a^2(\rho_2' - m_2'\rho)/m_{20}, \qquad m_1' = -m_2'. \tag{6}$$

Ниже штрихи у линеаризованных переменных опускаются, а использование нелинеаризованных переменных оговаривается особо.

Введение малого параметра. Все безразмерные величины, входящие в систему уравнений (5), являются малыми, поэтому для удобства анализа рассматриваются параметры $P_i = \varepsilon P_i^0$, $u_i = \varepsilon u_i^0$, $\rho_i = \varepsilon \rho_i^0$, $m_i = \varepsilon m_i^0$ (ε — малая величина). Тогда P_i^0, u_i^0, ρ_i^0, m_i^0 являются конечными величинами. При сокращении на ε получаем уравнение, имеющее структуру типа (5).

Гетерогенная модель процесса сушки. Под гетерогенной моделью в данной работе понимается математическая модель, которая используется для изучения процесса сушки пористого материала, состоящего из древесины и наполнителя, заполняющего пустоты в твердом материале, — воды. Для изучаемой смеси древесина — вода справедливы основные допущения механики гетерогенных сред, поэтому исследования могут проводиться в рамках модели взаимопроникающих континуумов. Согласно этой модели каждая точка пространства характеризуется полным набором физических параметров (плотность, скорость, давление и т. д.) для каждой фазы. Для каждой фазы выписываются законы

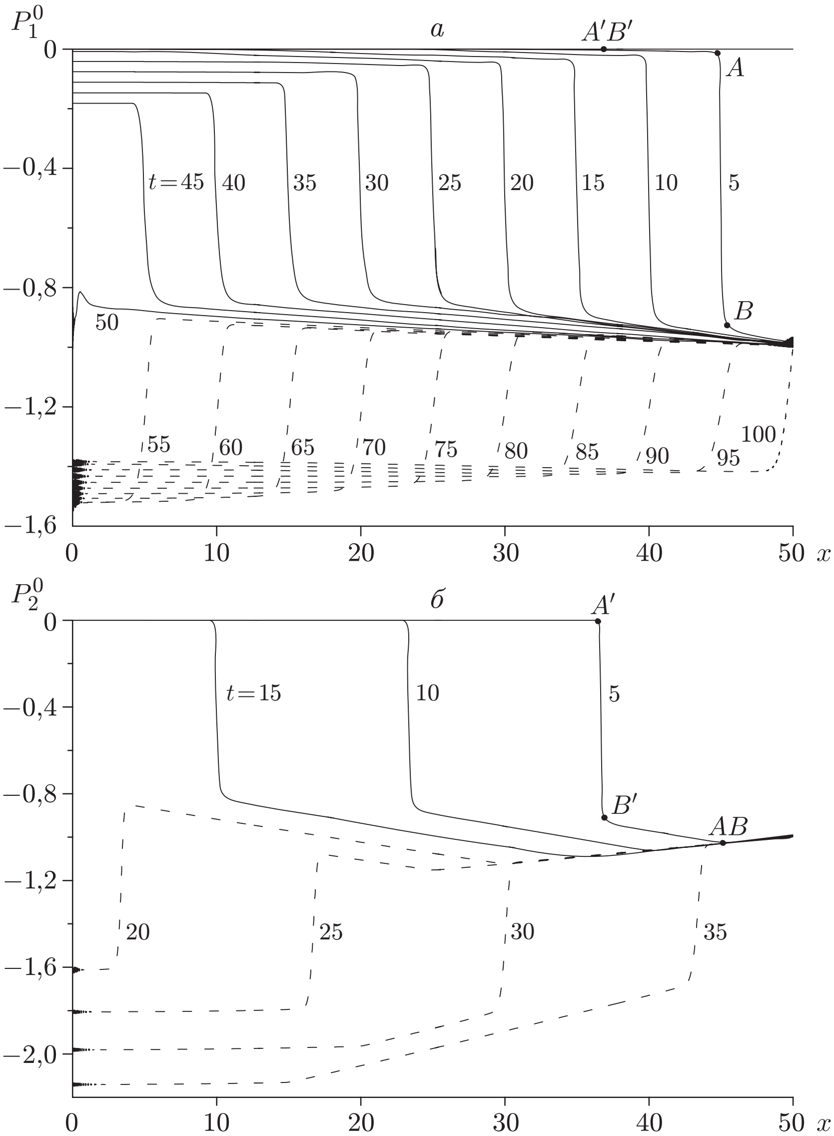

Рис. 1. Распространение волны разгрузки в воде (a) и древесине ($б$):
сплошные линии — волны, распространяющиеся от свободной границы до жесткой стенки; штриховые — волны, движущиеся в противоположном направлении

сохранения (1) или (5), представленные дифференциальными уравнениями в частных производных.

Для численного решения системы уравнений (5) с замыкающими уравнениями (6) и соответствующими физической задаче начально-краевыми условиями использован модифицированный метод “крупных частиц” первого порядка аппроксимации [5].

После того как на свободном конце бруса создается разрежение в обеих фазах $P_1^0(t) = P_2^0(t) = -1$, внутрь распространяется волна разгрузки. На рис. 1 приведено распределение давления в воде и брусе. Видно, что при $t = 5$ давление в древесине снижается от начального, равного нулю, до значения $P_2^0 \approx -0{,}9$, причем наиболее резко — в волне разгрузки (отрезок $A'B'$ на рис. 1,$б$). В зоне релаксации за волной разгрузки достигается заданное на правом торце образца значение давления $P_2^0 = -1$. Изменение давления в жидкости P_1^0 также происходит в волне разгрузки, которая отстает от волны разгруз-

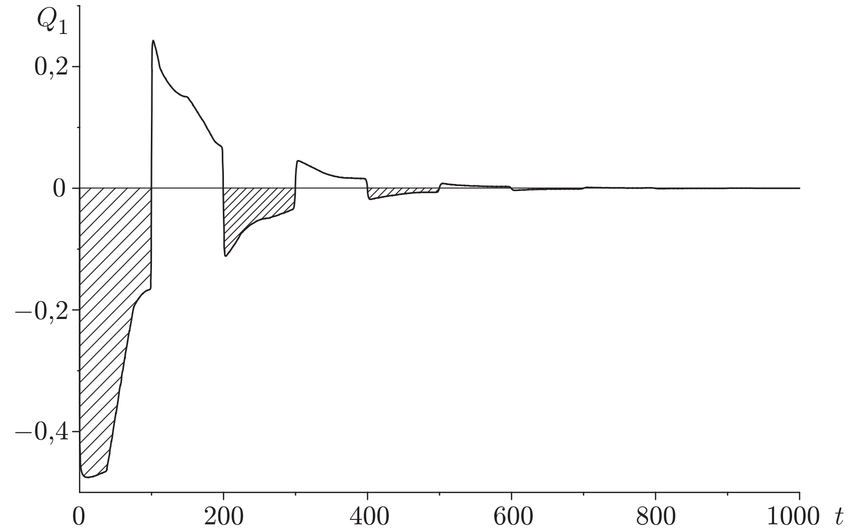

Рис. 2. Зависимость расхода жидкости через свободный конец бруса от времени (заштрихованная область — объем жидкости, вытекающей из осушаемого образца)

ки в древесине. Непосредственно за фронтом волны разгрузки, движущимся по жесткому скелету (точка $A'B'$ на рис. 1,*а*), формируется волна разгрузки в жидкости. Таким образом, появляется предвестник, передний фронт которого распространяется со скоростью звука в твердом скелете, а задний — со скоростью звука в жидкости. Далее следует волна разгрузки (отрезок AB на рис. 1,*а*) с плавным переходом к задаваемому равновесному значению на правом торце бруса. Скорости распространения волн разгрузки AB и $A'B'$ соответствуют скоростям распространения возмущений в соответствующей среде. Со временем ($t \geqslant 10$) ширина зоны предвестника увеличивается, так как $a_2 > a_1$. Аналогично изменяются параметры u_i^0, при этом амплитуда скорости во второй фазе со временем уменьшается. Скорость в жидкости представляет собой функцию, плавно изменяющуюся за счет силы трения между фазами в области между лидирующим скачком в твердом скелете (точка $A'B'$) и замыкающим скачком в жидкости (точка AB).

На рис. 2 показана зависимость расхода жидкости Q_1 через свободный торец бруса от времени. Видно, что в течение 40 мс ($t = 600$) во всем брусе длиной 5 м устанавливается практически постоянное значение скоростей компонентов, равное нулю, при этом $P_1^0 = P_2^0 = -1$. Профили плотностей компонентов смеси соответствуют профилям давления для соответствующих фаз.

Выполнена серия расчетов давления в брусе при различных диаметрах пор. На рис. 3 точки соответствуют моментам времени релаксации давления для пор диаметром 50, 200 и 400 мкм. Видно, что с уменьшением диаметра пор происходит значительное увеличение времени релаксации скоростей и давлений компонентов смеси.

Фильтрационная модель процесса сушки. *Область применимости теории фильтрации.* Выполним оценку значения силы Стокса на основе теории фильтрации. Выпишем закон фильтрации Дарси [6] в размерном виде

$$\boldsymbol{u} = -(k/\mu_1)\,\mathrm{grad}\,P,$$

где μ_1 — динамическая вязкость фильтрующейся жидкости; k — проницаемость, зависящая от геометрических параметров пористой среды, имеющая размерность площади. Проницаемость большинства пород мала. Например, для крупнозернистых песчаников $k = 10^{-12} \div 10^{-13}$ м^2, для плотных песчаников $k = 10^{-14}$ м^2. Для оценки коэффициента проницаемости древесины используем уравнение Козени — Кармана, полученное с

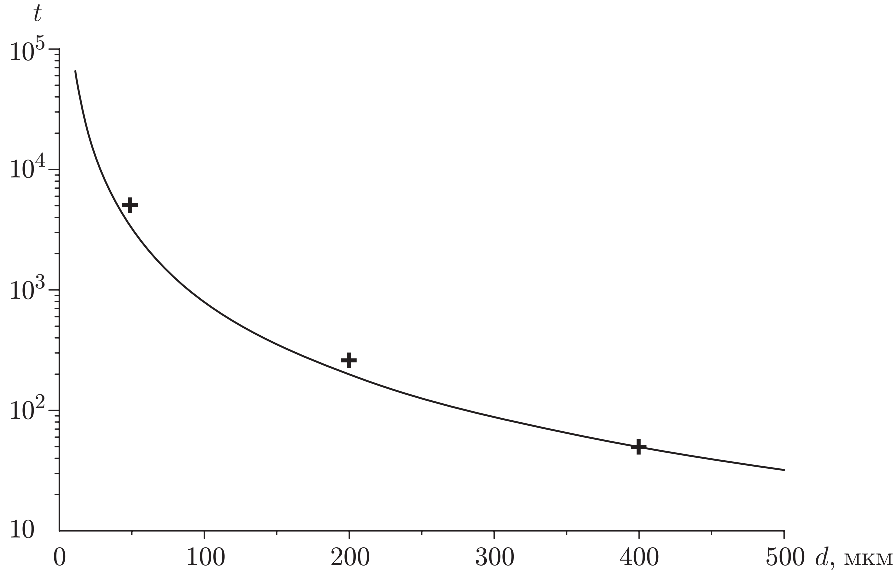

Рис. 3. Зависимость времени релаксации давления в брусе от диаметра пор:
сплошная линия — расчет по фильтрационной модели, точки — расчет по гетерогенной модели

Таблица 1

d, мкм	k, Д		
	$m_1 = 0{,}3$	$m_1 = 0{,}5$	$m_1 = 0{,}7$
10	0,019 39	0,108 93	0,439 57
20	0,077 57	0,435 73	1,758 30
30	0,174 53	0,980 39	3,956 17
40	0,310 28	1,742 92	7,033 19
50	0,484 81	2,723 31	10,989 36
100	1,939 24	10,893 25	43,957 45
150	4,363 28	24,509 80	98,904 27
200	7,756 95	43,572 98	157,829 81

использованием аналогии между пористой средой и системой параллельных трубок, которое связывает проницаемость пористого материала с пористостью и удельной площадью поверхности. Согласно [7]

$$k = d^2 m_1^3/(150(1 - m_1^2)).$$

В табл. 1 приведены значения коэффициента проницаемости при различных значениях объемной концентрации воды и диаметра пор (1 Д $= 1{,}02 \cdot 10^{-12}$ м^2). Отметим, что увеличение как диаметра пор, так и объемной концентрации воды в образце приводит к увеличению проницаемости пористого материала. Из табл. 1 следует, что проницаемость древесины существенно зависит от параметров m_1 и d. Например, при изменении диаметра пор в сечении бруса от 20 до 40 мкм коэффициент проницаемости в сечении может увеличиться в четыре раза.

В одномерном приближении закон Дарси имеет вид

$$u = -\frac{k}{\mu_1}\,\frac{\partial P_1}{\partial x}.$$

В качестве скорости u в задаче фильтрации используется массовая скорость фильтрующегося материала, т. е. $u = m_1 u_1$. Тогда

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{\mu_1 m_1 u_1}{k}. \qquad (7)$$

В то же время из закона сохранения количества движения для легкого компонента (1) с учетом того, что течение является фильтрационным, получается выражение

$$F_{\rm S} = m_1 \frac{\partial P_1}{\partial x}. \qquad (8)$$

Подставляя в (8) выражение для $\partial P_1/\partial x$ из (7), находим связь между проницаемостью и силой Стокса

$$k = -\mu_1 m_1^2 u_1 / F_{\rm S}. \qquad (9)$$

С учетом того, что течение является фильтрационным ($u_2 = 0$), выражение для силы Стокса принимает вид

$$F_{\rm S} = -18\mu_1 m_1 m_2 u_1/d^2.$$

Подставляя полученное выражение в (9), находим вид зависимости проницаемости от диаметра частиц и объемной концентрации компонентов смеси

$$k = m_1 d^2/(18 m_2).$$

По определенной ранее проницаемости древесины $k = 2 \cdot 10^{-10} \div 10^{-13}$ м^2 определим диаметр частиц

$$d = \sqrt{18 m_2 k/m_1}.$$

Так, при $k = 2 \cdot 10^{-10}$ м^2 $d = 40 \div 100$ мкм, при $k = 10^{-13}$ м^2 $d = 5 \div 25$ мкм. Таким образом, приближение $C_d = 24/\mathrm{Re}$ (Re — число Рейнольдса) справедливо при диаметре пор, равном $5 \div 100$ мкм.

В общем случае в выражение для силы Стокса также входят число Рейнольдса и коэффициент сопротивления C_d:

$$F_{\rm S} = \frac{m_1 \rho_2}{\tau_{\rm S}} C_d \frac{\mathrm{Re}}{24} (u_2 - u_1).$$

Подставляя в это соотношение $\mathrm{Re} = \rho_1 |u_1 - u_2| d/(m_1 \mu_1)$, получаем выражение для проницаемости в виде

$$k = \frac{4}{3} \frac{m_1^2 \mu_1 d}{\rho_1 m_2 u_1 C_d}.$$

Аналитическое решение задачи о сушке образца. Пусть $u_2^0 = 0$, $P_2^0 = \mathrm{const}$, $\partial u_1^0/\partial t \ll 1$. Тогда $\rho_2^0 = \mathrm{const}$, $F_{\rm S} = -m_{10}\rho_{20} u_1^0/\tau_{\rm S}$ и исходная система уравнений (5) принимает вид

$$\frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial u_1^0}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial P_1^0}{\partial x} = -\frac{\rho_{20} u_1^0}{\tau_{\rm S}}. \qquad (10)$$

Из второго уравнения системы (10) находим

$$u_1^0 = -\frac{\tau_{\rm S}}{\rho_{20}} \frac{\partial P_1^0}{\partial x}.$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение системы (10), получаем уравнение

$$\frac{\partial P_1^0}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 P_1^0}{\partial x^2}, \tag{11}$$

где $k = \rho_{10}\tau_\mathrm{S}/(m_{10}\rho_{20})$, со следующими начальными и граничными условиями:

$$t = 0: \qquad P_1^0(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < l, \\ -1, & x = l; \end{cases} \tag{12}$$

$$x = l:\quad P_1^0(l,t) = -1, \qquad x = -l:\quad P_1^0(-l,t) = -1, \qquad x = 0:\quad \frac{\partial P_1^0(0,t)}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением теплопроводности. Для его решения используем метод разделения переменных (метод Фурье) [8]. Решение задачи (11), удовлетворяющее краевым (13) и начальным (12) условиям, записывается в виде ряда

$$P_1^0(x,t) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} \cos\Big(\frac{\pi x}{2l}\,(2n-1)\Big) \exp\Big(-k\,\frac{\pi^2 t}{4l^2}\,(2n-1)^2\Big).$$

На рис. 4,*а* показано поведение фильтрационной волны разгрузки, распространяющейся в брусе с различным диаметром пор. Видно, что с увеличением диаметра пор скорость распространения волн разгрузки в брусе увеличивается. На рис. 4,*б* показано распределение давления жидкости в брусе при различных значениях начальной объемной концентрации воды. Следует отметить, что с увеличением объемной концентрации воды в материале скорость распространения волны разгрузки в брусе возрастает. Таким образом, в процессе акустической сушки пористого материала наряду с уменьшением влаги в брусе происходит уменьшение скорости распространения акустических волн в древесине, вызванное увеличением коэффициента затухания акустических возмущений в сухой среде.

На рис. 3 сплошной линией показана зависимость времени релаксации давления в брусе от диаметра пор. Видно, что результаты, полученные по фильтрационной модели, хорошо согласуются с результатами расчетов по гетерогенной модели.

Дисперсионные соотношения. Подставляя в исходную систему уравнений (5) выражения для P_1^0 и P_2^0 из уравнений состояния (6), получаем систему дифференциальных уравнений для искомых функций ρ_1^0, ρ_2^0, u_1^0, u_2^0, m_2^0:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + \rho_{10}\frac{\partial u_1^0}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2^0}{\partial t} + \rho_{20}\frac{\partial u_2^0}{\partial x} = 0, \\
\rho_{10}\,\frac{\partial u_1^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} + \frac{\partial m_2^0}{\partial x} - \frac{m_{10}\rho_{20}(u_2^0 - u_1^0)}{\tau_\mathrm{S}} = 0, \\
\rho_{20}\,\frac{\partial u_2^0}{\partial t} + a^2\,\frac{\partial \rho_2^0}{\partial x} - a^2\,\bar\rho\frac{\partial m_2^0}{\partial x} + \frac{m_{10}\rho_{20}(u_2^0 - u_1^0)}{\tau_\mathrm{S}} = 0, \\
\frac{\partial m_2^0}{\partial t} - \frac{a^2 m_{10}\rho_2^0}{\tau_{m_2}} + \frac{m_{20}\rho_1^0}{\tau_{m_2}} + \frac{(m_{20} + a^2\bar\rho m_{10})m_2^0}{\tau_{m_2}} = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Решение системы (14) ищется в виде уравнения плоской синусоидальной волны, записанного в экспоненциальной форме: $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0\,\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)}$ (k — волновое число; $\omega = 2\pi/T$ — циклическая (круговая) частота волны; T — период колебаний; $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(\rho_1^0, \rho_2^0, u_1^0, u_2^0, m_2^0)$ — вектор решения). При подстановке этого решения в (14) и сокращении на $\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)}$ получается система пяти линейных уравнений для определения пяти неизвестных ρ_{01}^0, ρ_{02}^0, u_{01}^0,

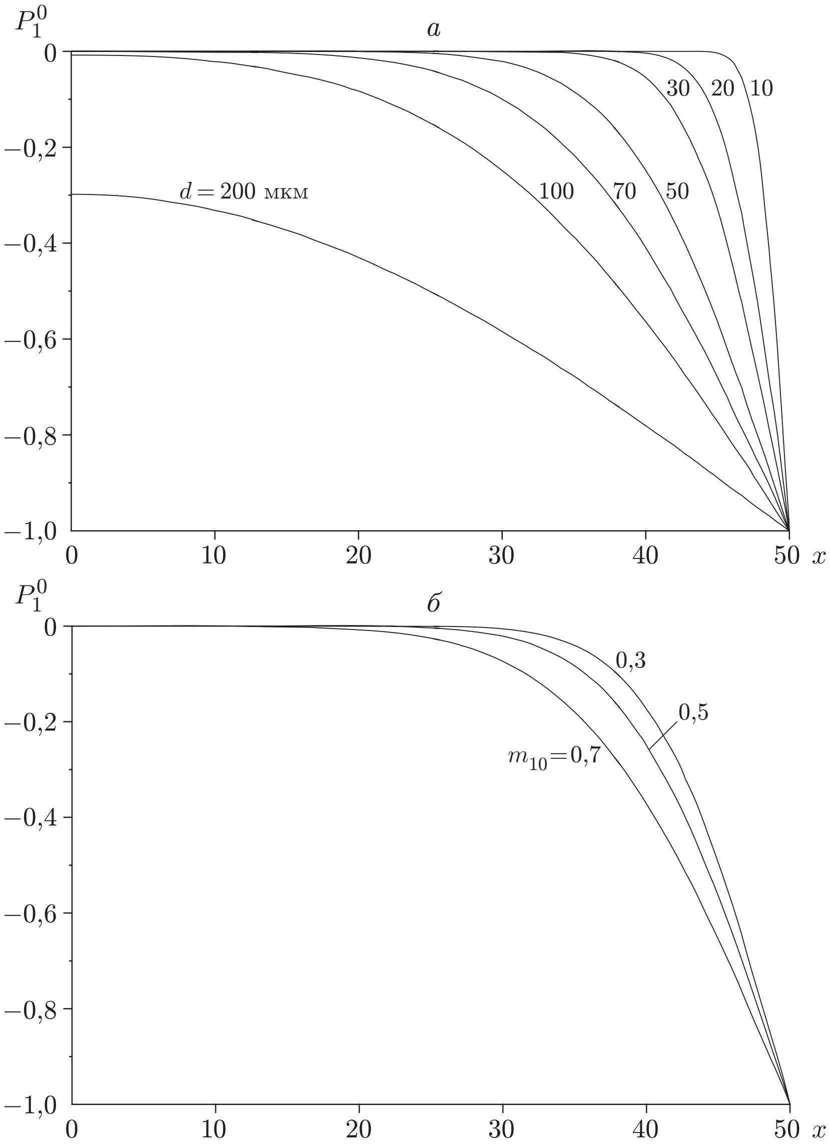

Рис. 4. Зависимость давления в среде от диаметра пор (a) и объемной концентрации воды ($б$) в брусе при $t = 10$:
a — $m_{10} = 0{,}5$; $б$ — $d = 50$ мкм

u^0_{02}, m^0_{02}. Для нее записывается определитель A, состоящий из коэффициентов при соответствующих неизвестных:

$$A = \begin{vmatrix} i\omega & 0 & -\rho_{10} ik & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & 0 & -\rho_{20} ik & 0 \\ -ik & 0 & \rho_{10} i\omega + \dfrac{m_{10}\rho_{20}}{\tau_{\rm S}} & -\dfrac{m_{10}\rho_{20}}{\tau_{\rm S}} & -ik \\ 0 & -a^2 ik & -\dfrac{m_{10}\rho_{20}}{\tau_{\rm S}} & \rho_{20} i\omega + \dfrac{m_{10}\rho_{20}}{\tau_{\rm S}} & a^2 \bar\rho ik \\ \dfrac{m_{20}}{\tau_{m_2}} & -\dfrac{a^2 m_{10}}{\tau_{m_2}} & 0 & 0 & i\omega + \dfrac{m_{20} + a^2\bar\rho m_{10}}{\tau_{m_2}} \end{vmatrix}.$$

Для получения дисперсионных соотношений определитель A приравнивается к нулю. Подставив выражения для $\rho_{10} = m_{10}$, $\rho_{20} = \bar{\rho} m_{20}$, после упрощения находим зависимость между ω и k:

$$a^2 ik^4\omega - ik^2\omega^3 - a^2 ik^2\omega^3 + i\omega^5 - (k^2 m_{10}\omega^2 + a^2k^2\bar{\rho}m_{20}\omega^2 - m_{10}\omega^4 - \bar{\rho}m_{20}\omega^4)/\tau_{\mathrm{S}} -$$
$$- (a^2k^2\omega^2 m_{20} + a^2k^2\omega^2 m_{10}\bar{\rho} - \omega^4 m_{20} - a^2\omega^4 m_{10}\bar{\rho})/\tau_{m_2} + (a^2ik^2m_{10}^2\bar{\rho}\omega + 2a^2ik^2m_{10}m_{20}\bar{\rho}\omega +$$
$$+ a^2ik^2m_{20}^2\bar{\rho}\omega - i\omega^3 m_{10}m_{20} - a^2im_{10}^2\bar{\rho}\omega^3 - im_{20}^2\bar{\rho}\omega^3 - a^2im_{10}m_{20}\bar{\rho}^2\omega^3)/(\tau_{\mathrm{S}}\tau_{m_2}) = 0. \quad (15)$$

Группируя слагаемые уравнения (15), содержащие ω, получаем выражение

$$i\omega^4 + \omega^3 A_1 - i\omega^2[k^2(1+a^2) + A_2] - \omega k^2 A_3 + ia^2k^2(k^2 + A_4) = 0, \quad (16)$$

где $A_1 = (m_{10} + \bar{\rho}m_{20})/\tau_{\mathrm{S}} + (m_{20} + a^2\bar{\rho}m_{10})/\tau_{m_2}$; $A_2 = (m_{10} + \bar{\rho}m_{20})(m_{20} + a^2\bar{\rho}m_{10})/(\tau_{\mathrm{S}}\tau_{m_2})$; $A_3 = (m_{10} + a^2\bar{\rho}m_{20})/\tau_{\mathrm{S}} + a^2(m_{20} + \bar{\rho}m_{10})/\tau_{m_2}$; $A_4 = \bar{\rho}/(\tau_{\mathrm{S}}\tau_{m_2})$.

Циклическую частоту волны можно представить в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$\omega = \omega_r + i\gamma.$$

Здесь ω_r — действительная часть; γ — инкремент малых возмущений, знак которого определяет устойчивость течения (если $\gamma > 0$, то течение устойчиво). При подстановке ω в (16) получается уравнение, которое можно записать в виде системы двух уравнений для действительной и мнимой частей:

$$\omega_r\{\omega_r^2(A_1 - 4\gamma) + 4\gamma^3 - 3A_1\gamma^2 + 2\gamma[k^2(1+a^2) + A_2] - k^2A_3\} = 0,$$
$$\omega_r^4 - \omega_r^2[6\gamma^2 - 3A_1\gamma + k^2(1+a^2) + A_2] + \quad (17)$$
$$+ \gamma^4 - A_1\gamma^3 + [k^2(1+a^2) + A_2]\gamma^2 - k^2A_3\gamma + a^2k^2(k^2 + A_4) = 0.$$

Из первого уравнения системы (17) для реальной части можно определить два решения: тривиальное $\omega_r = 0$ и в виде функции инкремента малых возмущений $\omega_r^2 = \{4\gamma^3 - 3A_1\gamma^2 + 2\gamma[k^2(1+a^2) + A_2] - k^2A_3\}/(4\gamma - A_1)$. При подстановке первого решения в уравнение для мнимой части получается полином четвертой степени для определения γ при изменении k и начальной объемной концентрации воды:

$$\gamma^4 - A_1\gamma^3 + [k^2(1+a^2) + A_2]\gamma^2 - k^2A_3\gamma + a^2k^2(k^2 + A_4) = 0. \quad (18)$$

На рис. 5,*а* показана зависимость корней уравнения (18) от начальных параметров. Видно, что при $k = 0$ имеется два кратных корня $\gamma = 0$, $\gamma^+ = (m_{10} + \bar{\rho}m_{20})/\tau_{\mathrm{S}}$ и $\gamma^- = (m_{20} + a^2\bar{\rho}m_{10})/\tau_{m_2}$, при этом $\gamma^- > \gamma^+$. С ростом (уменьшением) k значения γ^- уменьшаются до $\tilde{\gamma}$, а значения γ^+ увеличиваются до $\tilde{\gamma}$. На рис. 5 видно, что при $k = |k_{\max}|$ ветви решения γ^+ и γ^- пересекаются ($\gamma^+ = \gamma^- = \tilde{\gamma}$), при дальнейшем увеличении $|k|$ корни переходят в мнимую плоскость. Отметим, что с ростом m_{10} абсолютное значение $k_{\max}$ и значение $\tilde{\gamma}$ увеличиваются.

Исследуем возможность существования перехода решений из положительной полуплоскости в отрицательную. Для этого найдем действительные корни уравнения (18) при $\gamma = 0$. Получаемое биквадратное уравнение относительно k имеет одно кратное действительное решение $k = 0$ и два мнимых $k_\pm = \pm i\sqrt{\bar{\rho}/(\tau_{\mathrm{S}}\tau_{m_2})}$, так как $\bar{\rho}$, τ_{S}, τ_{m_2} всегда положительны. Таким образом, все решения уравнения (18) находятся в верхней полуплоскости, где $\gamma > 0$, и только в точке $k = 0$ обращаются в нуль.

Если второе решение $\omega_r = \omega_r(\gamma, k, m_{10})$ подставить в уравнение для мнимой части, то при $\gamma \neq A_1/4$ выражение для определения инкремента малых возмущений можно представить в виде полинома шестой степени. Из-за громоздкости это уравнение в настоящей

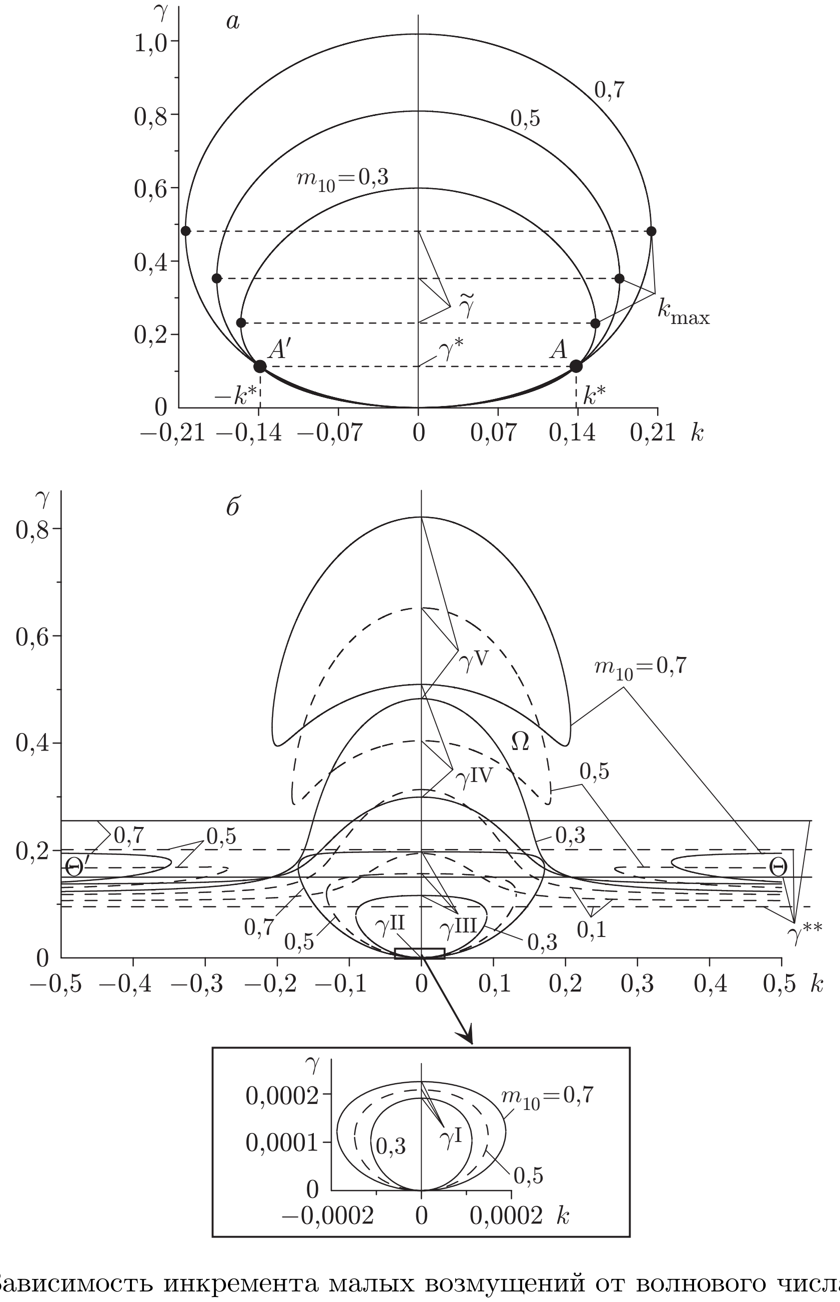

Рис. 5. Зависимость инкремента малых возмущений от волнового числа:
а — первое решение системы уравнений (17), *б* — второе решение

работе не приводится. Корни этого уравнения определялись численно и приведены на рис. 5,*б*. Можно выделить три типа корней. Корни первого типа представлены на рис. 5,*б* в увеличенном масштабе. Они имеют вид эллипса. С увеличением объемной концентрации влаги размер эллипса увеличивается, а γ изменяется от нуля до γ^{I} (значения γ^i для различных m_{10} приведены в табл. 2). Решения второго типа имеют эллипсообразную форму (рис. 5,*б*). В данном случае $\gamma \in [\gamma^{\mathrm{II}}, \gamma^{\mathrm{III}}]$. При увеличении m_{10} значения корней также увеличиваются. Корни третьего типа существенно зависят от начальной объемной концентрации влаги в брусе (рис. 5,*б*). При $m_{10} = 0{,}7$ решения имеют вид замкнутой кривой Ω, имеющей подковообразный вид и находящейся в окрестности $k = 0$, и двух полубесконечных кривых Θ и Θ', расположенных симметрично относительно оси γ. Кривая Ω распо-

Таблица 2

m_{10}	γ^{**}	$\gamma^{\mathrm{I}} \cdot 10^{-3}$	$\gamma^{\mathrm{II}} \cdot 10^{-3}$	γ^{III}	γ^{IV}	γ^{V}
0,1	0,097	0,174	0,456	0,076	0,195	0,314
0,2	0,124	0,183	0,479	0,096	0,247	0,398
0,3	0,150	0,191	0,501	0,116	0,300	0,483
0,4	0,176	0,200	0,524	0,137	0,352	0,567
0,5	0,202	0,208	0,546	0,157	0,404	0,652
0,6	0,229	0,217	0,568	0,177	0,457	0,737
0,7	0,255	0,226	0,591	0,198	0,509	0,821
0,8	0,281	0,234	0,613	0,218	0,562	0,906
0,9	0,307	0,243	0,635	0,238	0,614	0,990

лагается выше горизонтальной линии $\gamma = \gamma^{**}$ (значения γ^{**} определяются из выражения для ω_r^2, когда знаменатель обращается в нуль, и приведены в табл. 2), а кривая Θ — ниже линии $\gamma = \gamma^{**}$. С уменьшением m_{10} кривая Ω смещается в область меньших значений γ и постепенно приближается к линии $\gamma = \gamma^{**}$ (которая с уменьшением m_{10} также смещается в область меньших значений γ). В то же время кривые Θ перемещаются в том же направлении, что и Ω, но медленнее, чем линия $\gamma = \gamma^{**}$ (см. решения при $m_{10} = 0{,}5$; $0{,}3$). Таким образом, с уменьшением m_{10} до $m_{10}^* = (\tau_{\mathrm{S}} + \tau_{m_2}\bar{\rho})/[\tau_{\mathrm{S}}(1 + a^2\bar{\rho}) + \tau_{m_2}(1 + \bar{\rho})] = 0{,}175\,85$ кривые решений Ω и Θ сближаются. При $m_{10} < m_{10}^*$ кривые объединяются и трансформируются в две непересекающиеся кривые, которые принадлежат всему диапазону значений $k \in (-\infty, +\infty)$ с небольшими изменениями по γ до значений γ^{IV} и γ^{V} соответственно в окрестности $k = 0$ (см. решение при $m_{10} = 0{,}1$). Отметим, что в этом случае обе кривые решений расположены выше линии $\gamma = \gamma^{**}$.

Исследуем возможность пересечения оси k с решением рассматриваемого уравнения в интервале $(-\infty, +\infty)$. Для этого в нем полагается $\gamma = 0$, что позволяет получить выражение для $\omega_r^2 = -k^2 A$ и биквадратное уравнение для k в виде

$$k^4(A^2 + A(1 + a^2) + a^2) + k^2\Big(A\frac{(m_{10} + \bar{\rho}m_{20})(m_{20} + a^2\bar{\rho}m_{10})}{\tau_{\mathrm{S}}\tau_{m_2}} + \frac{a^2\bar{\rho}}{\tau_{\mathrm{S}}\tau_{m_2}}\Big) = 0, \tag{19}$$

где

$$A = \Big(\frac{m_{10} + a^2\bar{\rho}m_{20}}{\tau_{\mathrm{S}}} + a^2\,\frac{m_{20} + \bar{\rho}m_{10}}{\tau_{m_2}}\Big)\Big/\Big(\frac{m_{10} + \bar{\rho}m_{20}}{\tau_{\mathrm{S}}} + \frac{m_{20} + a^2\bar{\rho}m_{10}}{\tau_{m_2}}\Big) > 0.$$

Уравнение (19) имеет два кратных тривиальных решения $k = 0$ и два мнимых

$$k = \pm i\sqrt{\frac{A(m_{10} + \bar{\rho}m_{20})(m_{20} + a^2\bar{\rho}m_{10}) + a^2\bar{\rho}}{\tau_{\mathrm{S}}\tau_{m_2}(A^2 + A(1 + a^2) + a^2)}}.$$

Следовательно, все возможные решения находятся в одной положительной полуплоскости (рис. 5,*б*), за исключением точки $k = 0$, в которой $\gamma = 0$.

Проведенный анализ дисперсионных соотношений показал, что акустические колебания, создаваемые в образце, являются устойчивыми и затухающими в диапазоне параметров (размер пор, начальная пористость образца и др.), реализующемся в экспериментах. С точки зрения эффективности процесса акустической сушки представляют интерес режимы возбуждения в образце колебаний, которые соответствуют замкнутым кривым, показанным на рис. 5, так как в этом случае пространственные возмущения затухают слабо. Отметим, что существует точка A, инвариантная для всех m_{10}, в которой абсолютное значение k^* и значение γ^* являются постоянными (рис. 5,*а*).

Разделив выражение (15) на k^5, введя фазовую скорость $c = \omega/k$, которая соответствует скорости распространения синусоидальной волны, и используя выражения $\tau_U = \omega\tau_{\text{S}}$, $\tau_P = \omega\tau_{m_2}$, получим дисперсионное соотношение в виде

$$ic(1-c^2)(a^2-c^2) - c^3[c^2(m_{10}+\bar\rho m_{20}) - (m_{10}+a^2\bar\rho m_{20})]/\tau_U - \\ - c^3[c^2(m_{20}+a^2 m_{10}\bar\rho) - a^2(m_{20}+m_{10}\bar\rho)]/\tau_P + \\ + ic^3[a^2\bar\rho - c^2(m_{20}+a^2\bar\rho m_{10})(m_{10}+m_{20}\bar\rho)]/(\tau_U\tau_P) = 0. \qquad (20)$$

Одним из решений выражения (20) является постоянное решение $c = 0$, которое соответствует тривиальному случаю отсутствия распространения синусоидальных волн в среде.

В зависимости от значений характерных времен релаксации существует несколько типов течения смеси.

1. Замороженное течение ($\tau_U \to \infty$, $\tau_P \to \infty$). В этом случае скорости и давления компонентов различны, а выражение (20) преобразуется к виду

$$(1-c^2)(a^2-c^2) = 0.$$

Полученное уравнение имеет четыре корня, соответствующих скоростям звука в чистых материалах, составляющих смесь ($c_{1,2} = \pm 1$, $c_{3,4} = \pm a$).

2. Равновесное течение ($\tau_U \to 0$, $\tau_P \to 0$). В этом случае скорости и давления фаз равны, а выражение (20) приводится к виду

$$ic^2[a^2\bar\rho - c^2(m_{20}+a^2\bar\rho m_{10})(m_{10}+m_{20}\bar\rho)]/(\tau_U\tau_P) = 0.$$

Это уравнение также имеет четыре корня: $c_{1,2} = 0$ и $c_{3,4}^2 = a^2\bar\rho/[(m_{20}+a^2\bar\rho m_{10})(m_{10}+\bar\rho m_{20})]$. Вторая пара корней соответствует равновесной скорости звука, представленной в [9, 10] в виде

$$C_e^2 = \frac{\xi_1}{m_1}\,\frac{m_1 C - \rho\xi_1}{m_1^2 C - \rho\xi_1}.$$

3. Равновесно-замороженное течение ($\tau_U \to 0$, $\tau_P \to \infty$). В этом случае скорости компонентов равны, а давления различны ($U_1 = U_2$, $P_1^0 \ne P_2^0$), выражение (20) имеет вид

$$c^2[c^2(m_{10}+\bar\rho m_{20}) - (m_{10}+a^2\bar\rho m_{20})]/\tau_U = 0.$$

Решение также имеет два корня, равных нулю, и два корня вида $c_{3,4}^2 = (m_{10} + a^2\bar\rho m_{20})/(m_{10}+\bar\rho m_{20})$. Последние два корня определяют равновесно-замороженную скорость звука C_{ef}, которая использовалась в [9, 10] в виде

$$C_{ef}^2 = \xi_1 + a^2\xi_2.$$

4. Замороженно-равновесное течение ($\tau_U \to \infty$, $\tau_P \to 0$). В этом случае скорости компонентов различны, а давления одинаковы, уравнение (20) сводится к выражению

$$c^2[c^2(m_{20}+a^2 m_{10}\bar\rho) - a^2(m_{20}+m_{10}\bar\rho)]/\tau_P = 0,$$

имеющему четыре корня: $c_{1,2} = 0$ и $c_{3,4}^2 = a^2(m_{20}+\bar\rho m_{10})/(m_{20}+a^2\bar\rho m_{10})$. Последние два корня характеризуют замороженно-равновесную скорость звука C_{fe}^2, которую можно представить в следующем виде:

$$C_{ef}^2 = C_e^2(m_{20}^2/\xi_2 + m_{10}^2/\xi_1).$$

На рис. 6 показаны зависимости характерных скоростей звука от начальной объемной концентрации воды в брусе. Видно, что равновесная, равновесно-замороженная и

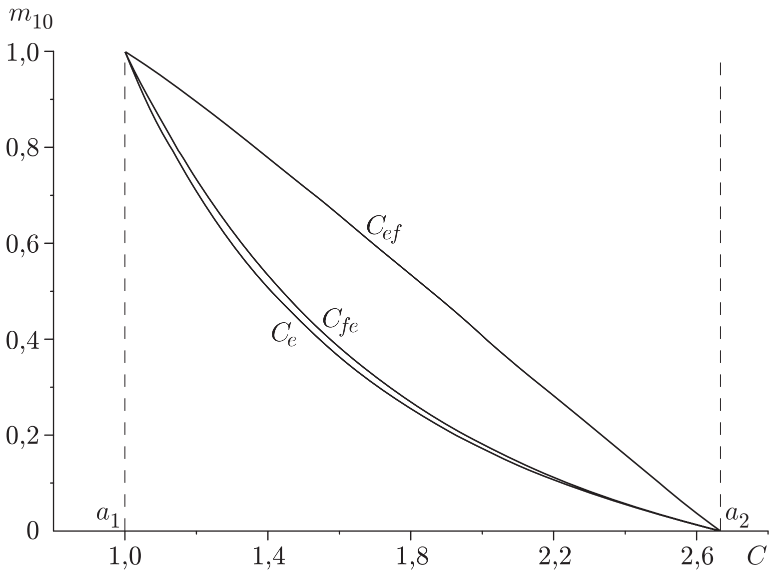

Рис. 6. Зависимости характерных скоростей звука от начальной объемной концентрации воды в брусе

Таблица 3

t, мин	Масса образца 1, кг	Масса образца 2, кг
0	2,285	3,090
5	2,265	3,075
10	2,250	3,060
15	2,235	3,050
20	2,220	3,040
25	2,205	3,025
30	2,190	3,015
35	2,180	3,005
40	2,170	3,000
45	2,160	—

Таблица 4

t, мин	Масса образца, кг			
	Образец 1	Образец 2	Образец 3	Образец 4
0	1,190	1,910	2,420	3,060
5	1,170	1,880	2,400	3,025
10	1,150	1,865	2,380	3,005
15	1,145	1,850	2,370	2,995
20	1,130	1,840	2,355	2,975
25	1,120	1,825	2,345	2,960
30	1,115	1,815	2,335	2,940

замороженно-равновесная скорости звука монотонно изменяются в интервале от скорости звука в жидкости ($a_1 = 1$) до скорости звука в древесине ($a_2 = a$).

Эксперимент. Эксперименты по экстракции влаги из древесины проводились на модельной сушильной установке Института теоретической и прикладной механики СО РАН. В качестве источника звука высокой интенсивности использовался встроенный генератор Гартмана. Принцип работы экспериментальной установки подробно изложен в [11].

Проведено две серии экспериментов. В первой серии в качестве исследуемого материала использовалась сосна. Размеры первого образца: толщина $h = 21$ мм, ширина $b = 130$ мм, длина $l = 1003$ мм, размеры второго образца: $h = 50$ мм, $b = 81$ мм, $l = 1002$ мм. Интенсивность волны составляла 178 дБ, частота — 125 Гц. Диаметр пор в образце изменялся в диапазоне $20 \div 40$ мкм. В ходе эксперимента регистрировалась масса образцов (табл. 3).

Во второй серии экспериментов исследовались четыре образца из березы одинаковой ширины $b = 70$ мм и длины $l = 950$ мм, толщина $h = 19$, 30, 40, 50 мм для образцов 1, 2, 3 и 4 соответственно. Интенсивность волны составляла 177 дБ, частота — 130 Гц. Средний диаметр пор в образце 30 мкм. Результаты экспериментов приведены в табл. 4.

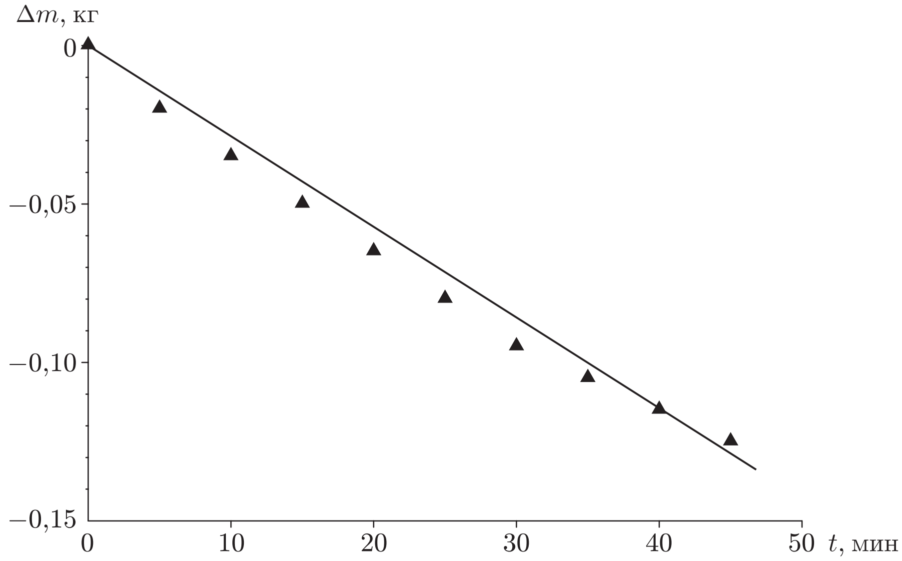

Рис. 7. Экспериментальная (точки) и расчетная (сплошная линия) зависимости потери массы образца от времени сушки для образца 1 из сосны

Сопоставление экспериментальных данных и результатов расчетов. При проведении численных расчетов в рамках математической модели (5), (6) использовалось значение максимальной амплитуды давления $P_{\max}$, которое оценивалось по известной интенсивности акустической волны L (измеряемой в децибелах) согласно [12]: $L = 20\lg(P_{\max}/(\sqrt{2}\tilde{P}_0))$, где $\tilde{P}_0 = 2\cdot 10^{-5}$ Па. В первой серии экспериментов $P_{\max} = 22\,467$ Па, во второй $P_{\max} = 20\,024$ Па.

На рис. 7 представлены результаты расчетов и физического эксперимента, характеризующие интенсивность уноса влаги из осушаемого образца. Видно, что в целом расчетные оценки удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Следует отметить, что теоретическая зависимость $\Delta m(t)$ близка к линейной, тогда как в экспериментах наблюдается постепенное затухание скорости уноса влаги при больших временах процесса сушки (более 1 ч). Это свидетельствует о необходимости уточнения модели, возможно, за счет учета слабой нелинейности и наличия защемленного воздуха в образце.

Выводы. Предложена математическая модель для описания явлений переноса и экстракции влаги при сушке материалов при комнатной температуре в акустическом поле высокой интенсивности.

На основе допущений теории фильтрации в изучаемой математической модели рассмотрено ее асимптотическое фильтрационное приближение и дано аналитическое решение задачи о движении жидкости в образце из древесины под действием акустических возмущений. Исследовано влияние диаметра пор и объемной концентрации жидкости в образце на процесс сушки.

Результаты вычислений времени установления давления в образце по фильтрационной модели хорошо согласуются с результатами расчетов, полученными при решении уравнений механики гетерогенных сред.

Показано, что в реальном диапазоне параметров гетерогенная математическая модель обладает устойчивыми во времени и пространстве решениями типа бегущих акустических волн.

Проведена серия экспериментов по экстракции влаги из древесины, позволившая получить интегральные количественные данные о кинетике сушки.

Показано, что начальная стадия процесса акустической сушки может быть адекватно описана с помощью простой линеаризованной модели механики гетерогенных сред, учитывающей неравновесность по скоростям и давлениям компонентов.

Авторы выражают благодарность Ю. А. Березину за помощь в выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кречетов И. В.** Сушка древесины. М.: Лесн. пром-сть, 1980.
2. **Глазнев В. Н., Коптюг И. В., Коробейников Ю. Г.** Физические особенности акустической сушки древесины // Инж.-физ. журн. 1999. Т. 72, № 3. С. 437–439.
3. **Борисов Ю. Я., Гынкина Н. М.** Физические основы ультразвуковой технологии // Физика и техника мощного ультразвука. М.: Наука, 1970. Кн. 3. С. 580–640.
4. **Baer M. R., Gross R. J., Nunziato J. W., Igel E. A.** An experimental and theoretical study of deflagration-to-detonation transition (DDT) in the granular explosive CP // J. Combust. Flame. 1986. V. 65. P. 15–30.
5. **Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.** Модифицированный метод “крупных частиц” для расчета нестационарных волновых процессов в многофазных дисперсных средах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17, № 6. С. 1531–1544.
6. **Баренблат Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.
7. **Неручев С. Г., Моисеева О. Б., Климова Л. И., Смирнов С. В.** Моделирование процессов миграции и аккумуляции в ловушках // Геология и геофизика. 2000. Т. 41, № 8. С. 1145–1164.
8. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
9. **Жилин А. А., Федоров А. В., Фомин В. М.** Бегущая волна в двухскоростной смеси сжимаемых сред с различными давлениями // Докл. РАН. 1996. Т. 350, № 2. С. 201–205.
10. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Структура ударной волны в двухскоростной смеси сжимаемых сред с различными давлениями // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 10–19.
11. **Глазнев В. Н., Коробейников Ю. Г., Козюра Г. Д.** Экспериментальное исследование газоструйных излучателей Гартмана: Отчет / Ин-т теорет. и прикл. механики СО РАН. № 2308. Новосибирск, 1995.
12. **Кухлинг Х.** Справочник по физике. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 31/III 2003 г.