УДК 532.592

СДВИГОВЫЕ СОПРЯЖЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЛАБОСТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

А. Ю. Казаков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: alexey.yu.kazakov@gmail.com

Рассматривается задача о пáрах горизонтальных сдвиговых течений слабостратифицированной жидкости, обладающих одинаковыми потоками массы, импульса и энергии. Методами теории ветвления исходная задача редуцируется к системе двух скалярных уравнений для параметров основного и возмущенного течений. Исследуются условия существования нетривиальных ветвей сопряженных течений, близких к основному потоку.

Ключевые слова: законы сохранения, внутренние волны, стратифицированная жидкость, сопряженные течения, ветвление решений дифференциальных уравнений.

Введение. Задача описания пар сдвиговых течений с одинаковыми потоками массы, импульса и энергии возникает при исследовании двумерных стационарных волн в стратифицированной жидкости. Следуя [1], пары таких горизонтальных течений называют сопряженными. В частности, горизонтальное течение перед фронтом волны типа плавного бора является сопряженным с течением, реализующимся за фронтом волны [2, 3]. Также сопряженными оказываются пары течений, возникающих перед фронтом внутренней уединенной волны типа плато и в ее срединной части [4, 5].

Аналитические условия существования сопряженных течений в непрерывно стратифицированной жидкости получены в работах [3, 6], где задача о сопряженных течениях сводилась к двумерной системе уравнений разветвления с помощью схемы Ляпунова — Шмидта. В результате анализа этой системы выведены достаточные условия существования локально-единственной ветви течений, сопряженных с равномерным потоком, и построены примеры неединственности решений. Неединственность отмечалась также в работе [4], в которой течения, сопряженные с равномерным потоком стратифицированной жидкости, исследовались численно.

В настоящей работе с использованием подхода, предложенного в [6], уточняются и обобщаются полученные в этой работе условия существования решений. В частности, более детальное изучение локальных свойств решения, существование которого установлено в [6], приводит к необходимости формулировки альтернативных условий существования нетривиального решения задачи. Кроме того, в данной работе исследование проводится для сдвигового основного потока, что позволяет обобщить существующие результаты.

1. Постановка задачи. Плоское стационарное течение неоднородной несжимаемой жидкости в слое $\{-\infty < x < \infty,\ 0 < y < h\}$, заключенном между ровным дном ($y = 0$) и жесткой крышкой ($y = h$), описывается системой уравнений Эйлера

$$\begin{gathered} \rho(UU_x + VU_y) + p_x = 0, \qquad \rho(UV_x + VV_y) + p_y = -\rho g, \\ U_x + V_y = 0, \qquad U\rho_x + V\rho_y = 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-5245.2006.1) и гранта INTAS — СО РАН (№ 06-1000013-9236).

с граничными условиями непротекания $V = 0$ $(y = 0, y = h)$. Здесь ρ — плотность; (U, V) — вектор скорости; p — давление; g — ускорение свободного падения. Сохранение плотности вдоль линий тока обеспечивает наличие функциональной зависимости плотности ρ от функции тока ψ. С учетом этого после исключения давления с помощью интеграла Бернулли

$$\rho|\nabla\psi|^2/2 + \rho g y + p = B(\psi) \tag{1.2}$$

система уравнений (1.1) сводится к одному квазилинейному эллиптическому уравнению второго порядка (уравнению Дюбрей-Жакотэн — Лонга [7])

$$\rho(\psi)\Delta\psi + \rho_\psi(\psi)((\nabla\psi)^2/2 + gy) = B_\psi(\psi). \tag{1.3}$$

Здесь $B(\psi)$ — функция Бернулли; нижний индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной.

Будем предполагать, что профиль плотности $\rho = \rho_0(y/h, \sigma)$ и функция тока сдвигового течения $\psi = \psi_0(y/h)$ известны:

$$\rho_0(Y, \sigma) = \rho_*(1 + \sigma\rho_1(Y) + \sigma^2\rho_2(Y, \sigma)), \qquad \psi_0(Y) = ch\psi_1(Y). \tag{1.4}$$

Здесь ρ_* — характерный масштаб плотности; σ — малый параметр Буссинеска, связанный с характерной частотой плавучести N_0 соотношением $\sigma = N_0^2 h/g$. Безразмерные функции ρ_1, ρ_2 задают фоновый профиль плотности и тонкую структуру стратификации соответственно [8]. В свою очередь, функция тока ψ_0 характеризуется скоростью c основного течения при $y = 0$ и безразмерной функцией ψ_1. Поток, заданный соотношениями (1.4), будем называть основным.

Далее предполагается, что функции $\rho_1(Y) \in C^4[0,1]$, $\rho_2(Y,\sigma) \in C^4([0,1] \times [0,\sigma_0])$ и $\psi_1(Y) \in C^4[0,1]$ всюду в области их определения удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\rho_0 > 0, \qquad \rho_{0Y} < 0, \qquad \rho_{1Y} < 0, \qquad \psi_{1Y} \neq 0. \tag{1.5}$$

Условия, налагаемые на плотность, гарантируют устойчивость стратификации, а условие, налагаемое на функцию тока, — отсутствие возвратных течений в основном потоке (последнее требование обеспечивает обратимость функции ψ_0). Условия (1.5) позволяют определить вид функций $\rho(\psi)$ и $B_\psi(\psi)$, входящих в уравнение (1.3). Действительно, обращение зависимости $\psi = \psi_0(y)$ задает связь $y = y_0(\psi)$ между значениями функции тока и переменной y в основном течении, что позволяет определить зависимость плотности от функции тока и (в силу уравнения (1.3)) вид функции $B_\psi(\psi)$:

$$\rho(\psi) = \rho_0(y_0), \qquad B_\psi(\psi) = \rho(\psi)\psi_{0yy}(y_0) + \rho_\psi(\psi)(\psi_{0y}^2(y_0)/2 + gy_0). \tag{1.6}$$

Здесь аргумент ψ функции $y_0(\psi)$ для краткости опущен.

Совпадение распределений плотности жидкости и функции Бернулли по линиям тока в основном и сопряженном течениях обеспечивает совпадение потоков массы и энергии этих течений. Из равенства потоков импульса следует дополнительное соотношение, которое необходимо учитывать при изучении сопряженных течений, возникающих в стационарных волновых конфигурациях типа уединенной волны или плавного бора [3, 4]. Поток импульса $F_{imp}(\psi)$ для плоского течения жидкости с горизонтальными линиями тока, задаваемого функцией тока $\psi(y)$, можно представить следующим образом:

$$F_{imp}(\psi) = \int\limits_0^h (\rho(\psi)\psi_y^2 + p)\,dy.$$

Исключив давление p в силу (1.2), разность потоков импульса в основном и сопряженном течениях можно записать в виде

$$\int_0^h \Big(\frac{\rho(\psi)\psi_y^2}{2} - gy\rho(\psi) + B(\psi)\Big)dy - \int_0^h \Big(\frac{\rho_0(y)\psi_{0y}^2}{2} - gy\rho_0(y) + B(\psi_0)\Big)dy = 0. \qquad (1.7)$$

Таким образом, сопряженное течение описывается системой уравнений, включающей одномерный вариант уравнения Дюбрей-Жакотэн — Лонга (1.3) с функцией $B_\psi(\psi)$, задаваемой формулой (1.6), и интегральное соотношение (1.7).

Перейдем к безразмерным переменным, считая величину h характерным масштабом для переменной y и функции y_0, величину ch — масштабом для функций тока ψ и ψ_0, величину ρ_* — масштабом плотности и величину $\rho_* c^2$ — масштабом функции Бернулли B. Сохраняя прежние обозначения для всех безразмерных величин, получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\rho(\psi)(\psi_{yy} - \psi_{0yy}(y_0)) + \rho_\psi(\psi)((\psi_y^2 - \psi_{0y}^2(y_0))/2 + \lambda\sigma^{-1}(y - y_0)) = 0 \qquad (1.8)$$

на промежутке $y \in (0,1)$ с граничными условиями $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = Q$ ($Q = \psi_0(1)$ — величина потока жидкости в основном течении) и дополнительным интегральным условием

$$\int_0^1 \Big(\frac{\rho(\psi)\psi_y^2}{2} - \lambda\sigma^{-1}y\rho(\psi) + B(\psi)\Big)dy - \int_0^1 \Big(\frac{\rho_0(y)\psi_{0y}^2}{2} - \lambda\sigma^{-1}y\rho_0(y) + B(\psi_0)\Big)dy = 0, \quad (1.9)$$

где $\lambda = \sigma g h/c^2$ — денсиметрическое (плотностное) число Фруда.

Уравнения (1.8), (1.9) содержат нелинейность общего вида, определяемую функциями $\rho(\psi)$ и $y_0(\psi)$. С целью упрощения дальнейших рассуждений перейдем к полулагранжевым переменным $(\psi, y(\psi))$, тем самым получая уравнения с дробно-рациональной нелинейностью. Такая замена возможна в силу постулируемого отсутствия возвратных течений. При этом преобразованные уравнения будут рассматриваться на отрезке $\psi \in [0, Q]$. С учетом соотношений $\psi_y = 1/y_\psi$, $\psi_{yy} = -y_{\psi\psi}/y_\psi^3$ уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$\Big(\rho\,\frac{y_{0\psi}^2 - y_\psi^2}{2y_\psi^2 y_{0\psi}^2}\Big)_\psi + \lambda(y - y_0)\tilde\rho_\psi = 0,$$

где $\tilde\rho(\psi) = \sigma^{-1}\rho(\psi)$; аргумент ψ функций $\rho(\psi)$ и $\tilde\rho(\psi)$ для краткости опущен. Для преобразования интеграла потока импульса (1.9) выполним замену переменных $y = y(\psi)$ в первом слагаемом и $y = y_0(\psi)$ во втором. В результате интегральное соотношение преобразуется в соотношение вида

$$\int_0^Q \Big(\rho\,\frac{y_{0\psi} - y_\psi}{2y_\psi y_{0\psi}} - \lambda(yy_\psi - y_0y_{0\psi})\tilde\rho + B(\psi)(y_\psi - y_{0\psi})\Big)d\psi = 0. \qquad (1.10)$$

Решение сформулированной задачи будем искать в окрестности основного течения, заданного известной функцией $y_0(\psi)$:

$$y(\psi) = y_0(\psi) + w(\psi).$$

В результате имеем следующую систему уравнений для возмущения $w(\psi)$:

$$F(w;\lambda,\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} -\Big(\frac{\rho w_\psi}{y_{0\psi}^3}\Big)_\psi + \lambda\tilde\rho_\psi w + \Big(\rho\,\frac{3y_{0\psi}w_\psi^2 + 2w_\psi^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi} + w_\psi)^2}\Big)_\psi = 0; \qquad (1.11)$$

$$w(0) = w(Q) = 0; \tag{1.12}$$

$$\int\limits_0^Q \Big(\frac{\rho w_\psi^2}{2y_{0\psi}^2(y_{0\psi} + w_\psi)} + \frac{\lambda}{2}\tilde{\rho}_\psi w^2\Big) d\psi = 0. \tag{1.13}$$

Интегральное соотношение (1.10) в окончательной форме (1.13) получено с помощью интегрирования по частям в слагаемом, содержащем $B(\psi)$, с учетом граничных условий (1.12) и с использованием выражения (1.6) для производной $B_\psi(\psi)$ функции Бернулли.

2. Задача ветвления. Нетрудно заметить, что решение $w(\psi) \equiv 0$ удовлетворяет системе соотношений (1.11)–(1.13) при любых λ и σ. Таким образом, задачу о сопряженных течениях можно рассматривать как задачу ветвления тривиального решения уравнений (1.11), (1.12) с дополнительным интегральным соотношением (1.13). Используя схему Ляпунова — Шмидта (см., например, [9]), позволяющую описать поведение решений в окрестности точек бифуркации, определим следующие функциональные пространства:

$$\mathbb{E} = \{v \in C^2[0, Q]\colon v(0) = v(Q) = 0\}, \qquad \mathbb{F} = C[0, Q].$$

Нелинейный дифференциальный оператор уравнения (1.11) будем рассматривать как отображение $F(w(\psi); \lambda, \sigma)\colon \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{F}$. Будем искать сопряженные течения, близкие к основному потоку. Тогда условие малости возмущения w позволяет использовать ряд свойств линейной части оператора задачи (1.11):

$$L(\lambda, \sigma)\langle w\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -(\rho w_\psi / y_{0\psi}^3)_\psi + \lambda \tilde{\rho}_\psi w.$$

Напомним, что в исходной задаче имеется естественный малый параметр слабой стратификации $\sigma > 0$. Поэтому рассмотрим точки бифуркации для предельного уравнения (1.11) при $\sigma = 0$. Для указанного уравнения такими точками могут являться только собственные значения λ_n задачи Штурма — Лиувилля

$$-(\varphi_\psi / y_{0\psi}^3)_\psi + \lambda \rho_{1\psi}\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(Q) = 0, \tag{2.1}$$

где функция $\rho_1 = \rho_1(y_0(\psi))$ определена в (1.4). При выполнении условий (1.5) данная задача имеет счетное семейство однократных вещественных собственных значений $\{\lambda_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ (пронумерованных в порядке возрастания) и семейство соответствующих им собственных функций $\{\varphi_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ [7].

Зафиксируем минимальное собственное значение λ_0 и соответствующую ему собственную функцию $\varphi_0(\psi) \in \mathbb{E}$, нормированную в $L_2[0, Q]$. Представим пространство $\mathbb{E}$ в виде прямой суммы подпространств $\mathbb{E} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$ с проектором $P\colon \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$, задаваемым формулой

$$P\langle v\rangle = \varphi_0 \int\limits_0^Q \varphi_0(\psi) v(\psi)\, d\psi. \tag{2.2}$$

Учитывая самосопряженность оператора $L(\lambda_0, 0)$, можно заключить, что неоднородная задача

$$L(\lambda_0, 0)\langle w\rangle = f, \qquad f \in \mathbb{F}$$

имеет единственное условие разрешимости вида $H\langle f\rangle = 0$ с проектором H на дефектное подпространство, определяемым той же формулой (2.2). Аналогично пространство $\mathbb{F}$ представим в виде $\mathbb{F} = \ker H \oplus \operatorname{im} H$. Отметим, что собственные функции φ_n образуют базис в $L_2[0, Q]$, ортогональный относительно скалярного произведения с весом $\rho_{1\psi}$.

Уравнение (1.11) запишем в виде

$$L(\lambda_0, 0)\langle w\rangle = R(w; \lambda, \sigma), \tag{2.3}$$

где $R(w; \lambda, \sigma) = L(\lambda_0, 0)\langle w\rangle - F(w, \lambda, \sigma)$. Оператор $R(w; \lambda, \sigma)$ является малым не ниже второго порядка по совокупности переменных w, $\lambda - \lambda_0$ и σ. Действительно, в главном порядке в выражении для $R(w; \lambda, \sigma)$ будут содержаться только произведения вида $\sigma w_{\psi\psi}$, σw_ψ, $(\lambda - \lambda_0)w$, w_ψ^2 и $w_{\psi\psi}w_\psi$, что следует из вида левой части (1.11) и представления для $L(\lambda, \sigma)\langle\,\cdot\,\rangle$ при $\lambda = \lambda_0$, $\sigma = 0$.

Следуя стандартной схеме Ляпунова — Шмидта, решение рассматриваемой задачи будем искать в виде

$$w = b\varphi_0 + u, \tag{2.4}$$

где $b \in \mathbb{R}$ — амплитудный параметр; функция $u \in \ker P$ удовлетворяет условию $P\langle u\rangle = 0$. С учетом разложения пространства $\mathbb{F}$, порождаемого проектором H, уравнение (2.3) может быть записано в проекциях на подпространства $\ker H$ и $\operatorname{im} H$:

$$L(\lambda_0, 0)\langle u\rangle = (I - H)\langle R(b\varphi_0 + u; \lambda, \sigma)\rangle; \tag{2.5}$$

$$0 = H\langle R(b\varphi_0 + u; \lambda, \sigma)\rangle. \tag{2.6}$$

Утверждение 1. *Существует гладкое отображение* $u(\lambda, \sigma, b) : \mathbb{R}^3 \mapsto \ker P$, *определенное в некоторой окрестности точки* $(\lambda_0, 0, 0)$ *и обращающее уравнение* (2.5) *в тождество, причем для всех* λ, σ *из области определения выполнено равенство* $u(\lambda, \sigma, 0) = 0$. *Кроме того,* $u(\lambda_0, 0, b) = O(b^2)\big|_{b\to 0}$.

Существование указанного отображения непосредственно следует из теоремы о неявных отображениях, примененной к уравнению (2.5), поскольку оператор L, рассматриваемый как отображение $L(\lambda_0, 0)\langle\cdot\rangle : \ker P \to \ker H$, является непрерывным обратимым оператором. Приведенные оценки порядка малости функции u получаются как следствие ограниченности оператора L^{-1} с учетом ограниченности проектора H и порядка малости остатка $R(b\varphi_0 + u; \lambda, \sigma)$.

В силу гладкости отображения $u(\lambda, \sigma, b)$ и его свойств, указанных в утверждении 1, существует гладкое отображение $\tilde{u}$, такое что

$$u(\lambda, \sigma, b) = b\tilde{u}(\lambda, \sigma, b). \tag{2.7}$$

С введенной таким образом функцией $\tilde{u}$ уравнение (2.6), записанное в виде

$$H\langle R(b\varphi_0 + b\tilde{u}(\lambda, \sigma, b); \lambda, \sigma)\rangle = 0, \tag{2.8}$$

представляет собой неявно заданное скалярное уравнение разветвления относительно трех параметров λ, σ, b. Это уравнение описывает поведение всех ветвей решения уравнений (1.11), (1.12) в окрестности точки бифуркации: любому малому решению уравнения (2.8) вида $\lambda(\sigma, b)$ может быть сопоставлено малое решение уравнений (1.11), (1.12) $w = b\varphi_0 + u(\lambda(\sigma, b), \sigma, b)$.

3. Анализ скалярной системы уравнений. Для описания малых сопряженных течений остается учесть условие совпадения потоков горизонтального импульса (1.13). Учитывая вид решения (2.4) и свойство малости функции u в (2.7) и подставляя (2.4) в (1.11), (1.13), получаем следующую вещественную систему уравнений, описывающую сопряженные течения, близкие к основному потоку:

$$bf(\lambda, \sigma, b) = 0, \qquad b^2 l(\lambda, \sigma, b) = 0. \tag{3.1}$$

Здесь

$$f(\lambda,\sigma,b)=\int\limits_0^Q \varphi_0\Big[-\Big(\frac{\rho(\varphi_{0\psi}+\tilde u_\psi)}{y_{0\psi}^3}\Big)_\psi+\lambda\tilde\rho_\psi(\varphi_0+\tilde u)+ \\ +\Big(\rho\,\frac{3by_{0\psi}(\varphi_{0\psi}+\tilde u_\psi)^2+2b^2(\varphi_{0\psi}+\tilde u_\psi)^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi}+b\varphi_{0\psi}+b\tilde u_\psi)^2}\Big)_\psi\Big]\,d\psi; \qquad (3.2)$$

$$l(\lambda,\sigma,b)=\int\limits_0^Q\Big(\frac{\rho(\varphi_{0\psi}+\tilde u_\psi)^2}{2y_{0\psi}^2(y_{0\psi}+b\varphi_{0\psi}+b\tilde u_\psi)}+\frac{\lambda}{2}\,\tilde\rho_\psi(\varphi_0+\tilde u)^2\Big)\,d\psi. \qquad (3.3)$$

Поскольку отыскивается нетривиальное сопряженное течение (т. е. $w\neq 0$), то, полагая $b\neq 0$, можно перейти от системы уравнений (3.1) к системе

$$f(\lambda,\sigma,b)=0,\qquad l(\lambda,\sigma,b)=0, \qquad (3.4)$$

что соответствует отделению тривиальной ветви решения. Малым решением полученной системы (3.4) будем называть пару гладких функций $(b(\sigma),\lambda(\sigma))$, обращающих оба уравнения системы (3.4) в тождество в некоторой окрестности нуля, таких что $b(0)=0$ и $\lambda(0)=\lambda_0$. Далее исследуются условия, при которых система (3.4) допускает малые решения.

Утверждение 2. *Система уравнений* (3.4) *имеет малое решение вида*

$$b\equiv 0,\qquad \lambda=\tilde\lambda(\sigma) \qquad (3.5)$$

с некоторой гладкой функций $\tilde\lambda(\sigma)$.

Доказательство. В первом уравнении в (3.4) положим $b=0$. Тогда с учетом соотношений (3.2), (3.3) получим

$$f(\lambda,\sigma,0)=\int\limits_0^Q \varphi_0 L(\lambda,\sigma)\langle\varphi_0+\tilde u\rangle\,d\psi. \qquad (3.6)$$

Выполняя интегрирование по частям в выражении (3.3) для l, при $b=0$ получаем

$$l(\lambda,\sigma,0)=\frac12\int\limits_0^Q(\varphi_0+\tilde u)\Big[-\Big(\frac{\rho(\varphi_{0\psi}+\tilde u_\psi)}{y_{0\psi}^3}\Big)_\psi+\lambda\tilde\rho_\psi(\varphi_0+\tilde u)\Big]\,d\psi= \\ =\frac12\int\limits_0^Q\varphi_0 L(\lambda,\sigma)\langle\varphi_0+\tilde u\rangle\,d\psi+\frac12\int\limits_0^Q\tilde u L(\lambda,\sigma)\langle\varphi_0+\tilde u\rangle\,d\psi.$$

Покажем, что последнее слагаемое в правой части равно нулю при любых λ,σ. Соотношение (2.5), записанное в эквивалентной форме

$$(I-H)\langle F(b\varphi_0+b\tilde u(\lambda,\sigma,b);\lambda,\sigma)\rangle=0,$$

представляет собой тождество в некоторой окрестности точки $(\lambda_0,0,0)$. Дифференцируя это тождество по переменной b в точке $b=0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial b}\,\big[(I-H)\langle F(b\varphi_0+b\tilde u(\lambda,\sigma,b);\lambda,\sigma)\rangle\big]\big|_{b=0}=(I-H)\langle L(\lambda,\sigma)\langle\varphi_0+\tilde u\rangle\rangle=0.$$

Последнее равенство означает, что $L(\lambda,\sigma)\langle\varphi_0+\tilde u\rangle\in\ker(I-H)$, т. е. $L(\lambda,\sigma)\langle\varphi_0+\tilde u\rangle=c\varphi(\psi)$, где c зависит только от параметров λ,σ. С учетом того, что $\tilde u\in\ker H$, получаем

$$\int\limits_0^Q \tilde u L(\lambda,\sigma)\langle\varphi_0+\tilde u\rangle\,d\psi = c(\lambda,\sigma)\int\limits_0^Q \tilde u\varphi_0\,d\psi = 0.$$

Следовательно, для любых значений параметров λ,σ в некоторой окрестности точки $(\lambda_0,0)$ выполнено соотношение

$$l(\lambda,\sigma,0)=f(\lambda,\sigma,0)/2. \tag{3.7}$$

Поскольку при $b=0$ уравнения (3.4) являются линейно зависимыми, для завершения доказательства остается показать, что существует гладкая функция $\lambda(\sigma)$, обращающая уравнение $f(\lambda,\sigma,0)=0$ в тождество. Для этого используем теорему о неявной функции. В силу соотношения (3.6) имеем $f(\lambda_0,0,0)=0$, поэтому остается лишь проверить, что производная $f_\lambda(\lambda_0,0,0)$ не обращается в нуль. С учетом ортогональности собственной функции φ_0 образу оператора $L(\lambda_0,0)$ и равенства $\tilde u(\lambda_0,0,0)=0$ при $b=0$ из (3.2) получаем

$$f_\lambda(\lambda_0,0,0)=\int\limits_0^Q \varphi_0\Big[-\Big(\frac{\tilde u_{\lambda\psi}}{y^3_{0\psi}}\Big)_\psi+\lambda_0\rho_{1\psi}\tilde u_\lambda+\rho_{1\psi}(\varphi_0+\tilde u)\Big]d\psi =$$

$$=\int\limits_0^Q \varphi_0\big(L(\lambda_0,0)\langle\tilde u_\lambda\rangle+\rho_{1\psi}\varphi_0\big)\,d\psi=\chi,$$

где

$$\chi\overset{\text{def}}{=}\int\limits_0^Q \rho_{1\psi}\varphi_0^2\,d\psi\neq 0 \tag{3.8}$$

в силу условия устойчивости стратификации (1.5).

Таким образом, система уравнений (3.4) допускает тривиальное решение при $b(\sigma)\equiv 0$ даже после отделения тривиальной ветви в (3.1). Следующее утверждение представляет собой условия, при которых система (3.4) обладает единственным малым решением.

Утверждение 3. *Если выполнено условие*

$$\mu\overset{\text{def}}{=}\int\limits_0^Q \frac{\varphi^3_{0\psi}}{y^4_{0\psi}}\,d\psi\neq 0, \tag{3.9}$$

то существует единственная пара гладких функций $\lambda(\sigma)$, $b(\sigma)$, *задающих малое решение системы уравнений* (3.4).

Доказательство. Для доказательства данного утверждения вновь используем теорему о неявной функции. Как отмечено при доказательстве утверждения 2, точка $(\lambda_0,0,0)$ удовлетворяет обоим уравнениям системы (3.4). Таким образом, локальная разрешимость этой системы уравнений характеризуется определителем матрицы

$$M=\begin{pmatrix} f_b(\lambda_0,0,0) & f_\lambda(\lambda_0,0,0)\\ l_b(\lambda_0,0,0) & l_\lambda(\lambda_0,0,0)\end{pmatrix}.$$

Производная $f_\lambda(\lambda_0,0,0)$ уже вычислена при доказательстве утверждения 2, а выражение для производной $l_\lambda(\lambda_0,0,0)$ получается из соотношения (3.7):

$$f_\lambda(\lambda_0,0,0)=\chi,\qquad l_\lambda(\lambda_0,0,0)=\chi/2.$$

Производные функций по параметру b можно получить непосредственно: в силу соотношений (3.2), учитывая, что $\tilde{u}(\lambda_0, 0, 0) = 0$, и применяя интегрирование по частям во втором слагаемом, имеем

$$f_b(\lambda_0, 0, 0) = \int\limits_0^Q \varphi_0 \Big[L(\lambda_0, 0)\langle \tilde{u}_b \rangle + \frac{\partial}{\partial b}\Big(\frac{3by_{0\psi}(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^2 + 2b^2(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi} + b\varphi_{0\psi} + b\tilde{u}_\psi)^2}\Big)_\psi\Big] d\psi = -\frac{3}{2}\int\limits_0^Q \frac{\varphi_{0\psi}^3}{y_{0\psi}^4}\, d\psi.$$

Аналогично для производной функций $l(\lambda, \sigma, b)$ по переменной b из (3.3) находим

$$l_b(\lambda_0, 0, 0) = \int\limits_0^Q \Big(\frac{\varphi_{0\psi}\tilde{u}_{b\psi}}{y_{0\psi}^3} + \lambda_0\rho_{1\psi}\varphi_0\tilde{u}_b - \frac{\varphi_{0\psi}^3}{2y_{0\psi}^4}\Big)\, d\psi = \int\limits_0^Q \Big(\varphi_0 L(\lambda_0, 0)\langle \tilde{u}_b \rangle - \frac{\varphi_{0\psi}^3}{2y_{0\psi}^4}\Big)\, d\psi = -\frac{1}{2}\int\limits_0^Q \frac{\varphi_{0\psi}^3}{y_{0\psi}^4}\, d\psi.$$

Отсюда получаем следующее выражение для определителя матрицы M:

$$\det M = -\mu\chi/4$$

(χ и μ определены формулами (3.8) и (3.9) соответственно). Как отмечено выше, $\chi \neq 0$, поэтому условие (3.9) обеспечивает существование единственного малого решения системы (3.4).

Таким образом, при обязательном наличии тривиальной ветви решений (3.5) утверждение 3 устанавливает единственность этой ветви в случае, когда определитель матрицы M отличен от нуля. На основе утверждений 1–3 можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4. *Условие*

$$\int\limits_0^Q \frac{\varphi_{0\psi}^3}{y_{0\psi}^4}\, d\psi = 0 \tag{3.10}$$

является необходимым для существования ветвей сопряженных течений, отличных от основного потока.

Для случая равномерного основного потока утверждение, эквивалентное утверждению 3, доказано в работе [6]. Однако в этой работе свойства ветви решения, выделяемой условием (3.9), не анализировались, поскольку основной целью являлось исследование неединственности решения. Таким образом, утверждение 4 существенно дополняет интерпретацию полученных в [6] условий существования малых сопряженных течений.

Отметим также, что в случае равномерного основного течения условие (3.10) может быть получено с помощью другой формы записи интеграла потока импульса, использовавшейся в работе [4] при численном решении задачи о сопряженных течениях.

4. Эквивалентная формулировка задачи в переменных Эйлера. Приведенные выше рассуждения можно использовать для решения задачи в исходных переменных $(\psi(y), y)$. В этом случае условие (3.10) записывается в более сложной форме

$$\int\limits_0^1 \Big[\frac{2\lambda_0}{(\psi_{0y})^{3/2}}\Big(\frac{\rho_{1y}}{(\psi_{0y})^{3/2}}\Big)_y + \frac{1}{\psi_{0y}}\Big(\frac{\psi_{0yyy}}{\psi_{0y}}\Big)_y\Big]\xi_0^3\, dy = 0. \tag{4.1}$$

Здесь ξ_0 — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, порождаемой при $\sigma = 0$ линейной частью оператора задачи (1.8):

$$\xi_{yy} - \Big(\lambda \frac{\rho_{1y}}{(\psi_{0y})^2} + \frac{\psi_{0yyy}}{\psi_{0y}}\Big)\xi = 0, \qquad \xi(0) = \xi(1) = 0. \tag{4.2}$$

Условия (3.10) и (4.1) оказываются эквивалентными, если рассматривать их как условия, налагаемые на параметры основного течения (1.4). Доказательство эквивалентности основывается на соотношении, связывающем собственные функции задач Штурма — Лиувилля (2.1) и (4.2):

$$\varphi_0(\psi) = -\xi_0(y_0(\psi))y_{0\psi}(\psi).$$

Фактически это соотношение означает, что собственная функция φ_0 есть образ собственной функции ξ_0, получающийся вследствие действия линейной части преобразования переменных $(\psi(y), y) \to (y(\psi), \psi)$. При этом собственные числа совпадают.

Условие (4.1) является более конструктивным в том смысле, что оно позволяет получать профили скорости и плотности, для которых это условие заведомо выполняется. В частности, решая систему дифференциальных уравнений

$$\psi_{0yyy} = C_1\psi_{0y}, \qquad \rho_{1y} = C_2(\psi_{0y})^{3/2} \qquad (C_{1,2} = \mathrm{const})$$

и подбирая остальные константы интегрирования таким образом, чтобы средний градиент плотности имел порядок σ, в качестве безразмерных параметров основного потока при $C_1 = 0$ получаем

$$\psi_0(y) = y + \frac{\gamma y^2}{2}, \qquad \rho_0(y) = 1 - \frac{(1+\gamma y)^{5/2} - 1}{(1+\gamma)^{5/2} - 1}\,\sigma + O(\sigma^2)$$

($\gamma = \mathrm{const} \geqslant 0$). Эти профили соответствуют линейному сдвигу скорости и согласованному с ним в смысле условия (4.1) распределению плотности.

Линейный сдвиг скорости является простейшим примером сдвигового течения и поэтому представляет особый интерес. Другой пример основного течения с линейным сдвигом рассматривается для профиля плотности, также близкого к линейному, т. е. для $\rho_1(y) = -y$. В этом случае собственные числа и собственные функции задачи (4.2) (или (2.1)) могут быть найдены в явном виде [10]:

$$\lambda_0 = \Big(\frac{\gamma\pi}{\ln(1+\gamma)}\Big)^2 + \frac{\gamma^2}{4}, \qquad \xi_0 = \sqrt{1+\gamma y}\,\sin\Big(\frac{\pi\ln(1+\gamma y)}{\ln(1+\gamma)}\Big).$$

Тогда условие (4.1) принимает вид

$$\frac{\alpha^3(1+\mathrm{e}^{-\pi/\alpha})}{(1+9\alpha^2)(1+\alpha^2)} = 0, \qquad \alpha = \frac{2\pi}{3\ln(1+\gamma)}.$$

Нетрудно показать, что данное условие выполняется только в пределе при $\gamma \to 0$, что соответствует отсутствию сдвига скорости. Случай равномерного основного течения проанализирован в работе [3]. В частности, установлено существование малой нетривиальной ветви сопряженных течений в случае линейной стратификации, с чем удовлетворительно согласуются результаты данной работы.

Заключение. В настоящей работе получены две эквивалентные формы условия, являющегося необходимым для существования малых гладких ветвей течений, сопряженных с заданным сдвиговым потоком. Данные условия позволяют априори выделить классы профилей плотности и скорости основного потока, от которых могут ответвляться волновые конфигурации в виде уединенной волны типа плато или плавного бора.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Benjamin T. B.** Internal waves of finite amplitude and permanent form // J. Fluid Mech. 1966. N 25. P. 241–270.
2. **Makarenko N. I.** Smooth bore in two-layer fluid // Intern. Ser. Numer. Math. 1992. V. 106. P. 195–204.
3. **Макаренко Н. И.** Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 69–78.
4. **Lamb K. G., Wan B.** Conjugate flows and flat solitary waves for a continuously stratified fluid // Phys. Fluids. 1998. V. 10, N 8. P. 2061–2079.
5. **Мальцева Ж. Л.** Об одном типе уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 55–61.
6. **Макаренко Н. И.** О неединственности сопряженных течений // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 68–74.
7. **Yih Chia-Shun.** Stratified flows. N. Y.: Acad. Press, 1980.
8. **Федоров К. Н.** Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1976.
9. **Вайнберг М. М.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. М.: Наука, 1969.
10. **Gear J. A., Grimshaw R.** A second-order theory for solitary waves in shallow fluids // Phys. Fluids. 1983. V. 26, N 1. P. 14–29.

Поступила в редакцию 19/X 2007 г.,
в окончательном варианте — 29/XII 2007 г.