$$F_3\left(\frac{1-k}{2}\tau\right) = -\left(\frac{1+M_2}{M_2}\right)^2 M_2{}^\circ\left(1+\frac{k}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n X^\cdot(k^n\tau) \tag{15}$$

$$\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2{}^\circ}\right)D' = u_p\frac{1+M_2}{M_2}\left(1+\frac{k}{\lambda}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n X^\cdot(k^n\tau) \tag{16}$$

Ввиду малости коэффициента отражения λ при приближенном определении поля течения между поршнем и ударной волной можно не учитывать влияния отраженных возмущений. В этом приближенном методе поток за криволинейным скачком уплотнения приближенно считается простой волной (волной Римана), в которой энтропия и один из характеристических параметров имеют постоянные значения, равные их значениям в начальной точке пути поршня. Обобщение этого метода, учитывающее переменность энтропии в потоке и его завихренность за криволинейной ударной волной при одномерном неустановившемся движении, дано, например, Ю. С. Завьяловым [2].

Автор благодарит С. С. Григоряна за предложенную задачу и ценные советы.

Поступила 3 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
2. Завьялов Ю. С. О возможных обобщениях метода скачка уплотнения и течения разрежения. Доклад научн. конференции по теор. и прикл. вопр. матем. и механ. Томск, Томский ун-т, 1960, стр. 93—95.

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

О. А. Березин (Ленинград)

Рассматривается установившееся движение электропроводной жидкости в прямоугольном канале, боковые стенки которого ($y = \pm a$) являются идеально проводящими, а верхняя и нижняя ($z = \pm b$) — непроводящими. Перпендикулярно верхней и нижней стенкам канала приложено постоянное поперечное магнитное поле $B_z = B_0$, а через боковые стенки канала пропускается постоянный ток $i_y = i_0$, отнесенный к единице длины электродов. Эта задача при $i_0 = 0$ и идеально проводящих стенках канала решена Я. С. Уфляндом [1], а для непроводящих стенок — Шерклиффом [2]. В работе Г. А. Гринберга [3] решение указанной задачи сведено к решению интегрального уравнения, содержащего двойные ряды по функциям Макдональда.

Ниже решение задачи сводится к решению одной бесконечной системы алгебраических уравнений, которая может быть решена методом последовательных приближений, а также дается приближенное решение при больших значениях числа Гартмана.

Считая индуцированное магнитное поле и скорость потока имеющими только одну составляющую вдоль оси x, уравнения магнитной гидродинамики можно представить в виде

$$\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}\right)+B_0\frac{\partial v_x}{\partial z}=0,\qquad \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)+\frac{B_0}{4\pi\mu}\frac{\partial B_x}{\partial z}=-q,\qquad p+\frac{B_x{}^2}{8\pi\mu}=p_0-qx \tag{1}$$

Здесь p — давление, σ — проводимость среды, η — коэффициент вязкости, c — скорость света, μ — магнитная проницаемость.

При этом напряженность электрического поля имеет составляющие

$$E_x = 0,\qquad E_y = \frac{c}{4\pi\mu\sigma}\frac{\partial B_x}{\partial z}+\frac{B_0 v_x}{c},\qquad E_z = -\frac{c}{4\pi\mu\sigma}\frac{\partial B_x}{\partial y} \tag{2}$$

Введем безразмерные величины

$$v=\frac{v_x}{v_0},\qquad B=\frac{B_x}{B_0 R_m},\qquad R_m=\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}v_0 b$$
$$M=\frac{B_0 b}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}},\qquad Q=\frac{qb^2}{v_0\eta},\qquad \xi=\frac{z}{b},\qquad \eta=\frac{y}{b},\qquad k=\frac{a}{b} \tag{3}$$

Систему (1) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2}+\frac{\partial v}{\partial \xi}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+M^2\frac{\partial B}{\partial \xi}=-Q \tag{4}$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи будут иметь следующий вид:

$$v=0, \quad \frac{\partial B}{\partial \eta}=0 \quad \text{при} \begin{cases}\xi=\pm 1\\ \eta=\pm k\end{cases}$$

$$B={}^1/_2\, J \quad \text{при } \xi=1, \qquad B=-{}^1/_2\, J \quad \text{при } \xi=-1 \qquad \left(J=\frac{4\pi\mu i_0}{B_0 c R_m}\right) \tag{5}$$

Решение задачи будем искать в виде

$$v=\left(\frac{Q}{M^2}+\frac{J}{2}\right)M\frac{\operatorname{ch} M-\operatorname{ch} M\xi}{\operatorname{sh} M}+\operatorname{ch}\frac{M}{2}\xi V(\xi,\eta)+\operatorname{sh}\frac{M}{2}\xi W(\xi,\eta)$$

$$B=\left(\frac{Q}{M^2}+\frac{J}{2}\right)\frac{\operatorname{sh} M\xi}{\operatorname{sh} M}-\frac{Q}{M^2}\xi-\frac{1}{M}\operatorname{sh}\frac{M}{2}\xi V(\xi,\eta)-\frac{1}{M}\operatorname{ch}\frac{M}{2}\xi W(\xi,\eta) \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), для V и W получим два раздельных уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}-\frac{M^2}{4}V=0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}-\frac{M^2}{4}W=0 \tag{7}$$

Решение системы (7) принимаем в виде

$$V=\left(\frac{Q}{M^2}+\frac{J}{2}\right)\frac{M}{\operatorname{sh} M}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{\operatorname{ch}\lambda_n\eta}{\operatorname{ch}\lambda_n k}\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}, \qquad \lambda_n=\frac{\sqrt{(2n-1)^2\pi^2+M^2}}{2}$$

$$W=\left(\frac{Q}{M^2}+\frac{J}{2}\right)\frac{M}{\operatorname{sh} M}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\operatorname{ch}\mu_n\eta}{\operatorname{ch}\mu_n k}\sin n\pi\xi, \qquad \mu_n=\frac{\sqrt{4n^2\pi^2+M^2}}{2} \tag{8}$$

Постоянные c_n и b_n определялись из условий (5); имеем

$$\operatorname{ch} M\xi-\operatorname{ch} M=\operatorname{ch}\frac{M}{2}\xi\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}+\operatorname{sh}\frac{M}{2}\xi\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi\xi \tag{9}$$

$$\operatorname{sh}\frac{M}{2}\xi\sum_{n=1}^{\infty}c_n\lambda_n\operatorname{th}\lambda_n k\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}+\operatorname{ch}\frac{M}{2}\xi\sum_{n=1}^{\infty}b_n\mu_n\operatorname{th}\mu_n k\sin n\pi\xi=0 \tag{10}$$

Умножая каждое из уравнений (9) и (10) соответственно на

$$\cos\frac{(2j-1)\pi\xi}{2}\operatorname{sch}\frac{M\xi}{2}, \qquad \cos\frac{(2j-1)\pi\xi}{2}\operatorname{csch}\frac{M\xi}{2}$$

и интегрируя результаты по ξ в пределах от -1 до $+1$, получим

$$\varphi_{0j}=c_j+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\varphi_{nj}, \qquad c_j\lambda_j\operatorname{th}\lambda_j k+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\mu_n\operatorname{th}\mu_n k\psi_{nj}=0 \tag{11}$$

Здесь

$$\varphi_{0j}=\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{ch} M\xi-\operatorname{ch} M}{\operatorname{ch}(M\xi/2)}\cos\frac{(2j-1)\pi\xi}{2}d\xi$$

$$\varphi_{nj}=\int_{-1}^{1}\operatorname{th}\frac{M}{2}\xi\sin n\pi\xi\cos\frac{(2j-1)\pi\xi}{2}d\xi, \qquad \psi_{nj}=\int_{-1}^{1}\operatorname{cth}\frac{M}{2}\xi\sin n\pi\xi\cos\frac{(2j-1)\pi\xi}{2}d\xi$$

Исключая c_j из (11), для определения неизвестных постоянных b_j получим одну бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\varphi_{0j}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\varphi_{nj}-\frac{\mu_n\operatorname{th}\mu_n k}{\lambda_j\operatorname{th}\lambda_j k}\psi_{nj}\right) \tag{12}$$

Нахождение коэффициентов c_n и b_n можно свести к решению одного интегрального уравнения следующим образом.

Равенство (10) можно удовлетворить, положив

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n \operatorname{th} \lambda_n k \cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2} = \varphi(\xi) \operatorname{ch}\frac{M}{2}\xi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\mu_n \operatorname{th} \mu_n k \sin n\pi\xi = -\varphi(\xi) \operatorname{sh}\frac{M}{2}\xi \tag{13}$$

Здесь $\varphi(\xi)$ — произвольная четная функция, обращающаяся в нуль при $\xi = \pm 1$. Отсюда

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n \operatorname{th} \lambda_n k}\int_{-1}^{1} \varphi(t) \operatorname{ch}\frac{M}{2}t \cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}\,dt$$

$$b_n = -\frac{1}{\mu_n \operatorname{th} \mu_n k}\int_{-1}^{1} \varphi(t) \operatorname{sh}\frac{M}{2}t \sin n\pi t\,dt \tag{14}$$

Подставляя (14) в (9), для определения неизвестной функции $\varphi(t)$ получим интегральное уравнение

$$\operatorname{ch} M\xi - \operatorname{ch} M = \operatorname{ch}\frac{M}{2}\xi\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{ch}(Mt/2)\,\varphi(t)}{\lambda_n \operatorname{th}\lambda_n k}\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}\,dt -$$

$$- \operatorname{sh}\frac{M}{2}\xi\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sh}(Mt/2)\,\varphi(t)}{\mu_n \operatorname{th}\mu_n k}\sin n\pi\xi \sin n\pi t\,dt \tag{15}$$

Рассмотрим случай больших значений числа Гартмана M. В этом случае $\operatorname{th}\lambda_n k \approx \approx \operatorname{th}\mu_n k \approx 1$. Положим

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) \operatorname{ch}\frac{Mt}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}\,dt = (\operatorname{ch} M\xi - \operatorname{ch} M)\operatorname{ch}\frac{M}{2}\xi \tag{16}$$

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) \operatorname{sh}\frac{Mt}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\sin n\pi\xi \sin n\pi t\,dt = (\operatorname{ch} M\xi - \operatorname{ch} M)\operatorname{sh}\frac{M}{2}\xi \tag{17}$$

При выполнении условий (16) и (17) уравнение (15) удовлетворяется тождественно. Умножая уравнение (16) на $\cos[(2j-1)\pi\xi/2]$, а уравнение (17) на $\sin j\pi\xi$ и интегрируя по ξ в пределах от -1 до $+1$, получим

$$\frac{2(2j-1)\pi \operatorname{ch}{}^3/_2 M(-1)^{j+1}}{9M^2 + (2j-1)^2\pi^2} - \frac{4(\operatorname{ch} M - {}^1/_2)(2j-1)\pi \operatorname{ch}{}^1/_2 M(-1)^{j+1}}{M^2 + (2j-1)^2\pi^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_j}\int_{-1}^{1} \varphi(t) \operatorname{ch}\frac{Mt}{2}\cos\frac{(2j-1)\pi t}{2}\,dt \tag{18}$$

$$\frac{4j\pi \operatorname{sh}{}^3/_2 M(-1)^{j+1}}{9M^2 + 4j^2\pi^2} - \frac{8(\operatorname{ch} M + {}^1/_2)j\pi \operatorname{sh}{}^1/_2 M(-1)^{j+1}}{M^2 + 4j^2\pi^2} =$$

$$= \frac{1}{\mu_j}\int_{-1}^{1} \varphi(t) \operatorname{sh}\frac{Mt}{2}\sin j\pi t\,dt \qquad \left(\varphi(t) = 8M^2 \operatorname{ch}\frac{3M}{2} f(t)\right)$$

При больших M приближенно имеем

$$\int_{-1}^{1} f(t) \operatorname{ch}\frac{Mt}{2}\cos\frac{(2j-1)\pi t}{2}\,dt = \frac{(2j-1)\pi(-1)^j}{[9M^2 + (2j-1)^2\pi^2]\sqrt{M^2 + (2j-1)^2\pi^2}} \tag{19}$$

а также

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{sh}\,\frac{Mt}{2}\sin j\pi t\,dt = \frac{2j\pi(-1)^j}{(9M^2+4j^2\pi^2)\sqrt{M^2+4j^2\pi^2}} \tag{20}$$

Положим

$$f(t) = \mathrm{sch}\,\frac{Mt}{2}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}$$

Из уравнения (19) находим коэффициенты A_m, имеем

$$A_m = \frac{(2m-1)\pi(-1)^m}{[9M^2+(2m-1)^2\pi^2]\sqrt{M^2+(2m-1)^2\pi^2}} \tag{21}$$

Покажем, что найденная таким образом функция $f(t)$ при больших M также удовлетворяет уравнению (20). Пользуясь соотношениями

$$\frac{1}{\sqrt{M^2+(2m-1)^2\pi^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2+M^2+(2m-1)^2\pi^2} \tag{22}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)(-1)^m}{9M^2+(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)(-1)^m}{\sigma^2+M^2+(2m-1)^2\pi^2}\times$$

$$\times\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mathrm{ch}\,(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2}\,t)}{\mathrm{ch}\,(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2})} - \frac{\mathrm{ch}\,^3/_2 Mt}{\mathrm{ch}\,^3/_2 M}\right]$$

уравнение (20) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2-8M^2}\int_0^1 \mathrm{th}\,\frac{Mt}{2}\sin j\pi t\left\{\frac{\mathrm{ch}\,(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2}\,t)}{\mathrm{ch}\,(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2})} - \frac{\mathrm{ch}\,^3/_2 Mt}{\mathrm{ch}\,^3/_2 M}\right\}dt =$$

$$= \frac{2j\pi(-1)^j}{[9M^2+4j^2\pi^2]\sqrt{M^2+4j^2\pi^2}} \tag{23}$$

Пользуясь представлением

$$\mathrm{th}\,\frac{Mt}{2} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}e^{-\nu Mt}$$

получим

$$\int_0^1 \mathrm{th}\,\frac{Mt}{2}\sin j\pi t\left\{\frac{\mathrm{ch}\,(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2}\,t)}{\mathrm{ch}\,(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2})} - \frac{\mathrm{ch}\,^3/_2 Mt}{\mathrm{ch}\,^3/_2 M}\right\}dt = \tag{24}$$

$$= 4j\pi(-1)^j\left[\frac{1}{9M^2+4j^2\pi^2} - \frac{1}{M^2+\sigma^2+4j^2\pi^2}\right] + \varepsilon_j$$

Здесь (25)

$$\varepsilon_j = \frac{4j\pi}{\mathrm{ch}\,^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2}}\,\frac{1}{M^2+\sigma^2+4j^2\pi^2} - \frac{4j\pi}{\mathrm{ch}\,^3/_2 M}\,\frac{1}{9M^2+4j^2\pi^2} +$$

$$+ j\pi\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}\,(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2})}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\frac{1-(-1)^j\exp(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2}) - \nu M}{(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2}-\nu M)^2+j^2\pi^2} +\right.\right.$$

$$\left. + \frac{1-(-1)^j\exp(-^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2}-\nu M)}{(^1/_2\sqrt{M^2+\sigma^2}+\nu M)^2+j^2\pi^2}\right] -$$

$$\left. - \mathrm{sch}\,\frac{3M}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\frac{1-(-1)^j\exp[M(^3/_2-\nu)]}{(^3/_2-\nu)^2M^2+j^2\pi^2} + \frac{1-(-1)^j\exp[-M(^3/_2+\nu)]}{(^3/_2+\nu)^2M^2+j^2\pi^2}\right]\right\}$$

Отсюда следует, что ε_j имеет порядок первого члена правой части равенства (24), деленного на $\operatorname{ch} {}^1/_2 M$. Так как M велико, то, пренебрегая ε_j и подставляя (24) в (23), получим тождество, что и требовалось доказать. Таким образом, при больших M выражения для коэффициентов c_j и b_j в решении (8) можно записать в виде

$$c_j = \frac{16M^2(2j-1)\pi(-1)^j}{[9M^2+(2j-1)^2\pi^2][M^2+(2j-1)^2\pi^2]} \operatorname{ch}\frac{3M}{2}$$

$$b_j = -\frac{16M^2 2j\pi(-1)^j}{(9M^2+4j^2\pi^2)(M^2+4j^2\pi^2)} \operatorname{ch}\frac{3M}{2}$$

Полученные значения коэффициентов c_j и b_j свидетельствуют о том, что примерно $j = {}^1/_2(M+1)$ первых коэффициентов растут линейно с номером j. Убывание этих коэффициентов начинается со значений j, сравнимых с ${}^1/_2(M+1)$. Это свойство рядов характерно вообще для краевых задач, поставленных для уравнений, имеющих малый параметр при старших производных, что сопровождается некоторыми вычислительными трудностями.

Указанные трудности в значительной степени могут быть преодолены при помощи метода Г. А. Гринберга [4].

Поступила 26 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Установившееся течение электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля. Ж. техн. физ., 1960, 10, стр. 1256.
2. Shercliff J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, No. 1, 49.
3. Гринберг Г. А. Об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубке с двумя непроводящимися стенками и двумя проводящими, параллельными внешнему магнитному полю. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
4. Гринберг Г. А. О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле. ПММ,1961, т. XXVI, вып. 1.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В АРГОНЕ НА ЛИНИИ НАСЫЩЕНИЯ

И. С. Радовский

(*Москва*)

Измерениям скорости звука в сжиженном аргоне при низких температурах посвящено несколько работ. Однако для кривой фазового равновесия «жидкость — пар» в литературе имеется лишь несколько значений скорости звука, полученных экспериментально вблизи точки затвердевания [1, 2].

Практически данные о скорости звука в аргоне на линии насыщения до настоящего времени отсутствуют.

Автором были проведены систематические измерения скорости звука в паровой и жидкой фазах аргона на кривой фазового равновесия при температурах от 83.94 до 150.65° K, т. е. от тройной точки до критической. Для осуществления этих измерений была создана экспериментальная установка, в основу которой положен метод акустического интерферометра с переменным расстоянием между излучателем ультразвука и отражателем. Теория метода подробно описана в литературе [3, 4].

Схема примененного интерферометра представлена на фиг. 1. Основные детали интерферометра: излучатель ультразвука *1* (кварцевая пластинка X-среза с собственной частотой колебаний около 500 *кгц*), кварцедержатель *2*, направляющий стакан *3*, отражатель *4*, гайка *5* и микрометрический винт *6* с шагом резьбы 0.5 *мм*, при вращении которого осуществляется вертикальное перемещение отражателя. Передача вращающего момента к микрометрическому винту от реверсивного двигателя осуществляется бессальниковой магнитной муфтой, состоящей из постоянного магнита *7* и якоря *8*. Корпус интерферометра *9* выполнен в виде толстостенного медного блока, что способствует быстрому выравниванию температуры в интерферометре.

Конструкция установки предусматривает сведение к минимуму теплообмена между интерферометром и окружающей средой. Внутри вакуумной рубашки *10*, помещенной в открытый сосуд Дюара с жидким азотом, создается вакуум порядка 10^{-5} *мм* рт. ст. Поэтому потери тепла интерферометром сводятся в основном к лучеиспусканию и составляют незначительную величину. Для их компенсации служат два констан-