ПМТФ, № 2, 1962

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТОКОПРОВОДЯЩЕМ СТЕРЖНЕ

Н. И. Долбин

(*Москва*)

Рассматривается задача о распространении гармонических волн в идеально проводящем сплошном упругом цилиндрическом стержне, по поверхности которого течет постоянный ток (сильный скин-эффект). Продольное магнитное поле внутри и вне стержня отсутствует. Получено дисперсионное уравнение, определяющее зависимость фазовой скорости волн от волновых чисел и напряженности магнитного поля. Рассмотрен случай возмущений типа перетяжек.

1. Постановка задачи. Рассмотрим идеально проводящий сплошной стержень радиуса a с постоянным током I, текущим по поверхности стержня (сильный скин-эффект). Пусть длина стержня существенно велика по сравнению с его диаметром и осевая деформация отсутствует. Возьмем цилиндрическую систему координит r, φ, z. В равновесном состоянии магнитное поле $\mathbf{H}^\circ$ прямого тока I имеет только составляющую

$$H_\varphi{}^\circ = \frac{2I}{cr} \quad \text{для } r \geqslant a, \qquad H_\varphi{}^\circ = 0 \quad \text{для } r < a$$

Продольное магнитное поле внутри и вне стержня отсутствует. Вектор смещения $\mathbf{u}^\circ$ зависит только от r. На поверхность стержня магнитное поле тока производит давление

$$p_\text{м}{}^\circ = \frac{H_\varphi{}^{\circ 2}}{8\pi} \tag{1.1}$$

Следовательно, в равновесном состоянии из уравнений равновесия вытекает, что

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{\sigma}_{rr} = \overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{H_\varphi{}^{\circ 2}}{8\pi} \\ \overset{\circ}{\sigma}_{zz} = \nu(\overset{\circ}{\sigma}_{rr} + \overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi}) = -\frac{H_\varphi{}^{\circ}}{8\pi}\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = -\nu\frac{H_\varphi{}^{\circ 2}}{4\pi} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона; λ и μ — коэффициенты Ламе. Значком $^\circ$ обозначены равновесные, невозмущенные значения величин; штрихом будут обозначены их возмущенные значения; без значка — их малые изменения, вызванные возмущением. Тогда, например, полный вектор смещения будет $\mathbf{u}' = \mathbf{u}^\circ + \mathbf{u}$. Рассмотрим распространение гармонических волн в стержне таких, что смещения точек стержня вследствие колебаний описываются вектором

$$\begin{gathered} \mathbf{u} = \mathbf{U}(r)\, e^{i(-\omega t + m\varphi + kz)} \\ \mathbf{u} = \{u_r,\ u_\varphi,\ u_z\}, \qquad \mathbf{U}(r) = \{U(r),\ V(r),\ W(r)\} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Из уравнений движения вытекает, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\theta - 2\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega} \qquad (\theta = \operatorname{div}\mathbf{u},\ 2\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}), \tag{1.4}$$

где ρ — плотность материала.

Из (1.3) следует, что

$$\theta = \vartheta(r)\, e^{i(-\omega t+m\varphi+kz)}, \quad \Omega_r = \omega_r(r)\, e^{i(-\omega t+m\varphi+kz)}, \quad \Omega_z = \omega_z(r)\, e^{i(-\omega t+m\varphi+kz)}$$

Величины $\vartheta(r)$, $\omega_r(r)$, $\omega_z(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
&\vartheta'' + \frac{\vartheta'}{r} - m^2\frac{\vartheta}{r^2} + \alpha^2\vartheta = 0 \qquad \left(\alpha^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} - k^2\right)\\
&\omega_z'' + \frac{\omega_z'}{r} - m^2\frac{\omega_z}{r^2} + \beta^2\omega_z = 0 \qquad \left(\beta^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} - k^2\right)\\
&\omega_r'' + 3\frac{\omega_r'}{r} + (1-m^2)\frac{\omega_r}{r^2} + \beta^2\omega_r + 2ik\frac{\omega_z}{r} = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по r.

Решения уравнений (1.5), конечные на оси $r = 0$, имеют вид

$$\begin{aligned}
&\vartheta(r) = -\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} A J_m(\alpha r), \qquad 2\omega_z(r) = -iC\beta^2 J_m(\beta r)\\
&2\omega_r(r) = m\frac{\rho\omega^2}{\mu} B\frac{J_m(\beta r)}{r} + Ck\frac{dJ_m(\beta r)}{dr}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные. Отсюда вытекают следующие выражения для амплитуд вектора $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}
&U(r) = A\frac{dJ_m(\alpha r)}{dr} + Bk\frac{dJ_m(\beta r)}{dr} + Cm\frac{J_m(\beta r)}{r}\\
&V(r) = Aim\frac{J_m(\alpha r)}{r} + Bikm\frac{J_m(\beta r)}{r} + Ci\frac{dJ_m(\beta r)}{dr}\\
&W(r) = AikJ_m(\alpha r) - Bi\beta^2 J_m(\beta r)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Магнитное поле вне стержня будет $\mathbf{H}' = \mathbf{H}^\circ + \mathbf{H}$, при этом $\mathbf{H}$ исчезает на бесконечности. Внутри стержня поля нет. Так как вне стержня $\operatorname{div}\mathbf{H}' = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H}' = 0$, то можно взять $\mathbf{H} = -\nabla\Psi$. Функцию Ψ, которая удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Psi = 0$, будем искать в виде

$$\Psi = \psi(r)\, e^{i(-\omega t+m\varphi+kz)}$$

В результате получим

$$\Psi = GiK_m(kr)\, e^{i(-\omega t+m\varphi+kz)} \qquad (G = \text{const}) \tag{1.8}$$

На возмущенной поверхности S' идеально проводящего стержня должно выполняться следующее: равенство нулю нормальной составляющей [1] магнитного поля $\mathbf{H}'$, а также условия, связывающие напряжения σ_{ik}' внутри стержня с магнитным давлением на его возмущенной поверхности, равным $p_m' = H'^2/8\pi$; имеем

$$\mathbf{H}'\cdot\mathbf{n}' = 0, \qquad \frac{H'^2}{8\pi}n_i' + \sigma_{ik}'n_k' = 0, \qquad \sigma_{ik}' = \overset{\circ}{\sigma}_{ik} + \sigma_{ik} \quad (i,k = r,\varphi,z) \tag{1.9}$$

где $\mathbf{n}'$ — внешняя нормаль к S', а n_i' — ее компоненты.

Принимая во внимание (1.2), получим из (1.9) с точностью до членов первого порядка малости

$$\begin{aligned}
&H_\varphi^0 m\frac{u_r}{r} + G\frac{dK_m(kr)}{dr}e^{i(-\omega t+m\varphi+kz)} = 0\\
&\frac{H_\varphi^{\circ 2}}{4\pi}\frac{u_r}{r} - \frac{H_\varphi^\circ G}{4\pi}m\frac{K_m(kr)}{r}e^{i(-\omega t+m\varphi+kz)} - \sigma_{rr} = 0\\
&\sigma_{r\varphi} = 0, \qquad \frac{H_\varphi^{\circ 2}}{8\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}iku_r - \sigma_{rz} = 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

В (1.10) все значения величин взяты на поверхности S°, то есть для $r = a$, для $\mathbf{n}'$ использована приближенная формула $\mathbf{n}' = \mathbf{n}^\circ - \nabla u_r$, где u_r — функция только координат φ, z на поверхности S°.

На S° с указанной точностью

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}^\circ - \mathbf{H}^\circ \frac{u_r}{r} - \nabla GiK_m(kr)\, e^{i(-\omega t + m\varphi + kz)}$$

(при $r = a$)

$$\frac{H'^2}{8\pi} = \frac{H_\varphi^{\circ 2}}{8\pi} - \frac{H_\varphi^{\circ 2}}{4\pi}\frac{u_r}{r} + \frac{H_\varphi^\circ G}{4\pi} m \frac{K_m(kr)}{r} e^{i(-\omega t + m\varphi + kz)}$$

Используя (1.7), запишем (1.10) в перемещениях

$$b_{i1}\frac{A}{a^2} + b_{i2}\frac{B}{a^3} + b_{i3}\frac{C}{a^2} + b_{i4}\frac{C}{a\sqrt{8\pi E}} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ E \text{ — модуль упругости} \end{array}\right) \tag{1.11}$$

Элементы определителя $|b_{ij}|$ системы (1.11) с неизвестными

$$A / a^2, \quad B / a^3, \quad C / a^2, \quad G / a\sqrt{8\pi E}$$

имеют вид:

$$b_{11} = \frac{H_\varphi^\circ}{\sqrt{8\pi E}} m\alpha a J_m'(\alpha a), \qquad b_{12} = \frac{H_\varphi^\circ}{\sqrt{8\pi E}} mk a\beta a J_m'(\beta a)$$

$$b_{13} = \frac{H_\varphi^\circ}{\sqrt{8\pi E}} m^2 J_m(\beta a), \qquad b_{14} = kaK_m'(ka)$$

$$b_{21} = \left(\frac{H_\varphi^{\circ 2}}{4\pi} + 2\mu\right)\alpha a J_m'(\alpha a) + \left[k^2a^2\left(\frac{\rho\omega^2}{k^2} - 2\mu\right) - 2\mu m^2\right] J_m(\alpha a)$$

$$b_{22} = \left(\frac{H_\varphi^{\circ 2}}{4\pi} + 2\mu\right) ka\beta a J_m'(\beta a) + 2\mu ka(\beta^2a^2 - m^2) J_m(\beta a)$$

$$b_{23} = \left(\frac{H_\varphi^{\circ 2}}{4\pi} + 2\mu\right) mJ_m(\beta a) - 2\mu m\beta a J_m'(\beta a)$$

$$b_{24} = -\frac{H_\varphi^\circ \sqrt{E}}{\sqrt{2\pi}} mK_m(ka), \quad b_{31} = m\,[\alpha a J_m'(\alpha a) - J_m(\alpha a)] \tag{1.12}$$

$$b_{32} = mka\,[\beta a J_m'(\beta a) - J_m(\beta a)], \quad b_{33} = \left(m^2 - \frac{\beta^2a^2}{2}\right) J_m(\beta a) - \beta a J_m'(\beta a)$$

$$b_{34} = 0, \quad b_{41} = \left(\frac{H_\varphi^{\circ 2}}{8\pi}\frac{\mu}{\lambda + \mu} - 2\mu\right) ka\alpha a J_m'(\alpha a)$$

$$b_{42} = \left(\frac{H_\varphi^{\circ 2}}{8\pi}\frac{\mu}{\lambda + \mu} k^2a^2 - \mu k^2a^2 + \mu\beta^2a^2\right)\beta a J_m'(\beta a)$$

$$b_{43} = \left(\frac{H_\varphi^{\circ 2}}{8\pi}\frac{\mu}{\lambda + \mu} - \mu\right) mkaJ_m(\beta a), \quad b_{44} = 0$$

В равенствах (1.12) штрихом обозначены производные по взятым при $r = a$ аргументам функций Бесселя и Макдональда.

2. Дисперсионное уравнение. Приравнивая нулю определитель системы (1.11) с элементами (1.12), получим дисперсионное уравнение

$$|b_{ij}| = 0 \tag{2.1}$$

Дисперсионное уравнение (2.1) для различных значений m дает зависимость фазовой скорости волн от длины волн, напряженности магнитного поля и механических характеристик материала при различных видах колебаний. При $m = 0$ это будут колебания типа перетяжек; при $m = 1$ — колебания изгибного типа. Когда магнитного поля нет ($I = 0$), из (1.10) видно, что вектор напряжения на поверхности S° обращается в нуль и условия (1.11) переходят в известные условия [2] равенства нулю компонентов напряжения на поверхности стержня, из которых получается дисперсионное уравнение [2, 3, 4].

При коэффициентах Ламе $\mu \to 0$, $\lambda \to C_1^2 \rho_0$ коэффициент Пуассона $\nu \to 0.5$, модуль упругости $E \to 3C_1^2 \rho_0 (1-2\nu) \to 0$, уравнение (1.4) переходит в уравнение гидродинамики

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = C_1{}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}$$

а уравнение (2.1) переходит в дисперсионное уравнение для плазмы [5]. Здесь C_1 — гидродинамическая скорость звука, ρ_0 — невозмущенная плотность (для стержня было ρ).

В уравнение (2.1) входят переменные $H_\varphi{}^\circ$, $r = a$, λ, μ, ρ, частота $\omega / 2\pi$ и длина волны $2\pi / k$. Выражая (2.1) в безразмерных переменных, можно сократить число переменных до четырех

$$h^2 = \frac{H_\varphi{}^{\circ 2}}{8\pi E}, \qquad y^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c_0{}^2}, \qquad x = ka, \quad \nu \qquad \left(c_0{}^2 = \frac{E}{\rho}\right)$$

Здесь ω^2 / k^2 — фазовая скорость волны, x — длина окружности стержня, отнесенная к длине волны.

Запишем уравнение (2.1) в безразмерной форме, вынося за знак определителя из второй и четвертой строк множитель E

$$\alpha^2 a^2 = k^2 a^2 \left(\frac{\rho\omega^2}{k^2 (\lambda + 2\mu)} - 1\right) = x^2 \left(y^2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} - 1\right)$$

$$\beta^2 a^2 = k^2 a^2 \left(\frac{\rho\omega^2}{k^2 \mu} - 1\right) = x^2 \left(2y^2 (1+\nu) - 1\right)$$

Введем обозначение $\alpha a = X$, $\beta a = Y$. Тогда элементы определителя $\| b_{ij} \|$ будут иметь такой вид:

$$b_{11} = hmXJ_m{}'(X), \quad b_{12} = hmYJ_m{}'(Y), \quad b_{13} = hm^2 J_m(Y), \quad b_{14} = xK_m{}'(x)$$

$$b_{21} = \left(2h^2 + \frac{1}{1+\nu}\right) XJ_m{}'(X) + \left[x^2 \left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right) - \frac{m^2}{1+\nu}\right] J_m(X)$$

$$b_{22} = \left(2h^2 + \frac{1}{1+\nu}\right) YJ_m{}'(Y) + \frac{Y^2 - m^2}{1+\nu} J_m(Y)$$

$$b_{23} = \left(2h^2 + \frac{1}{1+\nu}\right) mJ_m(Y) - \frac{m}{1+\nu} YJ_m{}'(Y)$$

$$b_{24} = -2hmK_m(x), \qquad b_{31} = m\,[XJ_m{}'(X) - J_m(X)]$$

$$b_{32} = m\,[YJ_m{}'(Y) - J_m(Y)], \quad b_{33} = \left(m^2 - \frac{Y^2}{2}\right) J_m(Y) - YJ_m{}'(Y)$$

$$b_{34} = 0, \qquad b_{41} = \left[h^2 (1-2\nu) - \frac{1}{1+\nu}\right] XJ_m{}'(X)$$

$$b_{42} = \left[h^2 (1-2\nu) - \frac{1}{1+\nu} + y^2\right] YJ_m{}'(Y)$$

$$b_{43} = \left[h^2 (1-2\nu) - \frac{1}{2(1+\nu)}\right] mJ_m(Y), \quad b_{44} = 0 \tag{2.2}$$

Вынесем за знак определителя $| b_{ij} |$ с элементами (2.2) из первой строки hm, из первого, второго, третьего, четвертого столбцов соответственно

$$XJ_m{}'(X), \qquad YJ_m{}'(Y), \qquad mJ_m(Y), \qquad \frac{1}{hm} xK_m{}'(x)$$

и сократим на вынесенный множитель. Разлагая определитель четвертого порядка по элементам последнего столбца, получим дисперсионное уравнение в форме определителя третьего порядка

$$|C_{ij}| = 0 \tag{2.3}$$

с элементами

$$C_{11} = 2h^2 + 2h^2m^2\psi_m(x) + \frac{1}{1+\nu} + \left[x^2\left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right) - \frac{m^2}{1+\nu}\right]\varphi_m(X)$$

$$C_{12} = \frac{Y^2 - m^2}{1+\nu}\varphi_m(Y) - \left[x^2\left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right) - \frac{m^2}{1+\nu}\right]\varphi_m(X) \tag{2.4}$$

$$C_{13} = -\left[x^2\left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right) - \frac{m^2}{1+\nu}\right]\varphi_m(X) - \frac{1}{(1+\nu)\varphi_m(Y)}$$

$$C_{21} = m^2[1 - \varphi_m(X)], \qquad C_{22} = m^2[\varphi_m(X) - \varphi_m(Y)]$$

$$C_{23} = m^2\varphi_m(X) - \frac{Y^2}{2} - \frac{1}{\varphi_m(Y)}, \qquad C_{31} = h^2(1-2\nu) - \frac{1}{1+\nu}$$

$$C_{32} = y^2, \qquad C_{33} = \frac{1}{2(1+\nu)}, \qquad \varphi_m(\xi) = \frac{J_m(\xi)}{\xi J_m'(\xi)}, \qquad \psi_m(\xi) = \frac{K_m(\xi)}{\xi K_m'(\xi)}$$

Найдем критическое значение h_* как функцию длины волны x и коэффициента Пуассона ν, т. е. такое h_*, когда $y^2 = 0$. Разрешая (2.3) относительно h^2 и переходя к пределу при $y^2 \to 0$, найдем, что

$$h_*^2 = \frac{|p_{ij}|}{|q_{ij}|} \tag{2.5}$$

Элементы определителей имеют следующий вид:

$$p_{11} = \frac{x^2+m^2}{1+\nu}\varphi_m(xi) - \frac{1}{1+\nu}, \qquad p_{21} = m^2[\varphi_m(xi) - 1], \qquad p_{31} = \frac{1}{1+\nu}$$

$$p_{12} = q_{12} = x^2\varphi_m(xi) + \frac{x^2+m^2}{2(1-\nu)}\left[1 - \varphi_m(xi) - xi\varphi_m(xi)\frac{J_m''(xi)}{J_m'(xi)}\right]$$

$$p_{22} = q_{22} = \frac{m^2(1+\nu)}{2(1-\nu)}\left[1 - \varphi_m(xi) - xi\varphi_m(xi)\frac{J_m''(x)}{J_m'(xi)}\right]$$

$$p_{32} = q_{32} = 1, \qquad p_{13} = q_{13} = \frac{x^2+m^2}{1+\nu}\varphi_m(xi) - \frac{1}{(1+\nu)\varphi_m(xi)}$$

$$p_{23} = q_{23} = m^2\varphi_m(xi) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\varphi_m(xi)}, \qquad p_{33} = q_{33} = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

$$q_{11} = 2[1 + m^2\psi_m(x)], \quad q_{21} = 0, \quad q_{31} = 1 - 2\nu \qquad (i = \sqrt{-1})$$

3. Колебания типа перетяжек. Полагая $m = 0$ в (2.3) и (2.5) и обозначая [3] через $\varphi(\xi) = \xi J_0(\xi)/J_1(\xi)$, получим соответственно дисперсионного уравнение и h_* для колебаний этого типа

$$h^2 = \frac{1}{1-2\nu}\left[\left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right)^2\varphi(X) - \frac{1}{1+\nu}\left(y^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} - 1\right) \times\right.$$
$$\times\left.\left(y^2 - \frac{\varphi(Y)}{1+\nu}\right)\right]\left[\frac{1}{1+\nu}\left(y^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} - 1\right)\varphi(Y) -\right.$$
$$\left. - \left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right)\varphi(X) + \frac{2y^2}{1+\nu}\left(y^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} - 1\right)\right]^{-1} \tag{3.1}$$

$$h_*^2 = \frac{[\varphi(xi)]^2 - x^2 - 2(1+\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\{[\varphi(xi)]^2 - x^2 - 2(1-\nu)\varphi(xi) + 4(1-\nu)/(1-2\nu)\}} \tag{3.2}$$

В частности, для длинных волн $(x \to 0)$ из (3.1) и (3.2) получим

$$h^2 = \frac{1-y^2}{2[1 - 2\nu^2 - y^2(1+\nu)(1-2\nu)]}, \qquad h_*^2 = \frac{1}{2(1-2\nu)^2} \tag{3.3}$$

Из фиг. 1 (где у кривых проставлены значения длины волны $x = 0$, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5) видно, что для $x \approx 1$ (длины волн, примерно равные длине окружности поперечного сечения стержня, по которому течет ток) при расчетах можно пользоваться формулами (3.3). При указанных на фиг. 1 длинах волн существует h^2, зависящие от ν, такие, что скорость y^2 почти не зависит от длины волны.

Из фиг. 2 видно, что $h_*{}^2$ с увеличением длины волны x растет и растет его зависимость от ν. При $x \approx 3$ величина $h_*{}^2$ не зависит от ν.

Для коротких волн $(x \to \infty)$ из (3.1) получим

$$h^2 = \frac{1}{1-2\nu}\,\frac{\left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right)^2 + \frac{1}{1+\nu}\sqrt{y^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} - 1}\,\sqrt{2y^2(1+\nu)-1}}{\frac{1}{1+\nu}\sqrt{y^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} - 1}\,\sqrt{2y^2(1+\nu)-1} - \left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right)} \qquad (3.4)$$

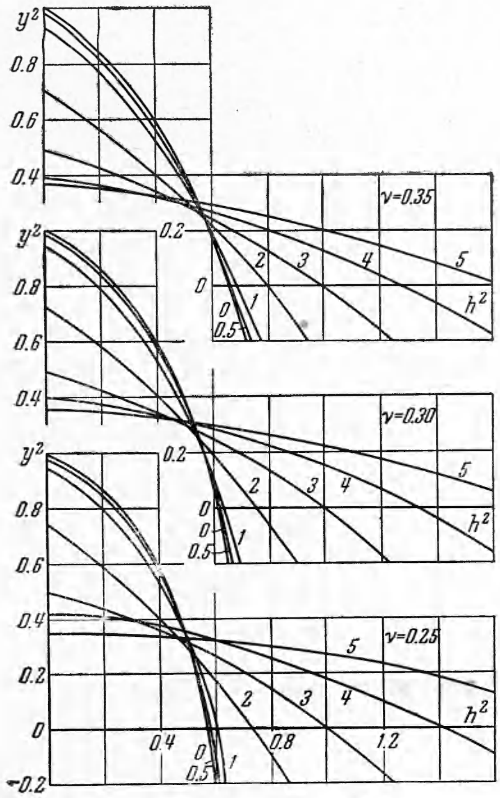
так как

$$\lim \varphi(i\xi) = \xi \text{ при } \xi \to \infty$$

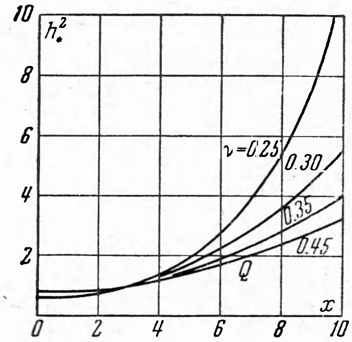
При $h^2 = 0$ уравнение (3.4) превращается в уравнение для поверхностных волн Релея. Из (3.4) следует, что с ростом h^2 скорость y^2 не уменьшается, а, наоборот, увеличивается от значения скорости поверхностных волн до значения

$$y^2 = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

$$\left(\text{при } h^2 = \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\right)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

и дальнейшее увеличение y^2 невозможно.

Автор благодарен А. И. Морозову за предложенную тему и полезные советы, а также Ю. Н. Работнову и Г. С. Шапиро за внимание.

Московский государственный университет

Поступила 3 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
2. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., ИИЛ, 1955,
3. Bancroft D. The Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars. Phys. Rev., 1941, 59, 588.
4. Hudson G. E. Dispersion of Elastic Waves in Solid Circular Cylinders. Phys. Rev., 1943, 63, 46.
5. Морозов А. И., Соловьев Л. С. О гашении колебаний плазменного шнура. Сб. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Изд-во АН, СССР, 1958, т. IV, стр. 392.