УДК 532.59+517.95

# ВОЛНЫ И СТРУКТУРЫ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

О. В. Капцов, Д. О. Капцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия
E-mails: kaptsov@icm.krasn.ru, hot.dok@gmail.com

Рассматривается классическое уравнение Буссинеска, описывающее гравитационные волны на мелкой воде. С использованием билинейного представления Хироты построены точные решения, описывающие, в частности, волновые пакеты, волны на солитонах, “танцующие” волны. Сформирован принцип умножения решений уравнения Хироты, позволяющий строить более сложные структуры из солитонов, волновых пакетов и волн другого типа.

Ключевые слова: гравитационные волны, волновые пакеты, солитоны.

DOI: 10.15372/PMTF20190218

**Введение.** В 70–80-х гг. XX в. активно исследовались решения солитонного типа, нашедшие приложение в различных областях нелинейной физики. Были разработаны новые и актуализированы использовавшиеся ранее методы интегрирования ряда нелинейных уравнений [1–3]. Однако число уравнений, интегрируемых с помощью этих методов, невелико. Следует отметить, что термин “интегрируемость” имеет различные толкования, так как единого устоявшегося определения не существует.

Наибольший интерес среди интегрируемых уравнений представляют модели, имеющие солитонные решения, в том числе уравнение Буссинеска [4, 5]

$$\eta_{tt} = gh_0\eta_{xx} + \frac{3}{2}\,g(\eta^2)_{xx} + \frac{1}{3}\,gh_0^3\eta_{xxxx}. \qquad (1)$$

Здесь $g$ — ускорение свободного падения; $h_0$ — глубина невозмущенной жидкости; $\eta$ — функция $t$ и $x$, описывающая отклонение поверхности воды от невозмущенного состояния. Солитонные решения уравнения (1) найдены в [6], бризерные решения указаны в [7], рациональные — в [1, 8]. Бризеры получаются из солитонов комплексификацией параметров, при этом решения должны оставаться вещественными. Сингулярные решения уравнения Буссинеска рассматривались в [9]. В работе [10] отмечено, что, выбирая комплексные волновые параметры, можно получить различные типы волн уравнения Буссинеска.

В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в [10]. С помощью линейных дифференциальных связей четвертого порядка находится решение уравнения Буссинеска, зависящее от нескольких произвольных констант и выражающееся через элементарные функции. Из бризерных решений выделяются волны специального типа (волновые пакеты, “танцующие” волны и волны на солитонах). Формулируется принцип суперпозиции, позволяющий получать из волн специального типа более сложные структуры, в частности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00332-а).

структуры, описывающие взаимодействие волновых пакетов с “танцующими” солитонами и между собой. В работе найдены новые решения уравнения Буссинеска, также зависящие от нескольких производных констант, однако удовлетворяющие другим дисперсионным соотношениям и стремящиеся к другой константе при $|x| \to \infty$.

**1. Базовые решения и их суперпозиция.** С помощью преобразования растяжения уравнение Буссинеска (1) приведем к виду

$$w_{tt} = w_{xx} + 3(w^2)_{xx} + w_{xxxx}. \tag{2}$$

Введем новую функцию $u$, полагая $w = u_{xx}$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(u_{tt} - u_{xx} - 3u_{xx}^2 - u_{xxxx}) = 0.$$

В дальнейшем будем полагать, что функция $u$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} = u_{xx} + 3u_{xx}^2 + u_{xxxx}. \tag{3}$$

Путем замены $u = 2\ln H$ уравнение (3) приводится к билинейному представлению

$$HH_{tt} - H_t^2 - HH_{xxxx} + 4H_xH_{xxx} - 3H_{xx}^2 - HH_{xx} + H_x^2 = 0. \tag{4}$$

Таким образом, решения уравнения (2) получаются из решений уравнения (4) по формуле

$$w = 2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\ln H, \tag{5}$$

предложенной Р. Хиротой [6]. Также в [6] билинейное уравнение, эквивалентное (4), использовалось для построения многосолитонных решений уравнения Буссинеска. В частности, тройка решений уравнения (4) имеет вид

$$H_1 = 1 + f_1, \qquad H_2 = 1 + f_1 + f_2 + p_{12}f_1f_2,$$

$$H_3 = 1 + f_1 + f_2 + f_3 + p_{12}f_1f_2 + p_{13}f_1f_3 + p_{23}f_2f_3 + p_{12}p_{13}p_{23}f_1f_2f_3,$$

где $f_i = s_i \exp{(k_ix + m_it)}$; $s_i$, $k_i$ — произвольные константы;

$$p_{ij} = \frac{3(k_i - k_j)^2 + (m_i - m_j)^2}{3(k_i + k_j)^2 + (m_i - m_j)^2}. \tag{6}$$

При этом параметры $k_i$, $m_i$ удовлетворяют “дисперсионному” соотношению

$$m_i^2 = k_i^2 + k_i^4.$$

Функции $H_1$, $H_2$ являются решениями уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - k_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} - k_2\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} - k_1 - k_2\Big)H = 0. \tag{7}$$

Выясним, имеются ли отличные от $H_1$, $H_2$ решения системы (2), (7). Пусть $k_1 = k_2 = k \neq 0 \in \mathbb{R}$. Тогда общее решение уравнения (7) принимает вид

$$H = c_1 + (c_2x + c_3)\,\mathrm{e}^{kx} + c_4\,\mathrm{e}^{2kx}, \tag{8}$$

где $c_1, \ldots, c_4$ — некоторые функции $t$. Не ограничивая общности, функцию $c_1$ можно считать равной 1 или 0. Предположим, что $c_1 = 1$. Подставляя представление (8) в уравнение (2), получаем переопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $c_2, c_3, c_4$. Решая эту систему, находим

$$c_2 = -\frac{sm\,\mathrm{e}^{-mt}}{k(2k^2+1)}, \qquad c_3 = s\,\mathrm{e}^{-mt}, \qquad c_4 = -\frac{s^2(4k^2+3)\,\mathrm{e}^{-2mt}}{12k^2(2k^2+1)^2}$$

($s \in \mathbb{R}$, $m^2 = k^2 + k^4$). Другие решения системы (2), (7) представлены в работе [10].

Обобщением уравнения (7) является дифференциальное уравнение порядка $2^n$

$$\frac{\partial}{\partial x} \prod_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n}} \Big(\frac{\partial}{\partial x} - k_{i_1} - \ldots - k_{i_p}\Big) H = 0. \tag{9}$$

Решая уравнение (9) при различных значениях параметров $k_1, \ldots, k_n$ и подставляя полученное решение в (2), можно найти солитонные, рациональные, бризерные и другие решения уравнения Буссинеска.

Далее рассмотрим специальный класс решений.

Определение. Функцией Хироты ($H$-функцией) будем называть функцию вида

$$H(k_1, \ldots, k_n) = ((1 + f(k_1)) * \cdots * (1 + f(k_n))),$$

где $k_i$ — комплексные параметры; $f(k_i) = \exp\,(k_i x + \sqrt{k_i^2 + k_i^4}\, t)$; знак “$*$” означает бинарную операцию, удовлетворяющую условиям коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и заданную условиями

$$c * f(k_i) = c f(k_i), \qquad f(k_{i_1}) * \cdots * f(k_{i_l}) = p_{i_1,\ldots,i_l} f(k_{i_1}) \cdots f(k_{i_l}) \quad \forall c \in \mathbb{C},$$

$p_{i_1,\ldots,i_l} = p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{l-1} i_l}$ — произведение всех параметров $p_{i_r i_q}$ $(r < q \leqslant l)$, заданных формулой (6).

Заметим, что в [6] для многосолитонных решений использовалось другое представление.

Очевидно, что функция Хироты $H(k_1, \ldots, k_n)$ не меняется при перестановке любых двух параметров $k_i, k_j$. В случае если какая-либо пара параметров совпадает, функция Хироты тождественно равна нулю.

Нетрудно показать, что функции Хироты образуют бесконечную коммутативную полугруппу с операцией умножения в виде

$$H(k_1, \ldots, k_n) * H(k_1', \ldots, k_m') = H(k_1, \ldots, k_n, k_1', \ldots, k_m'). \tag{10}$$

Тогда можно сформулировать принцип суперпозиции: если заданы две функции Хироты, то их произведение в виде (10) также является функцией Хироты и решением уравнения (4).

Представляют интерес вещественные значения функции Хироты, которые могут зависеть от комплексных параметров. Сначала рассмотрим случай, когда функция Хироты зависит от двух параметров: $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$. Очевидно, что комплексно-сопряженные параметры задают вещественную функцию $H(k_1, k_2)$. Можно выделить три типа функций $H$, задающих три типа волн для уравнения Буссинеска (2): волновые пакеты ($P$-волны) (рис. 1), “танцующие” волны ($D$-волны) (рис. 2), волны на солитоне ($R$-волны) (рис. 3).

Константы $a, b$, задающие комплексно-сопряженные числа $k_1, k_2$, имеют следующие значения: $a = 0{,}1$, $b = 0{,}933$ для $P$-волны; $a = 0{,}2$, $b = 0{,}933$ для $D$-волны; $a = 0{,}911$, $b = 2{,}8213$ для $R$-волны.

В каждый фиксированный момент времени $t$ решения уравнения Буссинеска (2), соответствующие $P$-, $D$-, $R$-волнам, стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Анимационные картины этих волн представлены в работе [11] (см. файлы P.gif, D.gif, R.gif). Помимо указанных значений констант $a, b$ на плоскости $\mathbb{R}^2(a, b)$ существуют области, для которых реализуются $P$-, $R$-, $D$-волны. Заметим, что стандартному солитону ($S$-волне) соответствует функция Хироты $H(k)$ с вещественным параметром $k \neq 0$.

Для построения более сложных волновых структур из $P$-, $D$-, $R$-, $S$-волн достаточно использовать формулу умножения (10) $H$-функций, соответствующих этим волнам, и преобразование (5). В [11] (см. файл SD.gif) приведена анимационная картина взаимодействия

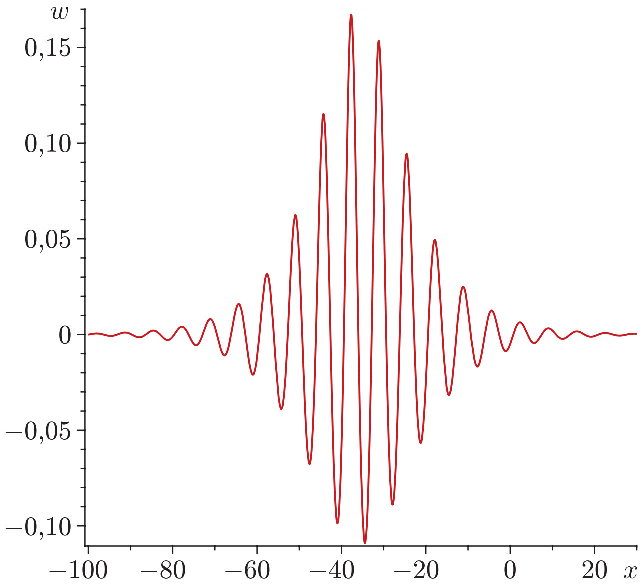


Рис. 1. Волновой пакет

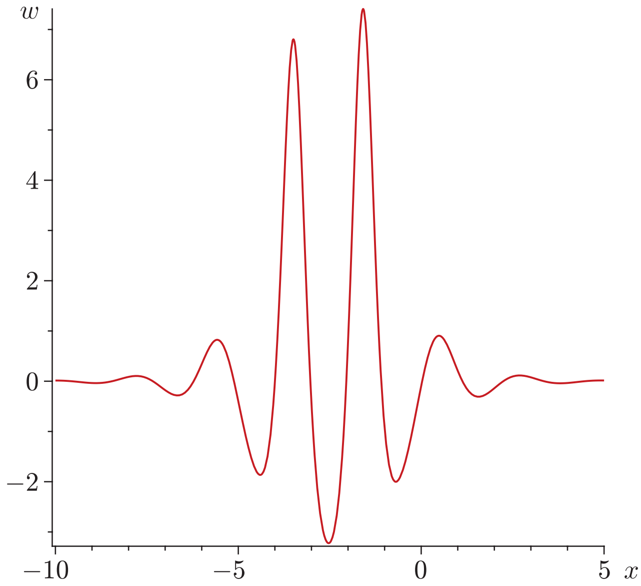


Рис. 2. "Танцующие" волны

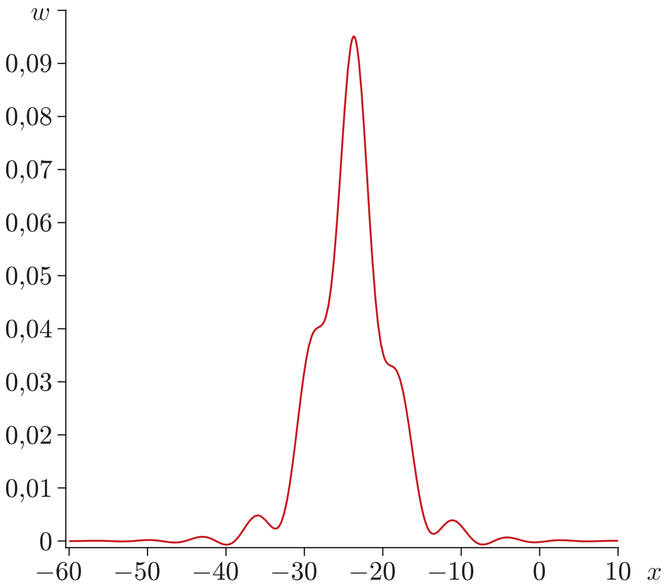


Рис. 3. Волны на солитоне

солитона ($k = 1$) с $D$-волной при указанных выше значениях параметров. Видно, что форма и скорость волн восстанавливаются после взаимодействия. Следует выделить структуру (см. файл SP2.gif в [11]), состоящую из волнового пакета и солитона ($k_1 = 0{,}1 + 0{,}933i$, $k_2 = \bar{k}_1$, $k_3 = 1{,}5$). Солитон и волновой пакет движутся друг за другом, фактически не взаимодействуя. В [11] (см. файл PP.gif) показано взаимодействие двух волновых пакетов. Волновые числа в первом случае равны $k_1 = 0{,}1+0{,}933i$, $k_2 = \bar{k}_1$, $k_3 = 0{,}1+0{,}934i$, $k_4 = \bar{k}_3$, во втором случае $k_1 = 0{,}2 + 0{,}933i$, $k_2 = \bar{k}_1$, $k_3 = 0{,}2 + 0{,}934i$, $k_4 = \bar{k}_3$. В [11] (см. файл PP2.gif) показано движение двух фактически не взаимодействующих волновых пакетов. Таким образом можно получить решение уравнения Буссинеска, описывающее движение любого числа $P$-, $D$-, $R$-, $S$-волн.

**2. Новые дополнительные решения.** Множество решений уравнения Буссинеска, выражающихся через элементарные функции, не ограничивается приведенными выше решениями. Построим новые решения, используя билинейное уравнение.

Выполнив замену $w = v - 1/6$, уравнение (2) запишем в виде

$$v_{tt} = (3v^2 + v_{xx})_{xx}.$$

Затем по формуле $v = z_{xx}$ введем новую функцию $z$ и получим уравнение шестого порядка, которое два раза интегрируется. В результате получаем уравнение

$$z_{tt} = 3z_{xx}^2 + z_{xxxx}.$$

После замены $z = 2\ln G$ получаем билинейное уравнение

$$GG_{tt} - G_t^2 - GG_{xxxx} + 4G_xG_{xxx} - 3G_{xx}^2 = 0, \qquad (11)$$

отличающееся от (4) двумя слагаемыми.

Введем функции $g_i = \exp(k_ix + k_i^2t)$, $k_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$. С помощью прямых вычислений несложно показать, что функции

$$G_1 = 1 + g_1, \qquad G_2 = 1 + g_1 + g_2 + p_{12}g_1g_2,$$

$$G_3 = 1 + g_1 + g_2 + g_3 + p_{12}g_1g_2 + p_{13}g_1g_3 + p_{23}g_2g_3 + p_{12}p_{13}p_{23}g_1g_2g_3$$

удовлетворяют билинейному уравнению (11) при

$$p_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{k_i^2 + k_ik_j + k_j^2} \qquad (i \leqslant i < j \leqslant 3).$$

Следовательно, функции

$$w_i = -\frac{1}{6} + 2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\ln G_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

являются решениями уравнения Буссинеска. Несмотря на то что эти решения $w_i$ отличаются от решений, приведенных в п. **1**, их поведение качественно подобно. Если параметры $k_1, k_2, k_3$ вещественных решений $w$, $w_i$ попарно различны и не равны нулю, то соответствующие функции $w_i$ ($i = 1, 2, 3$) задают одно-, двух- и трехсолитонные решения уравнения (2), такие что $w_i \to -1/6$ при $|x| \to \infty$. Если параметры $k_1, k_2$ являются комплексно-сопряженными, то решение $w_2$ будет вещественным. Например, при $k_1 = 0{,}2+i$, $k_2 = 0{,}2-i$ получаем волновой пакет, при $k_1 = 0{,}5 + i$, $k_2 = 0{,}5 - i$ — решение, подобное $D$-волне.

Заметим, что решения уравнения Буссинеска (2) можно искать в виде

$$w = A + 2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\ln K,$$

где $A$ — произвольная константа; функция $K(t, x)$ удовлетворяет билинейному уравнению

$$KK_{tt} - K_t^2 - KK_{xxxx} + 4k_xK_{xxx} - 3K_{xx}^2 - AKK_{xx} + AK_x^2 = 0.$$

Следуя описанной выше методике, несложно построить новые солитоноподобные решения уравнения Буссинеска (2).

Представляет интерес еще один вариант уравнения Буссинеска

$$w_{tt} = w_{xx} + 3(w^2)_{xx} + w_{ttxx}$$

с нулевыми граничными условиями при $|x| \mapsto \infty$ и начальными условиями в виде $P$-, $D$- или $R$-волн, а также исследование эволюции решений данной задачи и их близости соответствующим решениям уравнения (2) при $t \to \infty$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Абловиц М.** Солитоны и методы обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. М.: Мир, 1987.
2. **Захаров В. Е.** Теория солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манахов, С. П. Новиков и др. М.: Наука, 1980.
3. **Matveev V. B.** Darboux transformations and solitons / V. B. Matveev, M. A. Salle. N. Y.: Springer-Verlag, 1991.
4. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
5. **Debnath L.** Nonlinear water waves. Boston: Acad. Press, 1994.
6. **Hirota R.** Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 810–814.
7. **Tajiri M., Murakami Y.** On breather solutions to the Boussinesq equation // J. Phys. Soc. Japan. 1989. V. 58, N 10. P. 3585–3590.
8. **Clarkson P., Dowie E.** Rational solutions of the Boussinesq equation and applications to rogue waves // arXiv.org. 2017. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/1609.00503.pdf.
9. **Bogdanov L. V., Zakharov V. E.** The Boussinesq equation revisited // Physica D. 2002. V. 165. P. 137–162.
10. **Капцов О. В.** Построение точных решений уравнения Буссинеска // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 3. С. 74–78.
11. **Капцов О. В., Капцов Д. О.** Поверхностные гравитационные волны уравнения Буссинеска // arXiv.org. 2018. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/1805.08401.pdf.


*Поступила в редакцию 18/VII 2018 г.,*
*после доработки — 18/VII 2018 г.*
*Принята к публикации 30/VII 2018 г.*