

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СРЕД ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Д. Колимбас, С. В. Лавриков*, А. Ф. Ревуженко*

Институт геотехники и туннелестроения при Инсбрукском университете, Австрия

* Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск

Предложена методика анализа определяющих моделей сред при сложных путях нагружения, основанная на сравнении данных лабораторных экспериментов и соответствующих результатов численных расчетов по модели. Ранее выполнены лабораторные эксперименты по реализации близкого к однородному сложного нагружения с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций и нагружения с изломами траектории деформирования. На основе определяющих уравнений модели проводятся численные расчеты для видов нагружения, соответствующих выполненным экспериментам. Проводится сравнение полученных результатов и данных лабораторных экспериментов. Проанализирована гипопластическая модель геосреды. Анализ показал, что модель дает удовлетворительное качественное и количественное приближение к данным лабораторных экспериментов по сложному нагружению геоматериалов.

Введение. Решение большинства задач механики сплошной среды приводит к необходимости выбора или построения соответствующей математической модели деформирования материала. Для упругого тела или линейно-вязкой жидкости разработаны общепризнанные классические уравнения Ламе и Навье — Стокса. Однако для более сложных сред, например упругопластических, гранулированных материалов, нелинейных жидкостей, таких уравнений не существует. Поэтому для каждого класса задач вопрос о выборе модели должен решаться отдельно. Здесь многое зависит от конкретных условий нагружения и целей, которые преследуются при решении данной задачи.

Большинство используемых моделей носят феноменологический характер. Это означает, что они строятся на основе некоторых базисных экспериментов. Такие эксперименты должны определять как сами уравнения модели, так и значения параметров, которые в них фигурируют.

Вопрос о выборе базисных экспериментов непростой. В принципе для построения математических моделей можно использовать любые эксперименты, например вдавливание штампа. Однако для интерпретации такого эксперимента необходимо предварительно выбрать некоторую математическую модель, решить краевую задачу, провести сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, осуществить корректировку модели и т. д. Это сложный и громоздкий путь. В то же время известен особый класс нагружений, когда для интерпретации эксперимента предварительной информации о математической модели не требуется. Это класс квазистатических нагружений, в котором распределения напряжений и деформаций по пространству носят однородный характер. Здесь процесс деформирования сводится к реализации последовательности аффинных преобразований. При этом должны выполняться только некоторые ограничения общего характера: нагружение должно быть таким, чтобы инерционными и массовыми силами можно

было пренебречь, а процесс деформирования должен быть устойчивым (т. е. не допускаются реологическая и другие виды неустойчивости). Таким образом, в устойчивых процессах кинематика деформирования не зависит от реологии материала, т. е. одинакова для любых сред: упругопластических, вязких, сыпучих и др. Поэтому эксперименты по однородному деформированию в принципе являются идеальными в качестве базисных для построения и анализа математических моделей сплошных сред.

На практике достичь полностью однородного состояния технически невозможно. Можно только реализовать процесс деформирования, который близок к однородному. Для металлов такие методики хорошо известны [1, 2]. Это растяжение и закручивание тонкостенных трубчатых образцов. Однако эта классическая методика неприемлема для более сложных сред: вязких, сыпучих материалов, грунтов, порошков и т. д. Здесь необходим поиск новых базисных экспериментов.

В работах [3, 4] дана общая классификация однородных процессов деформирования, включающая такие хорошо известные процессы, как однородное растяжение, чистый сдвиг, кручение и др. Однако обнаружены и новые классы нагружений. На их основе разработаны методики и лабораторные установки по реализации однородного деформирования сыпучей среды при чистом сдвиге [5, 6], сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей тензора напряжений [7, 8] и сложном нагружении с изломами траектории деформирования [9]. В последнем случае главные оси напряжений поворачиваются относительно материала скачком на конечный угол. На основе разработанных экспериментальных методик в работах [10, 11] проведен анализ гипопластической модели сыпучей среды [12–14]. Для этой модели выполнены численные эксперименты по простому нагружению (чистый сдвиг) и сложному (с непрерывным поворотом главных осей тензора напряжений и изломами траектории нагружения). Сравнение результатов численных расчетов и соответствующих данных лабораторных экспериментов позволило сделать вывод о том, что модель [12–14] дает хорошее приближение к экспериментам по дилатансии, уровню напряженного состояния и может прогнозировать ряд эффектов деформирования сыпучей среды как при простых, так и при сложных путях нагружения. В настоящее время разработана новая версия гипопластической модели [12–14], опубликованная в работе [15].

Целью настоящей работы является проведение численного анализа модели [15] на основе методик лабораторных экспериментов [7–9] по сложному нагружению сыпучей среды с непрерывным поворотом главных осей тензора напряжений и изломами траекторий деформирования.

Реализация нагружения. Рассмотрим вначале реализацию однородного деформирования сыпучей среды при сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей тензора напряжений. Решения [7, 8] показывают, что образцу материала необходимо придать форму эллиптического цилиндра с осью Ox_3 и на эллиптической границе в плоскости Ox_1x_2 (плоская деформация) задать вектор скорости $\mathbf{v}$, удовлетворяющий закону Кеплера

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad |\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = \Omega = \text{const}, \quad (1)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к эллиптической границе образца; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор (рис. 1). В этом случае независимо от того, является ли среда упругой, вязкой, пластической или какой-либо другой (если имеется устойчивость, т. е. отсутствуют локализация сдвигов, разрушение и т. д.), распределение деформаций по пространству будет однородным [7]. Оба условия (1) технически реализовать довольно трудно. Проще сохранить только основные черты идеальной ситуации — выполнить первое условие (1), а линейную скорость задавать постоянной:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad |\mathbf{v}| = \text{const}. \quad (2)$$

Ясно, что замена условий (1) на (2) приведет к определенной неоднородности. Однако материальный элемент в центре эллипса (рис. 1) в силу симметрии находится в условиях

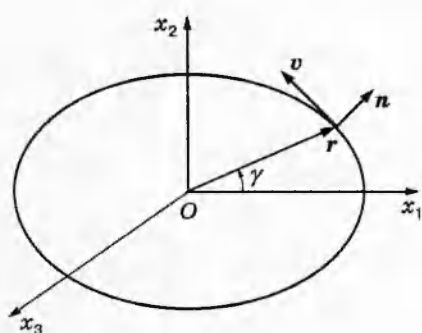


Рис. 1

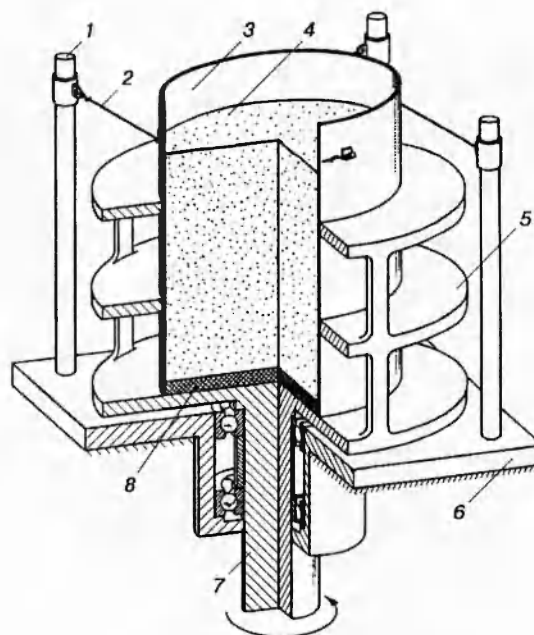


Рис. 2

сложного нагружения с поворотом главных осей напряжений. Таким образом, если измерения проводить для центрального элемента на малой базе, то полученные результаты можно считать точными и проводить их сравнение с теоретическими расчетами при однородном деформировании.

Техническая реализация нагружения с граничными условиями (2) осуществлялась в [8] следующим образом. Образец сыпучего материала 4 (рис. 2) помещался в емкость, имеющую форму цилиндрического стакана 3, выполненного из тонкой листовой бронзы. Дно стакана закрывалось натянутой резиной 8. Нагружающее устройство представляло собой жесткие пластины 5 с соосными эллиптическими вырезами. В них вставлялся цилиндрический стакан 3. Пластины 5 охватывали стакан в различных сечениях по высоте и закреплялись на оси 7, которая через подшипники устанавливалась на основании 6. Нагружение осуществлялось непрерывным вращением оси 7 (и, следовательно, пластин 5) от электродвигателя. Вращающий момент на цилиндрическом стакане, возникающий за счет трения с пластинами, компенсировался гибкими тягами 2, которые крепились к верхней части стакана и неподвижным стойкам 1 (рис. 2).

В экспериментах [8] изучались поведение дилатансии сыпучей среды, напряженное состояние и соосность тензоров напряжений и деформаций. В процессе нагружения площадь поперечного сечения стакана, содержащего образец среды, остается постоянной. Это означает, что исследование дилатансии сводится к исследованию изменения высоты засыпки материала в стакане. Напряженное состояние и соответственно соосность тензоров напряжений и деформаций исследовались с помощью специального датчика напряжений [16], который помещался внутри образца материала на некоторой фиксированной глубине. Для контроля ориентации датчика относительно осей эллиптических вырезов нагружающих пластин к нему жестко крепилась вертикальная спица. На ее свободном конце над поверхностью образца фиксировался флажок, плоскость которого совпадала с плоскостью датчика.

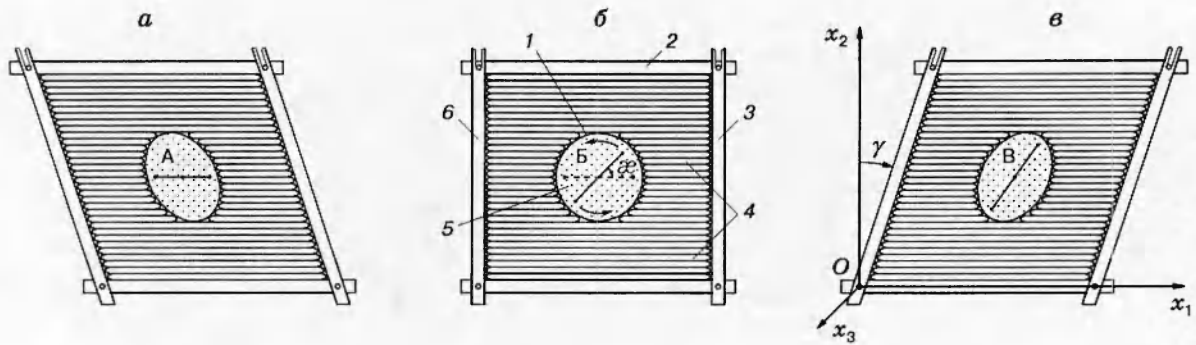


Рис. 3

Рассмотрим реализацию в [9] экспериментов по сложному нагружению сыпучей среды с изломами траектории деформирования. За основу взят прибор однородного сдвига [5, 6] (рис. 3), который представляет собой кубическую камеру с жесткими подвижными стенками 2, 3, 6 и жестким формоизменяющимся квадратным дном. При сдвиге квадрат переходит в параллелограмм (рис. 3, а, в). Это типичный пример простого нагружения.

Излом траектории нагружения можно реализовать следующим образом [9]. Гибкий цилиндрический стакан 1 (рис. 3, б), в который помещался образец сыпучего материала 5, устанавливался внутри камеры сдвига. Боковая поверхность стакана представляла собой упругую оболочку, изготовленную из тонкой листовой бронзы. Дно стакана закрывалось равномерно растянутой резиной, которая скреплялась с внутренней поверхностью оболочки. Стакан устанавливался в центре камеры внутри круговой цилиндрической полости, которую образует набор вертикально установленных жестких пластин 4 различной длины (рис. 3, б). При сдвиге на некоторый угол γ усилия от боковых стенок 3, 6 камеры через пластины 4 передаются на боковую поверхность стакана 1 и деформируют его: круг переходит в эллипс (рис. 3, а, в). Излом траектории нагружения осуществлялся следующим образом. Выбиралось некоторое начальное положение камеры, например положение А (рис. 3, а). Пусть необходимо осуществить сдвиг материала из положения А в положение В (рис. 3, в) с изломом траектории. Для этого сначала осуществлялся сдвиг камеры из положения А в положение Б (рис. 3, б), после чего нагружение останавливалось. В этом положении осуществлялся жесткий поворот стакана 1, содержащего материал, на некоторый угол α . Иными словами, упаковка частиц материала внутри стакана не нарушалась. Затем проводилось дальнейшее нагружение сдвигом из положения Б в положение В. Величина излома траектории нагружения определяется углом α . При этом траектория нагружения в пространстве деформаций является ломаной двухзвенной линией.

Экспериментально исследовались дилатансия сыпучего материала и соосность тензоров напряжений и деформаций. Теоретически при чистом сдвиге площадь поперечного сечения стакана, содержащего материал, должна оставаться постоянной (площадь круга (рис. 3, б) должна равняться площадям эллипсов (рис. 3, а, в)). На практике постоянным выдерживается периметр поперечного сечения стакана. При этом изменение его площади является величиной высшего порядка малости и им можно пренебречь. Следует отметить, что при больших сдвигах введение поправок на изменение площади поперечного сечения трудности не представляет. Иными словами, как и в предыдущем эксперименте, исследование дилатансии сводится к исследованию изменения высоты засыпки материала. Для решения вопроса о соосности тензоров напряжений и деформаций использовался датчик касательных напряжений [17], который помещался внутри сыпучей среды на определенной глубине. С помощью датчика определялась ориентация площадок главных напряжений (т. е. площадок, где касательные напряжения отсутствуют).

Численное моделирование. Проведем численные расчеты по сложному нагружению сыпучей среды в рамках математической модели [15]. Определяющие уравнения модели, связывающие тензор напряжений T и тензор скоростей деформаций D , имеют вид

$$T^0 = C_1 \text{tr}(T + S)D + C_2 \frac{\text{tr}((T + S)D)}{\text{tr}(T + S)}(T + S) + \left[\frac{C_3 T^2 + C_4 T^{*2}}{\text{tr}(T)} + \frac{C_5 T^3 + C_6 T^{*3}}{\text{tr}(T^2)} \right] \sqrt{\text{tr}(D^2)},$$

$$\dot{e} = (1 + e) \text{tr}(D);$$

$$S = sE, \quad s = \left[s_0 + k \left(\frac{p}{p_0} \right)^\nu \ln \left(\frac{1 + e}{1 + e_0} \right) \right] \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha,$$

$$p = \text{tr}(T), \quad k = -s_0 / \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^\nu \ln \left(\frac{1 + e_r}{1 + e_0} \right) \right],$$

$$T^0 = \dot{T} - WT + TW, \quad T^* = T - \frac{1}{3} pE, \quad W = \frac{1}{2} (\nabla v - \nabla v^T),$$

где v — поле скоростей; e — пористость; E — единичный тензор. Константы модели равны

$$C_1 = -103,01, \quad C_2 = -197,61, \quad C_3 = 37,24, \quad C_4 = 1572,92, \quad C_5 = -394,69,$$

$$C_6 = -1265,66, \quad p_r = -0,5 \text{ МПа}, \quad p_0 = -0,729 \text{ МПа}, \quad s_0 = -0,149 \text{ МПа},$$

$$\nu = 0,1, \quad \alpha = 0,6, \quad e_r = 0,73, \quad e_0 = 0,54.$$

Модель (3)–(5) в рамках одних и тех же уравнений позволяет описать как состояние активного нагружения, так и разгрузку. В силу этого уравнения модели носят существенно нелинейный характер даже для приращений.

Моделирование сложного нагружения с непрерывным поворотом главных осей напряжений проводилось следующим образом. Как уже отмечалось, граничные условия (1) гарантируют однородность распределения деформаций. При этом в плоскости Ox_1x_2 однородное поле скоростей имеет вид

$$v_1 = \Omega \frac{x_2}{b^2}, \quad v_2 = -\Omega \frac{x_1}{a^2},$$

где a, b — полуоси эллипса ($a > b$), а движение вдоль границы происходит против часовой стрелки при $\Omega > 0$. Зафиксируем горизонтальный слой материала на определенной глубине h . Вертикальную составляющую давления для слоя можно считать неизменной и равной весу вышележащих слоев [10], т. е.

$$\dot{\sigma}_{33} = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{33} = \rho h = \text{const},$$

где ρ — плотность материала. В силу однородности деформирования для выбранного слоя справедливы соотношения

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0.$$

Тензоры D и W примут вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & -q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $p = ((a^2 - b^2)/(2a^2b^2))\Omega$, $q = ((a^2 + b^2)/(2a^2b^2))\Omega$. Величина $d = \dot{\epsilon}_{33} = \partial v_3 / \partial x_3$ фактически является искомым параметром дилатансии. Таким образом, задача сводится к решению уравнений (3)–(5) при условиях (6)–(8). В покомпонентном виде они представляют

собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейной правой частью. Решение этой системы осуществлялось численно методом Эйлера.

По аналогичной схеме осуществлялось моделирование сложного нагружения с изломами траектории деформирования. Если сдвиговое нагружение происходит в плоскости Ox_1x_2 , то соответствующее ему однородное поле скоростей имеет вид

$$v_1 = 2\delta x_2, \quad v_2 = 0, \quad \delta = \pm k_0 = \text{const}, \quad k_0 > 0. \quad (9)$$

Здесь знак « $\pm$ » означает направление сдвига. Если осуществляется излом траектории (жесткий поворот образца материала в положении Б (рис. 3,б)) на угол α , то поле (9) преобразуется в поле

$$v_1 = 2\delta(-x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) \cos \alpha, \quad v_2 = 2\delta(-x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) \sin \alpha. \quad (10)$$

Таким образом, поле скоростей (10) есть плоское распределение скоростей при однородном деформировании с изломом траектории нагружения на угол α . Если $\alpha = 0$, то поле (10) совпадает с (9). Здесь так же, как и при моделировании сложного нагружения с непрерывным поворотом главных осей напряжений, выберем слой материала на определенной глубине. Тогда для этого слоя соотношения (7), (8) останутся справедливыми. В свою очередь, тензоры D и W примут вид

$$D = \begin{pmatrix} -\delta \sin 2\alpha & \delta \cos 2\alpha & 0 \\ \delta \cos 2\alpha & \delta \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 \\ -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $d = \dot{\epsilon}_{33} = \partial v_3 / \partial x_3$ — параметр дилатансии. Итак, задача свелась к решению систем уравнений (3)–(5), (10) при выполнении условий (7), (8).

Результаты расчетов. Проведем численные расчеты для сложного нагружения сыпучей среды с непрерывным поворотом главных осей напряжений. В начальном состоянии среды положим

$$\sigma_{33} = 0,00375 \text{ МПа}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \xi \sigma_{33}, \quad \xi = 0,42, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad e = 0,85. \quad (11)$$

Нагружение будем проводить по следующей программе. Зададим определенное значение секториальной скорости Ω (для численного расчета это значение определяет величину шага интегрирования по времени и необязательно должно быть малым), отношение полуосей эллипса положим равным $a/b = 1,1$. Зафиксируем некоторую точку эллиптической границы, и в качестве параметра нагружения выберем угол γ , на который поворачивается эта материальная точка вокруг центра эллипса при деформировании (см. рис. 1). В начальном состоянии положим $\gamma = 0$ и будем увеличивать γ до некоторого фиксированного значения, например $\gamma = 10\pi$.

В этой схеме, как и в экспериментах, материал при деформировании дилатирует (в данном случае уплотняется). С течением времени этот процесс стабилизируется и выходит на стационарный режим. В этом режиме значения всех параметров при дальнейшем деформировании не меняются. График зависимости деформации ϵ_{33} от угла γ показан на рис. 4. В точках O и A пористость равна $e = 0,85$ и $e = 0,81681$ соответственно. Напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} в зависимости от угла γ с течением времени также стабилизируются. Расчеты по описанной схеме нагружения хорошо соответствуют результатам лабораторных экспериментов [8]. Следует отметить, что в экспериментах [8] для стабилизации процесса деформирования требовалось около 8–10 оборотов нагружающих пластин, т. е. $\gamma \sim 16\pi \div 20\pi$. Для модели [15] стабилизация наступает существенно быстрее, практически за один оборот ($\gamma \sim 2\pi$).

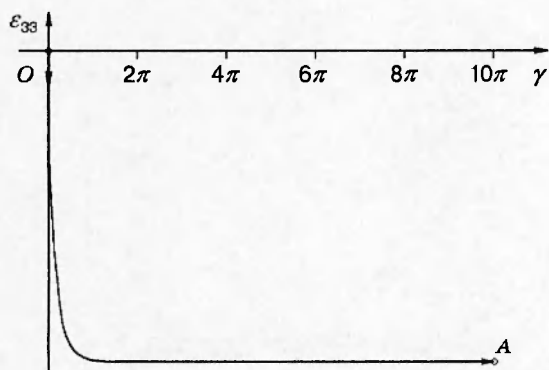


Рис. 4

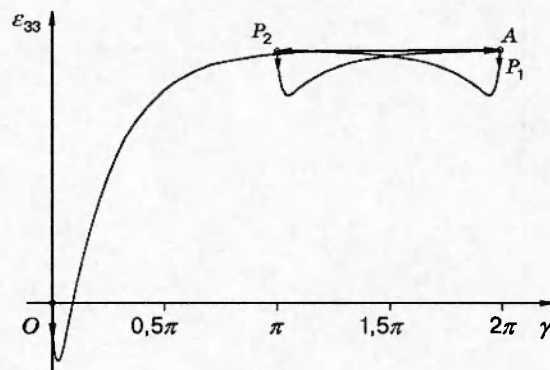


Рис. 5

При описании сложного нагружения один из основных вопросов состоит в выборе уравнения соосности или разосности главных осей напряжений. В экспериментах [8] получено, что главные оси тензора напряжений в плоскости Ox_1x_2 совпадают с осями эллипса. Наибольшее сжимающее напряжение направлено вдоль малой оси эллипса, а наименьшее — вдоль большой. Иными словами, в сыпучей среде выполняется условие соосности тензоров напряжений и деформаций. Для вязких жидкостей, напротив, тензор напряжений соосен тензору скоростей деформаций. Поэтому главные оси напряжений отклоняются от большой оси эллипса на угол $\pm 45^\circ$ [8], что подтверждает прямой эксперимент по описанной выше методике. Численный эксперимент для модели (3)–(5) приводит к отклонению главного напряжения σ_1 от большой оси эллипса на угол $-43,85^\circ$.

Изменим теперь схему нагружения и рассмотрим ситуации, когда направление вращения нагружающих пластин 5 (см. рис. 2) может меняться. Возьмем все начальные значения параметров задачи в виде (11), за исключением пористости e . Положим $e = 0,8$ и проведем численный эксперимент по следующей схеме нагружения: сначала будем увеличивать угол γ от 0 до 2π , затем сменим направление вращения (Ω на $-\Omega$) и будем уменьшать угол γ от 2π до π , после чего вновь сменим направление вращения и проведем нагружение от $\gamma = \pi$ до $\gamma = 2\pi$. Расчеты показывают следующее. Уменьшение начальной пористости приводит к тому, что в целом материал разрыхляется (рис. 5, здесь и на рис. 6 кривая нагружения OP_1P_2A). Смена направления нагружения ведет сначала к резкому уплотнению материала с последующим разрыхлением и стабилизацией. Этот результат хорошо согласуется с экспериментами [8], из которых следует, что при циклической смене направления нагрузки на малых амплитудах угла γ можно достичь очень высокой плотности материала. Анализ напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} показывает, что смена направления нагружения приводит к резкому скачку напряжений, но после этого процесс деформирования достаточно быстро стабилизируется.

Из экспериментов [8] следует, что дилатансия зависит от величины пригрузки на поверхности сыпучей среды. Если материал на поверхности пригрузить (конструкция прибора это позволяет), то после выхода на стационарный режим деформирования упаковка частиц будет плотнее, чем без пригрузки. В численном расчете пригрузку можно промоделировать следующим образом. Пусть начальное напряжение σ_{33} в два раза больше, чем в предыдущих расчетах, т. е. $\sigma_{33} = 0,0075$ МПа, начальная пористость $e = 0,8$, остальные параметры возьмем из (11). Расчеты показали, что стабилизация процесса деформирования действительно происходит при большей плотности среды (на рис. 6 пористость в точке A равна $e = 0,78365$), чем в расчете без пригрузки (на рис. 5 пористость в точке A составляет $e = 0,81678$).

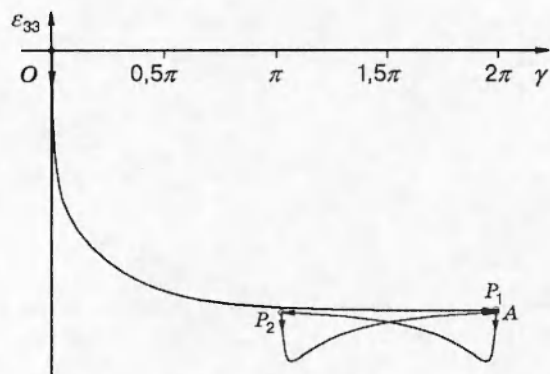


Рис. 6

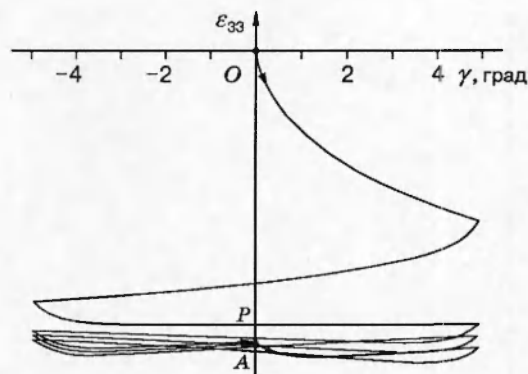


Рис. 7

Таким образом, по результатам сравнения численных и лабораторных экспериментов при сложном нагружении сыпучей среды с непрерывным поворотом главных осей напряжений можно сделать следующий вывод. Модель (3)–(5) позволяет делать качественный прогноз поведения дилатансии и дает удовлетворительное приближение по уровню напряженного состояния сыпучих сред при сложном нагружении. Степень соосности тензоров напряжений и деформаций в предложенной модели и модели вязкой жидкости одинакова.

Проанализируем результаты расчетов сложного нагружения с изломами траектории нагружения. Возьмем следующее начальное состояние среды:

$$\sigma_{33} = 0,0075 \text{ МПа}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \xi \sigma_{33}, \quad \xi = 0,42, \quad e = 0,85.$$

В качестве параметра нагружения примем величину угла сдвига камеры γ (см. рис. 3). Программа нагружения следующая. Вначале осуществляется циклический сдвиг материала с амплитудой $\gamma_{\max} = 5^\circ$, т. е. сдвиг в одном направлении (параметр $\delta = k_0 > 0$) до значения угла $\gamma = \gamma_{\max}$, затем в противоположном направлении ($\delta = -k_0 < 0$) до угла $\gamma = -\gamma_{\max}$ и т. д. Здесь поле скоростей имеет вид (9). После некоторого числа циклов в момент $\gamma = 0$ (см. рис. 3, б) осуществляется излом траектории на угол α . Поле скоростей при этом принимает вид (10). После этого продолжается циклическое нагружение сдвигом по описанной выше схеме. Расчеты проводились для углов $\alpha = 30; 60; 90^\circ$.

Результаты расчетов показывают, что процесс деформирования при циклическом сдвиге до излома траектории стремится к стационарному режиму, когда все параметры не меняются от цикла к циклу, а зависят только от фазы (значения угла γ) внутри цикла. Однако в точке излома траектории стационарный режим нарушается. Здесь наблюдается резкое уплотнение материала. График деформации ε_{33} в зависимости от γ для $\alpha = 90^\circ$ показан на рис. 7. После излома траектории для стабилизации процесса деформирования вновь требуется определенное число циклов. Этот результат полностью соответствует данным лабораторных экспериментов [9].

Рассмотрим вопрос о соосности тензоров напряжений и деформаций. В работах [5, 6] экспериментально показано, что при чистом сдвиге в сыпучей среде выполняется условие соосности главных осей тензора напряжений и тензора деформаций. Излом траектории нагружения, как и следовало ожидать, приводит к нарушению этого условия. Здесь наблюдается разность направлений главных напряжений и деформаций на определенный угол. Обозначим угол разности через β . В экспериментах показано, что в точке излома траектории на углах $10^\circ < \alpha < 80^\circ$ угол разности β слабо зависит от α и составляет в среднем $\beta \approx 7,5^\circ$. При $\alpha \rightarrow 0$ или $\alpha \rightarrow 90^\circ$ соосность сохраняется, так как при этом ориентация главных осей деформаций не изменяется, а могут меняться только направления минимального и максимального сжатия (в случае $\alpha = 90^\circ$). Последующее циклическое

нагружение сдвигом приводит к постепенному уменьшению угла β , так что в результате угол разности $\beta \rightarrow 0$. Другими словами, происходит «стирание» памяти материала об изломе траектории нагружения.

Расчеты для модели (3)–(5) качественно соответствуют результатам данных экспериментов. Расчетный угол разности β тензоров напряжений и деформаций в момент излома траектории составил: $\beta = 15,64^\circ$ при $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 28,73^\circ$ при $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 0$ при $\alpha = 90^\circ$. Последующее деформирование сдвигом также приводит к тому, что угол $\beta \rightarrow 0$.

Выводы. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Методика и эксперименты [5–9] по простому и сложному нагружению неупругих материалов могут играть роль базисных для анализа существующих и построения новых математических моделей сплошных сред.

Гипопластическая модель сыпучей среды [15] дает хорошее качественное приближение к реальному деформированию, прогнозирует ряд свойств материала при различных путях нагружения и может быть использована для решения краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков А. М., Работнов Ю. Н. Исследование пластической деформации стали при сложном нагружении // Инж. тр. 1954. № 18. С. 27–32.
2. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Соппротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959.
3. Ревуженко А. Ф. О самых простых течениях сплошной среды // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 1. С. 54–58.
4. Revuzhenko A. Ph. Experimental detection of constitutive behaviour and self-organization // Modern approaches to plasticity / Ed. by D. Kolymbas. Amsterdam a.o.: Elsevier, 1993. P. 727–735.
5. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. В., Шемякин Е. И. О механизме деформирования сыпучей среды при больших сдвигах // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1974. № 3. С. 130–133.
6. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф. Однородный сдвиг сыпучей среды. Дилатансия // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1982. № 5. С. 2–29.
7. Ревуженко А. Ф. Один класс сложных нагружений неупругой среды // ПМТФ. 1986. № 5. С. 150–158.
8. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф. Об одном методе испытаний неупругих материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 4. С. 178–182.
9. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф. Сложное нагружение сыпучих материалов с изломами траекторий. Методика и экспериментальные разработки // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1994. № 5. С. 48–56.
10. Колимбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Однородное деформирование сыпучей среды. Теория и эксперимент // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 114–121.
11. Kolymbas D., Lavrikov S. V., Revuzhenko A. Ph. Complex loading of granular media with broken trajectories of deformation: theory and experiments // Kormoran: Proc. of the 1st Intern. workshop on homogeneization, theory of migration and granular bodies, Gdansk, 14–17 May, 1995. Gdansk, 1995. P. 151–155.
12. Kolymbas D. Generalization hypoplastic constitutive equation // Proc. of the Constitutive equations for granular noncohesive soils. 1989. P. 349–366.
13. Kolymbas D., Wu W. Introduction to hypoplasticity // Modern approaches to plasticity / Ed. by D. Kolymbas. Amsterdam a. o.: Elsevier, 1993. P. 213–223.
14. Bauer E., Wu W. A hypoplastic model for granular soils under cyclic loading // Ibid. P. 247–258.

15. Kolymbas D., Herle I., Wolffersdorff P. A. von. Hypoplastic constitutive equation with internal variables // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1995. V. 19. P. 415–436.
16. Бобряков А. П., Косых В. П. Новая аппаратура для измерения напряжений в сыпучих материалах // Тез. докл. V Всесоюз. науч. конф. «Механика сыпучих материалов». Одесса, 1991. С. 16, 17.
17. А. с. 1485046 СССР, МКИ G01L7/02. Датчик для измерения касательных напряжений / А. П. Бобряков, А. Ф. Ревуженко, В. П. Косых. № 4333405/24-10; Заявл. 26.10.87; Опубл. 7.06.89, Бюл. № 21.

Поступила в редакцию 4/III 1998 г.
