УДК 532.516

К ТЕОРИИ ПЛОСКОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ СО СТЕПЕННЫМ РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ

К. Б. Павлов

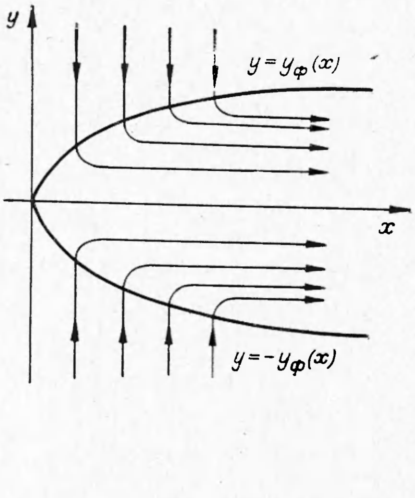
(*Москва*)

Характер распространения сдвиговых возмущений в неньютоновских жидкостях со степенным реологическим законом [1]

$$\sigma_{ij} = 2k\,(f_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta})^{(n-1)/2}f_{ij} \tag{1}$$

существенно определяется значением показателя n в (1), где σ_{ij} — девиатор тензора напряжений; f_{ij} — тензор скоростей деформации; k и n — реологические константы среды. По принятой терминологии среды с $n > 1$ называются дилатантными, с $n < 1$ — псевдопластическими, случай $n = 1$ соответствует ньютоновской вязкой жидкости. Известно, что в дилатантных жидкостях сдвиговые возмущения распространяются с конечной скоростью, а в псевдопластических и ньютоновских вязких жидкостях скорость распространения возмущений бесконечна [2, 3]. Как следствие этого, имеет место факт конечной толщины пограничного слоя при обтекании ламинарным потоком дилатантной жидкости плоской полубесконечной пластины. Действительно, конечная толщина пограничного слоя в этом случае объясняется тем, что распространяющиеся с конечной скоростью сдвиговые возмущения сносятся по потоку и уходят от поверхности, на которой формируется слой, лишь на конечное расстояние в направлении его поперечной координаты. Неточное рассмотрение, проведенное в [4], неоправданно исключило факт конечной толщины пограничного слоя в случае «уплотняющихся» дилатантных жидкостей с $1 < n < 2$. Между тем конечность толщины пограничного слоя может быть строго показана в случае любых дилатантных жидкостей с произвольными значениями $n > 1$.

Если в дилатантных жидкостях скорость распространения сдвиговых возмущений конечна, то затопленная в таких жидкостях плоская ламинарная струя должна иметь конечную толщину, т. е. на конечном расстоянии от оси струи в жидкости находится поверхность $y = y_\Phi(x)$, вне которой продольная составляющая скорости равна нулю (см. фигуру). Это связано с тем, что струя вовлекает в движение жидкость, в которую она истекает, причем жидкость, кроме продольной, имеет также поперечную составляющую скорости, направленную к оси струи. С другой стороны, скорость распространения сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях, связанных с изменением продольной составляющей скорости, уменьшается по мере удаления от источника возмущений [3], находящегося в затопленной струе на ее оси. Можно поэтому ожидать, что



на определенном расстоянии от оси струи скорость распространения сдвиговых возмущений становится равной поперечной составляющей скорости жидкости, в результате чего сдвиговые возмущения распространяются лишь на конечное расстояние от оси струи. Иными словами, в жидкости должна иметь место остановка фронта сдвиговой волны, и сдвиговые возмущения проникают в жидкость лишь на конечное расстояние от оси струи.

Решение задачи о плоской затопленной струе степенной жидкости рассматривалось в случае псевдопластических жидкостей в [5—7]. Однако в этих работах не было получено аналитическое решение для случая дилатантных жидкостей. Естественно поэтому, что там не был обнаружен факт пространственной локализации сдвиговых возмущений. В этой связи результаты данной работы дополняют рассмотрения, проведенные в [5—7].

Пусть из бесконечно тонкой щели в полупространство $x > 0$ (см. фигуру), заполненное степенной жидкостью (1) бьет та же жидкость с постоянным значением импульса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = 2I_0, \tag{2}$$

где ρ — плотность жидкости; $u(x, y)$ — продольная составляющая скорости. Течение жидкости симметрично относительно оси x и для его описания достаточно ограничиться областью $x, y \geqslant 0$.

Тогда для определения функции тока

$$\psi(x, y) = a^{1/2(2-n)} x^{1/3n} f(\eta), \tag{3}$$

$$\eta = \left(\frac{1}{3na^{1/2}}\right)^{1/(2n-1)} \frac{y}{x^{2/3n}}, \quad a \equiv \frac{k}{\rho}, \quad x, y \geqslant 0$$

в приближении теории пограничного слоя имеет место следующая задача [8]:

$$(-1)^{n-1} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^n + \frac{d}{d\eta}\left(f\frac{df}{d\eta}\right) = 0; \tag{4}$$

$$f(0) = \frac{d^2 f}{d\eta^2}(0) = \frac{df}{d\eta}(\infty) = 0, \tag{5}$$

в результате решения которой с учетом (3) могут быть определены обе проекции скорости $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Интегрируя уравнение (4) дважды с учетом первых двух граничных условий (5), имеем

$$\frac{df}{d\eta} = \left[\frac{2n-1}{n+1}\left(A^{(n+1)/n} - f^{(n+1)/n}\right)\right]^{n/(2n-1)}, \tag{6}$$

где A — постоянная интегрирования, значение которой определено ниже. Полагая

$$f(\eta) = A\xi^{n/(n+1)}, \tag{7}$$

после интегрирования (6) можно получить выражение

$$\int_0^{\xi} \xi^{-1/(n+1)}(1-\xi)^{-n/(2n-1)} d\xi = \frac{[A^{2-n}(2n-1)^n (n+1)^{n-1}]^{1/(2n-1)}}{n}\eta, \tag{8}$$

с помощью которого в квадратуре записывается решение задачи (4), (5).

Очевидно, что при $\xi = 1$ $df/d\eta = 0$, а подынтегральное выражение в (8) имеет особенность, интегрируемую, если $n > 1$, и неинтегрируемую, если $n \leqslant 1$. Поэтому из (8) следует, что в случае псевдопластических и ньютоновских вязких жидкостей третье условие (5) выполняется при $\eta \to \infty$. Таким образом, выражение (8) следует рассматривать, как решение задачи (4), (5) в случае $n \leqslant 1$ с неопределенной пока константой A.

В случае дилатантных жидкостей третье условие (5) оказывается выполненным при $\eta = \eta_\Phi < \infty$:

$$\eta_\Phi = \frac{n}{[(2n-1)^n (n+1)^{n-1}]^{1/(2n-1)}} A^{(2-n)/(2n-1)} B\left[\frac{n}{n+1}, \frac{n-1}{2n-1}\right] \tag{9}$$

($B[p, q]$ — бета-функция [9]).

Уравнение (6), которое необходимо интегрировать в процессе построения решения задачи (4), (5), кроме частного решения $f_1(\eta)$, определенного выражениями (7), (8), имеет особое решение $f_2(\eta) = A$ [10]. Замечая, что константное решение $f = \text{const}$ удовлетворяет уравнению (4) и третьему граничному условию (5), построим обобщенное решение задачи (4), (5)

$$f(\eta) = \begin{cases} f_1(\eta) & \text{при} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_\Phi, \\ f_2(\eta) & \text{при} \quad \eta_\Phi \leqslant \eta < \infty, \end{cases} \tag{10}$$

склеенное при $\eta = \eta_\Phi$ со слабым разрывом из частного и особого решений уравнения (6).

Таким образом, построено решение задачи (4), (5) при $n > 1$, имеющее различное аналитическое описание для разных значений η. Физическая интерпретация решения (10) соответствует тому, что продольная составляющая скорости $u(x, y)$ в случае затопленных струй дилатантных жидкостей изменяется полностью внутри пространственно-локализованной области — $y_\Phi(x) \leqslant y \leqslant y_\Phi(x)$ (см. фигуру), вне которой она равна нулю

$$u(x, y) = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad v(x, y) = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{A}{3n} a^{1/2(2-n)} x^{(1-3n)/3n}$$
$$(0 < x < \infty, \ y_\Phi(x) < y < \infty).$$

Границы области пространственной локализации сдвиговых возмущений определяются из (3), (9)

$$y_\Phi(x) = (3na^{1/2})^{1/(2n-1)} \eta_\Phi x^{2/3n}. \tag{11}$$

Постоянная интегрирования A вычисляется из условия (2) с учетом (3), (6), (7); в результате для всех значений n имеем

$$A = \left\{\frac{1}{2n-1}\left[\left(\frac{I_0}{\rho B\left[\frac{n}{n+1}, \frac{3n-1}{2n-1}\right]}\right)^{2n-1} \frac{3(n+1)^{3n-1}}{n^{2(n-1)} a^{(5n-4)/2(2-n)}}\right]^{1/n}\right\}^{1/3n}. \tag{12}$$

Так как $B[p, q \to +0] \to \infty$, то из (9), (11) следует, что при $n \to 1+0$ $y_\Phi(x) \to \infty$, т. е. при переходе к случаю ньютоновской вязкой жидкости продольная составляющая скорости $u(x, y)$ изменяется не в локализованной области, а во всем полупространстве $x > 0$.

Очевиден также другой предельный переход в выражениях (9), (11), (12) к случаю «предельной дилатантной» жидкости $n \to \infty$ [8]. В этом случае $y_\Phi(x) \to 0$ и бьющая из щели струя движется через покоящуюся среду, как твердый стержень через идеальную невязкую жидкость.

В заключение отметим, что пространственная локализация сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях подобна факту существования фронтовых решений типа тепловых волн в теории нелинейной теплопроводности [11]. В обоих случаях обобщенные решения нелинейных параболических уравнений (систем) содержат поверхность слабого разрыва — фронт, на котором константное решение сшивается с переменным. В [12] была установлена связь между решениями типа тепловых волн и существованием особых решений соответствующих дифференциальных уравнений (систем). При рассмотрении задач теории пограничного слоя дилатантных жидкостей эта связь также очевидна.

Поступила 21 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рейнер М.** Реология. М., «Наука», 1965.
2. **Van Atta C. W.** An example of unsteady laminar mixing in power law fluids.— «A. I. Ch. E. J.», 1966, vol. 12, N 6, p. 1221.
3. **Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.** Сдвиговые течения жидкости со степенным реологическим законом при наличии постоянной поперечной составляющей скорости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 4, с. 15.
4. **Acrivos A., Shah M. J., Petersen E. E.** Momentum and heat transfer in laminar bonndary-layer flows of non-newtonian fluids past external surfaces.— «A. I. Ch. E. J.», 1960, vol. 6, N 2, p. 312.
5. **Kapur J. N.** On the two-dimensional jet of an incompressible pseudo-plastic fluid.— «J. Phys. Soc. Jap.», 1962, vol. 17, N 8, p. 1303.
6. **Gutfinger C., Shinnar R.** Velocity distributions in two-dimensional laminar liquid-into-liquid jets in power-law fluids.— «A. I. Ch. E. J.», 1964, vol. 10, N 5, p. 631.
7. **Lemieux P. F., Unny T. E.** The laminar two-dimensional free jet an incompressible pseudoplastic fluid.— «Trans ASME. Ser. E. Appl. Mech.», 1969, vol. 35, N 4.
8. **Шульман З. П.** Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М., «Энергия», 1975.
9. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ФМ, 1963.
10. **Матвеев Н. М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высш. школа», 1967.
11. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
12. **Павлов К. Б.** Пространственная локализация тепловых возмущений при нагревании сред с объемным поглощением тепла.— ПМТФ, 1973, № 5.

УДК 532.5

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ КАПЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Р. Орел

(*Москва*)

Равновесные формы и устойчивость осесимметричных капель подробно исследованы в работах [1—3]. Условиям отрыва капель при их медленном росте посвящены работы [4—6]. В [7] на основании результатов [6] предлагается метод определения коэффициента поверхностного натяжения жидкости по высоте капли в момент ее отрыва.

Ниже рассматривается равновесие и устойчивость осесимметричной капли, сообщающейся с объемом несжимаемой жидкости, ограниченным плоской свободной поверхностью. В отличие от [1—7] при исследовании устойчивости такой системы [8] необходимо учитывать возмущения, изменяющие объем капли. Поэтому класс устойчивых равновесных форм сужается.