УДК 533.6.011.51

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ОДНОЙ МОДЕЛИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

С. П. Баутин

Уральский государственный университет путей сообщения, 620034 Екатеринбург
E-mail: SBautin@math.usart.ru

Рассматривается модель Куропатенко многокомпонентной среды, каждый компонент которой является политропным газом. При этом предполагается, что при $x \to \pm\infty$ многокомпонентная среда находится в однородном состоянии с постоянными значениями газодинамических параметров — скорости, давления и температуры. Для течений, являющихся бегущими волнами, получены условия, аналогичные условиям Гюгонио, с помощью которых по заданным при $x \to +\infty$ параметрам течения и по скорости распространения бегущей волны однозначно определяются параметры течения при $x \to -\infty$.

Ключевые слова: многокомпонентная среда, бегущая волна, условия Гюгонио.

В работе [1] для описания течений многокомпонентных сред предложена математическая модель, которая представляет собой квазилинейную систему уравнений с частными производными, построенную на основе законов сохранения для смеси, полученных из законов сохранения для компонентов. При этом учитывалось как парное взаимодействие различных компонентов, так и кластерное взаимодействие компонентов с введенной виртуальной сплошной средой. Одним из преимуществ данной модели является ее замкнутость: система содержит одинаковое количество уравнений и искомых функций, и для ее замыкания не требуется дополнительных гипотез.

В настоящей работе рассматривается случай, когда каждый из N компонентов ($N \geqslant 2$) предложенной в [1] модели многокомпонентной среды представляет собой идеальный политропный газ с уравнениями состояния вида

$$P_i = (\gamma_i - 1) c_{vi}^0 \rho_i T_i, \qquad E_i = c_{vi}^0 T_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь P_i, ρ_i, T_i, E_i — давление, плотность, температура и внутренняя энергия i-го компонента соответственно; $\gamma_i = \text{const} > 1$, $c_{vi}^0 = \text{const} > 0$ — показатель политропы и удельная теплоемкость i-го компонента.

Для каждого компонента квадрат скорости звука c_i равен

$$c_i^2 = \gamma_i (\gamma_i - 1) c_{vi}^0 T_i.$$

Помимо указанных функций течения многокомпонентной среды характеризуются объемными концентрациями α_i и парциальными плотностями каждого компонента $\sigma_i = \alpha_i \rho_i$.

Рассмотрим случай плоскосимметричных течений

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00052).

когда вектор скорости каждого компонента параллелен оси Ox ($x = x_1$; x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты в физическом пространстве), т. е. задается скалярной величиной u_i.

Таким образом, искомыми являются зависящие от времени t и координаты x $4N$ функций: σ_i, u_i, T_i, α_i ($1 \leqslant i \leqslant N$), представляющие собой решения системы, состоящей из $4N$ уравнений [1] и записанной в безразмерных переменных:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + \frac{\partial\,(\sigma_i u_i)}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial\,(\sigma_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial\,(\sigma_i u_i^2)}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial f_{ksi}}{\partial x} - r_{si} = 0,\\
\frac{\partial\,(\sigma_i \varepsilon_i)}{\partial t} + \frac{\partial\,[(p_i + \sigma_i\varepsilon_i)u_i]}{\partial x} + \frac{\partial\,(f_{ksi}u_i)}{\partial x} + \frac{\partial q_{si}}{\partial x} - \varphi_{si} - A_{si} = 0,\\
p_i\Big(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + u_i\,\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}\Big) + \alpha_i(u - u_i)\,\frac{\partial p_i}{\partial x} - 2\alpha_i\,\frac{\partial q_{si}}{\partial x} = 0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь

$$
p_i = \alpha_i P_i \equiv (\gamma_i - 1)c_{vi}^0\sigma_i T_i, \qquad \varepsilon_i = E_i + 0{,}5u_i^2 \text{ —}
$$

парциальное давление и удельная полная энергия i-го компонента соответственно;

$$
f_{ksi} = -\frac{1}{2}\,\sigma_i(u - u_i)^2, \qquad r_{si} = \alpha_i\sum_{j=1}^N \alpha_j a_{ji}(u_j - u_i), \qquad q_{si} = \frac{1}{2}\,(p_i + \sigma_i E_i)(u - u_i),
$$

$$
\varphi_{si} = \alpha_i\sum_{j=1}^N \alpha_j[b_{ji}(P_j - P_i) + c_{ji}(T_j - T_i)], \qquad A_{si} = 0{,}5\alpha_i\sum_{j=1}^N \alpha_j a_{ji}(u_j^2 - u_i^2),
$$

$$
u = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^N \sigma_i u_i, \qquad \sigma = \sum_{i=1}^N \sigma_i \text{ —}
$$

виртуальные скорость и парциальная плотность соответственно;

$$
a_{ij} = a_{ji} > 0, \quad b_{ij} = b_{ji} > 0, \quad c_{ij} = c_{ji} > 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant j \leqslant N) \text{ —}
$$

постоянные обменные коэффициенты, причем $a_{ii} = b_{ii} = c_{ii} = 0$.

Замечание 1. При выводе рассматриваемой модели многокомпонентной среды в работе [1] постулируется выполнение равенства

$$
\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \tag{2}
$$

без непосредственного присоединения его к системе (1), поэтому для каждого построенного решения системы (1) необходимо дополнительно проверять справедливость равенства (2). В работе [2] это выполнено для равновесных по скоростям течений. В данной работе конкретные решения системы (1) не строятся, поэтому отсутствует необходимость проверять справедливость равенства (2).

Далее величины p_i, f_{ksi}, r_{si}, ε_i, q_{si}, φ_{si}, A_{si} из системы (1) представим через искомые функции σ_i, u_i, T_i, α_i, а для исследования свойств частных решений системы (1) — бегущих волн — введем независимые переменные τ, z:

$$
\tau = t, \qquad z = x - Dt, \qquad D = \mathrm{const}
$$

(D — скорость движения бегущей волны). Поскольку бегущая волна является функцией только z, будем полагать $\partial/\partial\tau = 0$. Тогда система (1) переходит в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-D\,\frac{\partial \sigma_i}{\partial z} + \frac{\partial\,(\sigma_i u_i)}{\partial z} = 0,$$

$$-D\,\frac{\partial\,(\sigma_i u_i)}{\partial z} + \frac{\partial\,(\sigma_i u_i^2)}{\partial z} + \frac{\partial\,[(\gamma_i-1)c_{vi}^0\sigma_i T_i]}{\partial z} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,[\sigma_i(u-u_i)^2]}{\partial z} - \alpha_i\sum_{j=1}^{N}\alpha_j a_{ji}(u_j-u_i) = 0, \tag{3}$$

$$-D\,\frac{\partial\,(c_{vi}^0\sigma_i T_i + 0{,}5\sigma_i u_i^2)}{\partial z} + \frac{\partial\,[(\gamma_i c_{vi}^0\sigma_i T_i + 0{,}5\sigma_i u_i^2)u_i]}{\partial z} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,[\sigma_i(u-u_i)^2 u_i]}{\partial z} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,[\gamma_i c_{vi}^0\sigma_i T_i(u-u_i)]}{\partial z} - \alpha_i\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\Big(b_{ji}(P_j-P_i) + c_{ji}(T_j-T_i) + \frac{1}{2}\,a_{ji}(u_j^2-u_i^2)\Big) = 0;$$

$$-D(\gamma_i-1)c_{vi}^0\sigma_i T_i\,\frac{\partial\alpha_i}{\partial z} + c_{vi}^0\alpha_i(u-u_i)T_i\Big(\gamma_i\,\frac{\sigma_i}{\sigma}-1\Big)\frac{\partial\sigma_i}{\partial z} + \gamma_i c_{vi}^0\alpha_i\sigma_i T_i\Big(1-\frac{\sigma_i}{\sigma}\Big)\frac{\partial u_i}{\partial z} - c_{vi}^0\alpha_i(u-u_i)\sigma_i\,\frac{\partial T_i}{\partial z} + (\gamma_i-1)c_{vi}^0\sigma_i T_i u_i\,\frac{\partial\alpha_i}{\partial z} + \gamma_i c_{vi}^0\,\frac{\alpha_i\sigma_i T_i}{\sigma}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(u-u_j)\,\frac{\partial\sigma_j}{\partial z} - \gamma_i c_{vi}^0\,\frac{\alpha_i\sigma_i T_i}{\sigma}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\sigma_j\,\frac{\partial u_j}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Замечание 2. Поскольку система (1) инвариантна относительно преобразования Галилея [1], решения системы (3), (4) фактически являются стационарными решениями системы (1) в соответствующей системе координат.

Для однокомпонентной среды в газовой динамике функциональные уравнения, связывающие значение скорости движения ударной волны (УВ) D и значения параметров газа $\boldsymbol{U}^0$, $\boldsymbol{U}^1$ по разные стороны от УВ, называются условиями Гюгонио [3, 4]. Для получения этих условий, как правило, используется следующий прием [4]: в системе уравнений газовой динамики, описывающей течения однокомпонентной среды, выполняется указанный выше переход к переменным τ, z и полагается $\partial/\partial\tau = 0$, т. е. рассматриваются частные решения системы уравнений газовой динамики — бегущие волны. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой искомые функции зависят только от z, а первые интегралы являются условиями Гюгонио. Для этих условий Гюгонио доказана теорема определенности [3], из которой, в частности, следует, что по заданным параметрам $\boldsymbol{U}^0$, D значения $\boldsymbol{U}^1$ определяются однозначно.

В данной работе аналогичный подход применяется к рассматриваемой многокомпонентной среде в случае произвольного числа компонентов среды, т. е. при $N \geqslant 2$. Для этого первые три уравнения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. уравнения (3), интегрируются по z, и в них приводятся подобные. В результате получаем три группы соотношений:

$$\sigma_i(u_i-D) = C_{1,i},$$

$$\sigma_i u_i(u_i-D) + (\gamma_i-1)c_{vi}^0\sigma_i T_i - \sigma_i(u-u_i)^2/2 + I_i(z) = C_{2,i}, \tag{5}$$

$$c_{vi}^0\sigma_i T_i(\gamma_i u_i - D) + \sigma_i u_i^2(u_i-D)/2 - \sigma_i u_i(u-u_i)^2/2 + \gamma_i c_{vi}^0\sigma_i T_i(u-u_i)/2 + J_i(z) = C_{3,i},$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$; $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $C_{3,i}$ — произвольные постоянные, полученные в результате интегрирования по z системы (3);

$$I_i(z) = \int\limits_z^{+\infty} \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j a_{ji} [u_j(\xi) - u_i(\xi)]\, d\xi,$$

$$J_i(z) = \int\limits_z^{+\infty} \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \big\{ b_{ji}[P_j(\xi) - P_i(\xi)] + c_{ji}[T_j(\xi) - T_i(\xi)] + 0{,}5 a_{ji} [u_j^2(\xi) - u_i^2(\xi)] \big\}\, d\xi.$$

Замечание 3. Предполагается, что при $-\infty < z < +\infty$ все несобственные интегралы сходятся.

Замечание 4. При получении интегралов $I_i(z)$, $J_i(z)$ учитывается значение производной от интеграла с переменным нижним пределом

$$\Big(\int\limits_x^b f(\xi)\, d\xi \Big)'_x = -f(x).$$

Далее исследуются свойства только таких бегущих волн, у которых при $z \to \pm\infty$ параметры всех компонентов принимают постоянные значения:

$$\lim_{z \to +\infty} \boldsymbol{U}_i(z) = \boldsymbol{U}_i^0, \qquad \lim_{z \to -\infty} \boldsymbol{U}_i(z) = \boldsymbol{U}_i^1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N \tag{6}$$

(координатами векторов $\boldsymbol{U}_i$ являются величины σ_i, u_i, T_i, α_i).

В предположении, что при $z = \pm\infty$ потоки многокомпонентной среды равновесны по скоростям, температурам и давлениям:

$$u_i^0 = u^0, \quad T_i^0 = T^0, \quad P_i^0 = P^0, \quad u_i^1 = u^1, \quad T_i^1 = T^1, \quad P_i^1 = P^1 \tag{7}$$

($1 \leqslant i \leqslant N$), имеют место следующие зависимости:

$$\rho_i^0 = \frac{P^0}{(\gamma_i - 1) c_{vi}^0 T^0}, \qquad \sigma_i^0 = \alpha_i^0 \rho_i^0, \qquad \rho_i^1 = \frac{P^1}{(\gamma_i - 1) c_{vi}^0 T^1}, \qquad \sigma_i^1 = \alpha_i^1 \rho_i^1, \tag{8}$$

где $1 \leqslant i \leqslant N$. Также будем полагать, что для рассматриваемых бегущих волн при $z \to \pm\infty$ выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^0 = 1, \qquad \sum_{i=1}^N \alpha_i^1 = 1. \tag{9}$$

Поскольку целью данной работы является определение постоянных параметров многокомпонентной среды $\boldsymbol{U}_i^1$ при $z = -\infty$ (с использованием предположений (6)–(9), а также по заданным при $z = +\infty$ скорости бегущей волны D и параметрам многокомпонентной среды $\boldsymbol{U}_i^0$), необходимо получить условия, аналогичные условиям Гюгонио. Однако сами конкретные течения строиться не будут.

Замечание 5. В работе [5] для данной модели многокомпонентной среды рассмотрено течение с одной УВ, по обе стороны от которой имеют место равновесия по скоростям, температурам и давлениям. В работе [5] доказано, что в этом случае значения параметров каждого компонента по разные стороны от УВ связаны обычными условиями Гюгонио [3, 4]. Тогда в общем случае, когда термодинамические параметры компонентов различны, а скорость движения УВ для всех компонентов одинакова, за УВ равновесие по скоростям невозможно. Поэтому в данной работе количество сильных разрывов в течении произвольное, а равновесие по скоростям, температурам и давлениям предполагается только в пределе при $z \to \pm\infty$, но не в средней части течения.

С учетом условий (6), (7) и равенств

$$\lim_{z\to+\infty} I_i(z) = 0, \qquad \lim_{z\to+\infty} J_i(z) = 0,$$

имеющих место в предположении сходимости несобственных интегралов, в соотношениях (5) переходим к пределу при $z \to +\infty$. В результате получаем соотношения, из которых по значениям D, $\boldsymbol{U}_i^0$ однозначно определяются константы $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $C_{3,i}$:

$$\begin{aligned} &C_{1,i} = \sigma_i^0(u^0 - D), \qquad C_{2,i} = \sigma_i^0 u^0(u^0 - D) + (\gamma_i - 1)c_{vi}^0\sigma_i^0 T^0,\\ &C_{3,i} = c_{vi}^0\sigma_i^0 T^0(\gamma_i u^0 - D) + 0{,}5\sigma_i^0(u^0)^2(u^0 - D), \qquad 1 \leqslant i \leqslant N. \end{aligned} \tag{10}$$

При получении соотношений (10) учитывалось, что

$$\lim_{z\to+\infty} u(z) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^0 u^0 \Big/ \sum_{i=1}^N \sigma_i^0 = u^0,$$

поэтому $\lim\limits_{z\to+\infty}(u - u_i) = 0$.

Введем следующие обозначения:

$$I_i^1 = \lim_{z\to-\infty} I_i(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i(z)\sum_{j=1}^N \alpha_j(z)a_{ji}[u_j(z) - u_i(z)]\,dz,$$

$$J_i^1 = \lim_{z\to-\infty} J_i(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i(z)\sum_{j=1}^N \alpha_j(z)\big\{b_{ji}[P_j(z) - P_i(z)] +$$

$$+ c_{ji}[T_j(z) - T_i(z)] + 0{,}5a_{ji}[u_j^2(z) - u_i^2(z)]\big\}\,dz,$$

а в соотношениях (5) с учетом $\lim\limits_{z\to-\infty}(u - u_i) = 0$ выполним предельный переход при $z \to -\infty$. В результате для неизвестных величин σ_i^1, u^1, T^1, I_i^1, J_i^1 $(i = 1, 2, \ldots, N)$ получаем следующие функциональные уравнения:

$$\sigma_i^1(u^1 - D) = C_{1,i}; \tag{11}$$

$$\sigma_i^1 u^1(u^1 - D) + (\gamma_i - 1)c_{vi}^0\sigma_i^1 T^1 + I_i^1 = C_{2,i}; \tag{12}$$

$$c_{vi}^0\sigma_i^1 T^1(\gamma_i u^1 - D) + \sigma_i^1(u^1)^2(u^1 - D)/2 + J_i^1 = C_{3,i}. \tag{13}$$

Из уравнений (11) находим

$$\sigma_i^1 = \frac{C_{1,i}}{u^1 - D}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{14}$$

что позволяет исключить величину σ_i^1 из уравнений (12), (13):

$$C_{1,i}u^1 + (\gamma_i - 1)c_{vi}^0 C_{1,i}\,\frac{T^1}{u^1 - D} + I_i^1 = C_{2,i}; \tag{15}$$

$$c_{vi}^0 C_{1,i}\,\frac{T^1}{u^1 - D}\,(\gamma_i u^1 - D) + \frac{1}{2}\,C_{1,i}(u^1)^2 + J_i^1 = C_{3,i}, \tag{16}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$.

Уравнения (15) суммируем по $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} C_{1,i}\Big)u^1 + \Big(\sum_{i=1}^{N}(\gamma_i - 1)c_{vi}^0 C_{1,i}\Big)\frac{T^1}{u^1 - D} + \sum_{i=1}^{N} I_i^1 = \sum_{i=1}^{N} C_{2,i}.$$

Аналогичное суммирование по i уравнений (16) приводит к равенству

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} c_{vi}^0 C_{1,i}\gamma_i\Big)\frac{T^1}{u^1 - D}\,u^1 - \Big(\sum_{i=1}^{N} c_{vi}^0 C_{1,i}\Big)\frac{T^1}{u^1 - D}\,D + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{N} C_{1,i}\Big)(u^1)^2 + \sum_{i=1}^{N} J_i^1 = \sum_{i=1}^{N} C_{3,i}.$$

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\sum_{i=1}^{N} I_i^1 = \sum_{i=1}^{N} J_i^1 = 0.$$

Доказательство. Рассматриваемые суммы представляют собой интегралы от линейных выражений типа

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\big\{d_{i,j}[g_j(z) - g_i(z)]\big\}, \qquad d_{i,j} = d_{j,i}.$$

В случае если $k = l$, то $g_k(z) - g_l(z) \equiv 0$. В другом случае для любой пары целых не равных между собой чисел (k, l), $k \ne l$ рассматриваемые суммы содержат по два таких слагаемых:

$$d_{k,l}[g_k(z) - g_l(z)], \qquad d_{l,k}[g_l(z) - g_k(z)].$$

Вследствие равенства $d_{k,l} = d_{l,k}$ сумма этих слагаемых тождественно равна нулю. Поскольку предполагается, что несобственные интегралы сходятся, операции суммирования и интегрирования можно менять местами. В результате такой перестановки подынтегральные функции становятся равными нулю, следовательно, интегралы также равны нулю. Теорема доказана.

Замечание 6. Равенство нулю сумм интегралов I_i^1, J_i^1 $(1 \leqslant i \leqslant N)$ следует из законов сохранения импульса и энергии (в том числе при взаимодействии различных компонентов), на основе которых получена рассматриваемая модель многокомпонентной среды [1].

Таким образом, в результате суммирования для двух искомых величин u^1, T^1 получены уравнения

$$C_1 u^1 + C_4\,\frac{T^1}{u^1 - D} = C_2; \tag{17}$$

$$(C_4 + C_5)\,\frac{T^1}{u^1 - D}\,u^1 - C_5\,\frac{T^1}{u^1 - D}\,D + \frac{1}{2}\,C_1(u^1)^2 = C_3, \tag{18}$$

где

$$C_1 = \sum_{i=1}^{N} C_{1,i}, \qquad C_2 = \sum_{i=1}^{N} C_{2,i}, \qquad C_3 = \sum_{i=1}^{N} C_{3,i},$$

$$C_4 = \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i - 1)c_{vi}^0 C_{1,i}, \qquad C_5 = \sum_{i=1}^{N} c_{vi}^0 C_{1,i}, \qquad \sum_{i=1}^{N}\gamma_i c_{vi}^0 C_{1,i} = C_4 + C_5.$$

Выражая из уравнения (17) величину $T^1/(u^1 - D)$:

$$\frac{T^1}{u^1 - D} = \frac{C_2 - C_1 u^1}{C_4}, \tag{19}$$

для скорости u^1 получаем квадратное уравнение

$$(C_4 + C_5)\,\frac{C_2 - C_1 u^1}{C_4}\,u^1 - C_5\,\frac{C_2 - C_1 u^1}{C_4}\,D + \frac{1}{2}\,C_1(u^1)^2 = C_3,$$

которое запишем в традиционном виде

$$A(u^1)^2 + Bu^1 + E = 0, \tag{20}$$

где

$$A = \frac{1}{2}\,C_1 - \frac{C_1(C_4 + C_5)}{C_4} = \frac{C_1[C_4 - 2(C_4 + C_5)]}{2C_4} = -\frac{C_1(C_4 + 2C_5)}{2C_4},$$

$$B = \frac{C_2(C_4 + C_5) + C_1 C_5 D}{C_4}, \qquad E = -\frac{C_2 C_5 D}{C_4} - C_3.$$

Одним из корней уравнения (20) является параметр u^0. Действительно, если в соотношениях (10), в которых отсутствуют интегралы $I_i(z)$, $J_i(z)$, выполнить те же действия, что и в соотношениях (11)–(13) (исключение σ_i^0, суммирование по i двух групп уравнений, исключение T^0), то получим

$$A(u^0)^2 + Bu^0 + E = 0.$$

Согласно теореме Виета корни уравнения (20) удовлетворяют равенству

$$u^1 + u^0 = -B/A,$$

следовательно

$$u^1 = -B/A - u^0. \tag{21}$$

Определив по формуле (21) значение u^1, из соотношений (14) находим значения σ_i^1 ($i = 1, 2, \ldots, N$). Затем из (19) получаем $T^1 = (u^1 - D)(C_2 - C_1 u^1)/C_4$. После этого находим α_i^1 ($i = 1, 2, \ldots, N$) следующим образом. При $z \to -\infty$ имеет место равновесие по давлениям:

$$(\gamma_1 - 1)c_{v1}^0 \rho_1^1 T^1 = (\gamma_j - 1)c_{vj}^0 \rho_j^1 T^1, \qquad j = 2, \ldots, N,$$

поэтому

$$\frac{\rho_1^1}{\rho_j^1} = \frac{(\gamma_j - 1)c_{vj}^0}{(\gamma_1 - 1)c_{v1}^0}.$$

Так как $\sigma_i^1 = \alpha_i^1 \rho_i^1$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), то $\alpha_i^1 = \sigma_i^1/\rho_i^1$, и, следовательно,

$$\frac{\alpha_j^1}{\alpha_1^1} = \frac{\sigma_j^1 \rho_1^1}{\rho_j^1 \sigma_1^1} = \frac{\sigma_j^1(\gamma_j - 1)c_{vj}^0}{\sigma_1^1(\gamma_1 - 1)c_{v1}^0}, \qquad j = 2, \ldots, N, \tag{22}$$

где дроби в правой части уже известны. Введем для этих дробей обозначение

$$k_j = \frac{\sigma_j^1(\gamma_j - 1)c_{vj}^0}{\sigma_1^1(\gamma_1 - 1)c_{v1}^0} > 0, \qquad j = 2, \ldots, N$$

и запишем равенства (22) в виде

$$\alpha_j^1 = k_j \alpha_1^1, \qquad j = 2, \ldots, N. \tag{23}$$

Согласно выражениям (9) имеем

$$\alpha_1^1(1 + k_2 + \ldots + k_N) = 1.$$

Отсюда определяем

$$\alpha_1^1 = 1/(1 + k_2 + \ldots + k_N),$$

а затем по формулам (23) находим остальные значения α_j^1 ($j = 2, \ldots, N$).

Используя соотношение (14) для σ_i^1, с учетом задаваемых равенствами (10) значений констант $C_{1,i}$ из условия равновесия потока по давлениям при $z \to \pm\infty$ получаем

$$k_j = \alpha_j^0/\alpha_1^0, \qquad j = 2, \ldots, N. \tag{24}$$

Действительно,

$$k_j = \frac{\sigma_j^1(\gamma_j - 1)c_{vj}^0}{\sigma_1^1(\gamma_1 - 1)c_{v1}^0} = \frac{C_{1,j}(\gamma_j - 1)c_{vj}^0}{C_{1,1}(\gamma_1 - 1)c_{v1}^0} = \frac{\sigma_j^0(\gamma_j - 1)c_{vj}^0}{\sigma_1^0(\gamma_1 - 1)c_{v1}^0} =$$

$$= \frac{\alpha_j^0\rho_j^0(\gamma_j - 1)c_{vj}^0T^0}{\alpha_1^0\rho_1^0(\gamma_1 - 1)c_{v1}^0T^0} = \frac{\alpha_j^0P_j^0}{\alpha_1^0P_1^0} = \frac{\alpha_j^0}{\alpha_1^0}.$$

Из формул (23), (24) следует

$$1 + \sum_{j=2}^N k_j = 1 + \sum_{j=2}^N \frac{\alpha_j^1}{\alpha_1^1} = 1 + \sum_{j=2}^N \frac{\alpha_j^0}{\alpha_1^0},$$

поэтому с учетом равенств (9) имеем

$$\alpha_1^1 = \alpha_1^0.$$

Тогда из соотношений (23), (24) получаем

$$\alpha_j^1 = \alpha_j^0, \qquad j = 2, \ldots, N.$$

После этого из соотношений (12), (13) находим остальные искомые величины

$$I_i^1 = C_{2,i} - \sigma_i^1u^1(u^1 - D) - (\gamma_i - 1)c_{vi}^0\sigma_i^1T^1,$$

$$J_i^1 = C_{3,i} - c_{vi}^0\sigma_i^1T^1(\gamma_iu^1 - D) - \sigma_i^1(u^1)^2(u^1 - D)/2, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Итак, в частном случае, когда при $z \to \pm\infty$ среда с N компонентами находится в однородных равновесных по скоростям, температурам и давлениям состояниях:

$$\lim_{z\to+\infty} \boldsymbol{U}_i(z) = \boldsymbol{U}_i^0, \qquad \lim_{z\to-\infty} \boldsymbol{U}_i(z) = \boldsymbol{U}_i^1,$$

доказана теорема, аналогичная теореме определенности [3].

Теорема 2. *При условии выполнения равенств* (6)–(9) *по заданным значениям* $\boldsymbol{U}_i^0$ *и по скорости* D *распространения бегущей волны значения параметра* $\boldsymbol{U}_i^1$ *и интегралы* I_i^1, J_i^1 *определяются однозначно, при этом* $\alpha_i^1 = \alpha_i^0$ ($1 \leqslant i \leqslant N$).

В случае однокомпонентной среды ($N = 1$), т. е. в случае

$$c_{vi}^0 = c_v^0, \qquad \gamma_i = \gamma, \tag{25}$$

формула (21) при $u^0 = 0$ переходит в формулу [4]

$$u^1 = \frac{2}{\gamma + 1}\Big(D - \frac{(c^0)^2}{D}\Big). \tag{26}$$

При этом используются константы в виде

$$C_1 = -D\rho^0, \qquad C_2 = (-D\rho^0)(\gamma-1)c_v^0 T^0/(-D),$$

$$C_3 = (-D\rho^0)c_v^0 T^0, \qquad C_4 = (-D\rho^0)(\gamma-1)c_v^0, \qquad C_5 = (-D\rho^0)c_v,$$

$$A = -(-D\rho^0)\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}, \qquad B = \frac{-D\rho^0}{\gamma-1}\Big(D - \frac{(c^0)^2}{D}\Big).$$

Преобразования, в результате которых получена формула (26), здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Предложенная методика может быть использована в случае других уравнений состояния компонентов. Аналогично можно получить уравнения, соответствующие уравнениям (17), (18), которые являются функциональными уравнениями для искомых величин u^1, T^1 при заданных D, $\boldsymbol{U}_i^0$. Вид этих функциональных уравнений определяется видом уравнений состояния компонентов. Данный подход можно применить также к другим системам уравнений с частными производными, решения которых описывают течения в средах, в которых имеет место соответствующее взаимодействие различных компонентов, например к системе уравнений, описывающей течения в многотемпературной плазме [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Куропатенко В. Ф.** Модель многокомпонентной среды // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 6. С. 761–763.
2. **Баутин С. П.** Скорость звука в многокомпонентной покоящейся среде // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3. С. 35–44.
3. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
4. **Рождественский Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. М.: Наука, 1978.
5. **Баутин С. П.** Система уравнений одной модели многокомпонентной среды // Проблемы прикладной математики и механики. Т. 1. Екатеринбург: Урал. гос. ун-т путей сообщ., 2007. Вып. 58. С. 6–73.
6. **Долголева Г. В.** Методика расчета движения двухтемпературного излучающего газа (СНД) // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач мат. физики. 1983. Вып. 2. С. 29–33.
7. **Забродин А. В., Прокопов Г. П.** Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении. М., 1998. (Препр. / РАН. Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша, № 25).

Поступила в редакцию 24/III 2008 г.,
в окончательном варианте — 16/VII 2008 г.