

О ВЛИЯНИИ ПЕРЕМЕННОСТИ ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ НА ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ТУПОГО ТЕЛА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

И. Н. Мурзинов

(Москва)

Рассматривается равновесное течение вязкого газа в окрестности передней части осесимметричного тупого тела, движущегося с большой сверхзвуковой скоростью. Газ предполагается довольно разреженным, так что во всей области течения между телом и ударной волной необходимо учитывать вязкие силы. При решении задачи переносные свойства воздуха считаются зависящими от давления и энтальпии. Приведены результаты расчета по влиянию числа Прандтля, температуры стенки и числа Рейнольдса на теплообмен в критической точке.

1. Как показано в работе [1], уравнениями сплошной среды в окрестности передней части затупленного тела при низкой температуре стенки можно пользоваться для чисел Рейнольдса $R_\infty \gtrsim 1$, посчитанных по характерному размеру затупления R_0 .

Тот или иной режим течения в окрестности критической точки будет иметь место в зависимости от соотношения трех величин: толщины пограничного слоя, отхода ударной волны от тела и толщины самой ударной волны. Для невязкого течения отход ударной волны $R_0\delta$ от тела определяется уплотнением газа на прямом скачке [2]

$$\delta \sim k \quad (k = \rho_\infty / \rho_1) \quad (1.1)$$

Здесь ρ_∞ — плотность до и ρ_1 — за прямым скачком.

Для оценок толщины ламинарного пограничного слоя R_0h в окрестности критической точки при низкой температуре стенки можно принять [1]

$$h \sim \frac{M_\infty k^{3/4}}{\sqrt{R_\infty}} \quad (1.2)$$

С увеличением высоты полета и уменьшением числа Рейнольдса R_∞ толщина пограничного слоя будет расти и невязкий слой между телом и ударной волной может полностью исчезнуть. Из сравнения (1.1) и (1.2) видно, что такой режим течения будет при

$$\frac{M_\infty^2}{R_\infty} \sim \sqrt{k} \quad (1.3)$$

Принимая толщину ударной волны $R_0\varepsilon$ равной длине свободного пробега за скачком уплотнения, получим

$$\varepsilon \sim k \frac{M_\infty}{R_\infty} \quad (1.4)$$

Сопоставляя (1.1) и (1.4), найдем

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \sim \frac{M_\infty}{R_\infty} \quad (1.5)$$

и для режима течения, когда исчезает невязкий слой между телом

и отошедшей ударной волной, $\varepsilon/\delta \sim \sqrt{k}/M_\infty \ll 1$. Следовательно, при полете затупленных тел в атмосфере имеет место такой случай, когда сразу за ударной волной необходимо учитывать вязкие силы; саму же ударную волну при этом можно считать бесконечно тонкой, и соотношения на ударной волне будут условиями на внешней границе пограничного слоя. Такая схема течения использовалась в работах [3, 4].

2. Выберем криволинейную систему координат x, y , в которой расстояние xR_0 отсчитывается от критической точки вдоль образующей, а расстояние yR_0 — по нормали к телу (R_0 — радиус миделя затупления). Обозначим через uU_∞, vV_∞ составляющие скорости по осям, $\rho_\infty p, \rho_\infty U_\infty^2 p, \frac{1}{2} U_\infty^2 i, \mu_\infty$ — плотность, давление, энтальпию и вязкость газа, $\rho_\infty, U_\infty, \mu_\infty$ — плотность, скорость и вязкость газа в набегающем потоке соответственно.

Если пренебречь величинами δ и k в сравнении с единицей, уравнения неразрывности, движения и энергии в окрестности критической точки будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v x)}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} &= \frac{1}{R_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь σ — число Прандтля.

В окрестности критической точки давление меняется незначительно [5], и величины ρ, μ, σ можно считать функциями только энтальпии.

Введем функцию V и переменную Доронидина η

$$V = \rho k v, \quad \eta = \sqrt{R_\infty} \int_0^y \rho dy \quad (2.2)$$

Тогда решение системы уравнений (2.1) в окрестности критической точки можно искать в виде

$$u = x f'(\eta), \quad V = -\frac{2k}{\sqrt{R_\infty}} f(\eta), \quad i = i(\eta), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -2b(y)x \quad (2.3)$$

Примем, что $b(y)$ постоянна между телом и ударной волной и равна своему значению сразу за скачком уплотнения¹. Подставляя (2.3) в (2.1), получим

$$(\rho \mu f'')' + 2ff'' - 2ff'^2 + \frac{2b}{\rho} = 0, \quad \left(\frac{\rho \mu}{\sigma} i' \right)' + 2fi' = 0 \quad (2.4)$$

Рассмотрим граничные условия задачи.

Составляющие скорости на теле равны нулю, и будем считать заданной энтальпию (или температуру) газа, т. е.

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad i = i_\omega \quad (2.5)$$

Сразу за ударной волной, положение которой определяется некоторой величиной η_1 , имеем из соотношений на скачке

$$\eta = \eta_1, \quad f = \frac{\sqrt{R_\infty}}{2}, \quad f' = \frac{1}{R_1}, \quad i \approx 1 \quad (2.6)$$

где $R_0 R_1$ — радиус кривизны ударной волны при $x = 0$.

Как показывают эксперименты и расчеты, в случае невязкого обтекания тела величина $b(y)$ между телом и ударной волной меняется при диссоциации незначительно. Следует иметь также в виду, что градиент давления в окрестности критической точки для сильно охлажденной стенки играет относительно небольшую роль [6].

При заданном значении R_1 ($b = 1/R_1^2$) шесть условий (2.5) и (2.6) достаточно для решения системы (2.4) и определения η_1 .

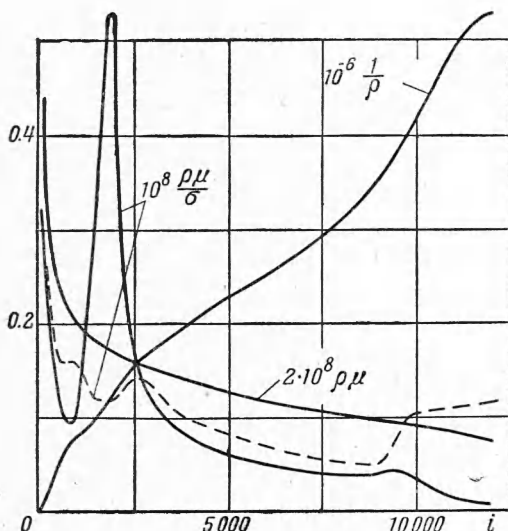
На фиг. 1 приведены функции [7]

$$\rho\mu \left[\frac{\text{кг}^2 \text{сек}^3}{\text{м}^6} \right], \quad \frac{1}{\rho} \left[\frac{\text{м}^4}{\text{кг} \text{сек}^2} \right], \quad \frac{\rho\mu}{\sigma} \left[\frac{\text{кг}^2 \text{сек}^3}{\text{м}^6} \right]$$

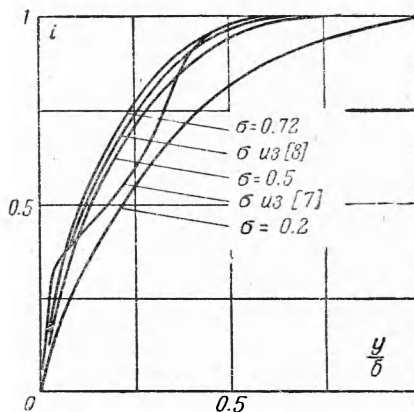
в зависимости от i [$\text{ккал} / \text{кг}$] при давлении $P = 0.01 \text{ ат}$, которые использовались при численных расчетах. Там же пунктиром показана функция $\rho\mu / \sigma$ из работы [8]. Видно, что данные работ [7,8] сильно отличаются и принимаемые обычно предположения $\rho\mu = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$ не выполняются.

Так как при решении необходимо удовлетворить условиям на разных концах интервала, при $\eta = 0$ задавались дополнительно значения i' и f'' . На основании трех просчетов (счет в каждом случае велся до выполнения условия $f = 1/2 \sqrt{R_\infty}$) начальные значения i' и f'' уточнялись таким образом, чтобы удовлетворить условиям $f' = 1/R_1$ и $i = 1$ с необходимой точностью.

3. Рассмотрим течение в окрестности критической точки сферы. Для сферы можно при-



Фиг. 1



Фиг. 2

нять, что в окрестности оси симметрии ударная волна концентрична с поверхностью сферы, т. е. $R_1 \approx 1$.

Расчеты были проведены для скоростей движения $V_\infty = 6000 \text{ м/сек}$ и $V_\infty = 8000 \text{ м/сек}$. Плотность набегающего потока бралась такой, чтобы давление за прямым скачком было равно 0.01 ат (это соответствует высотам $\sim 80 \text{ км}$). На фиг. 2 приведены профили энтальпии между телом и ударной волной ($T_w = T_\infty = 300^\circ \text{ К}$, $V_\infty = 6000 \text{ м/сек}$, $R_0 = 0.5 \text{ м}$) для постоянных значений $\sigma = 0.2, 0.5, 0.72$, а также для изменяющихся с энтальпией чисел Прандтля [7,8]. Видно, что наибольшее изменение претерпевает профиль энтальпии, соответствующий данным работы [7].

Если изменяющиеся с энтальпией числа Прандтля σ заменить средними по пограничному слою значениями σ_m из условия равенства тепловых потоков, то данным [7] соответствует $\sigma_m \approx 0.46$, а данным работы [8] — $\sigma_m \approx 0.68$. Последнее значение близко к обычно принимаемому для воздуха $\sigma = 0.72$. По данным [7], тепловой ток в критическую точку на 35% больше, чем для $\sigma = 0.72$.

Так как согласно работе [7] число Прандтля сильно зависит от температуры, то с изменением температуры стенки будет меняться σ_m и, следо-

вательно, тепловой поток к телу. На фиг. 3 приведены тепловые потоки в критическую точку сферы в зависимости от температуры стенки ($V_\infty = 6000$ м/сек, $R_0 = 0.5$ м). С ростом температуры стенки вначале наблюдается некоторое падение тепловых потоков, которые затем возрастают, что можно объяснить уменьшением среднего по пограничному слою числа Прандтля.

На основании обширных расчетов в работе [9] получена формула для расчета теплового потока в критическую точку

$$q = 0.765^{-0.6} (\rho_w \mu_w)^{0.1} (\rho_s \mu_s)^{0.4} \left\{ 1 + (L^{0.52} - 1) \frac{i_d}{i_s} \right\} (i_s - i_w) \sqrt{\frac{du_e}{dx}} \quad (2.7)$$

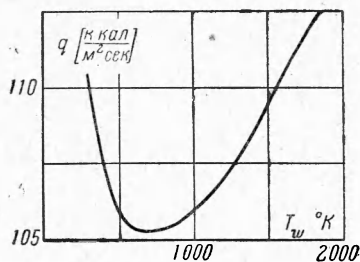
Здесь L — число Льюиса, i_d — энтальпия диссоциации, индексы s и w относятся к параметрам за скачком и на теле. Остальные обозначения общеприняты.

Обычно в теории пограничного слоя градиент скорости берется из решения задачи об обтекании тела невязким потоком газа. В окрестности критической точки в этом случае можно легко получить из уравнения движения

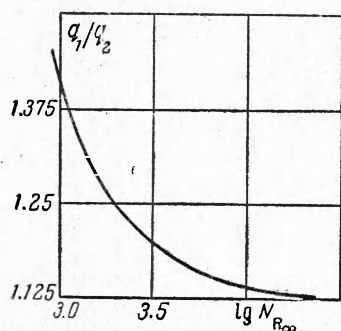
$$\frac{du_e}{dx} \approx \frac{U_\infty}{R_0 R_1} \sqrt{2k}$$

в то время как для пограничного слоя, простирающегося до ударной волны

$$\frac{du_e}{dx} \approx \frac{U_\infty}{R_0 R_1}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

При скорости полета $U_\infty = 6000$ м/сек ($k \approx 0.06$) градиенты скорости на теле и сразу за ударной волной отличаются в три раза; соответственно будут отличаться тепловые потоки согласно (2.7), и это отличие будет расти с уменьшением k .

Ниже для сравнения приведены тепловые потоки (q ккал/м²·сек), полученные из решения уравнений (q_1), а также вычисленные¹ по формуле (2.7) при значениях градиента скорости на теле (q_2) и сразу за ударной волной (q_3).

σ	q_1	q_2	q_3
0.2	189.5	160	270.3
0.5	104	92	156
0.72	81.5	74	120.4

Из этой таблицы видно, что полученные из решения уравнений тепловые потоки лежат между рассчитанными по (2.7) для различных градиентов скорости. При этом тепловые потоки q_3 в среднем на 50% больше q_1 .

Так как с уменьшением чисел Рейнольдса и ростом толщины пограничного слоя будет расти градиент скорости du_e/dx , то расчеты по формуле (2.7) при обычном использовании градиента скорости будут давать заниженные значения тепловых потоков. На фиг. 4 приведено в зависимости от числа R_∞ отношение тепловых потоков, полученных из решения

¹ Расчеты по формуле (2.7) проводились при $L = 1$, так как для этого частного случая уравнения движения с учетом диффузии будут совпадать с (2.1).

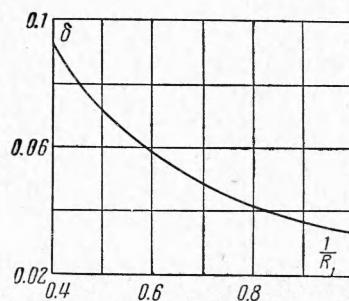
($V_\infty = 6000$ м / сек, $T_w = 300^\circ$ К), к тепловым потокам, посчитанным по формуле (2.7) при

$$L = 1, \quad \sigma = \sigma_m = 0.46, \quad \frac{du_{\text{max}}}{dx} = \frac{U_\infty}{R_0 R_1} \sqrt{2k}$$

Видно, что отношение тепловых потоков растет с уменьшением чисел Рейнольдса.

Отметим, что отход ударной волны δ несколько уменьшается с уменьшением чисел Рейнольдса.

Аналогичные результаты получаются для скорости движения $V_\infty = 8000$ м / сек. При этой скорости были также проведены расчеты для различных радиусов кривизны скачка уплотнения на оси. С ростом радиуса кривизны ударной волны уменьшается градиент скорости и тепловые потоки убывают в соответствии с (2.7). На фиг. 5 дан отход ударной волны от тела, который сильно растет с увеличением радиуса кривизны ударной волны.



Фиг. 5

Автор искренне благодарит В. В. Лунева за советы и замечания.

Поступила 23 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Adams M. S., Probstein R. F. On the Validity of Continuum Theory for Satellite and Hypersonic Flight Problems at High Altitudes. Jet Propulsion, 1958, No 2.
2. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic Flow Theory. Academic Press, New York — London, 1959.
3. Herring T. K. The Boundary Layer Near the Stagnation Point in Hypersonic Flow Past a Sphere. Journal Fluid Mechanics, 1960, No 3.
4. Пробштейн Р., Кемп Н. Вязкие аэродинамические характеристики в гиперзвуковом потоке разреженного газа. Механика, 1961, № 2.
5. Лунев В. В., Мурзинов И. Н., Влияние излучения на течение в окрестности критической точки тупого тела. ПМТФ, 1961, № 2.
6. Lees L. Laminar Heat Transfer Over Blunt-Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds. Jet Propulsion. 1956, No 4.
7. Предводителев А. С. (ред.) Сб. статей «Физическая газодинамика», Изд. АН СССР, 1960.
8. C. Frederick Hansen. Approximations for thermodynamics and transport properties of High-Temperature air. NASA Technical Report R-50, 1959.
9. Фэй, Ридделл. Теоретический анализ теплообмена в лобовой точке, омываемой диссоциированным воздухом. Сб. статей «Проблемы движения головной части ракет дальнего действия», ИИЛ, 1959.